

# 電気現象の差分法による検討

## An Approach to Electrical Phenomenon by the Finite Difference Method

立花康夫

Yasuo Tachibana

神奈川工科大学情報学部情報メディア学科

**Abstract** In this paper, we propose an instruction method of electromagnetism using numerical approach. Many electromagnetic phenomena are expressed as the initial and boundary value problems of some partial differential equations. These problems are solved by the finite difference equations which are easily derived from the differential equations. In this method we can solve the problems in the structure of complicated geometrical environments. We can show the physical meanings of the problems by the simulation in personal computer. For numerical examples, the calculations of the voltage potential in a wave guide with cross section of circle, rectangle and ellipse are presented.

### 1 はじめに

電磁気学はむずかしい教科の一つである。これは、本質的に電磁気現象の把握の難しさがあるためと考えられる。法則に基づいて何らかの問題を解こうとすると、当然のことながら、環境の幾何学的な構造に依存した困難さが現われる。そのため、法則を記述する無限に様々の空間の場合の他は、対称性の良い直線や平面、円や球等の構造の場合の解が教科書の解説の大半を占めている[1],[2],[3]。しかも、その対称性の良い構造に対してさえも、夫々の幾何学的あるいは数学的な工夫が要求されるために、物理的な本質とはかけ離れた点に力が注がれてしまう。例えば、対称な境界に伴って現われる各種特殊関数を理解する必要性等である[4]。

この論文では、数式で表される(近似式でも)解が得られない場合でも、数値的な解を求めることにより物理的な本質を見失うことなく電磁気学を理解する一助として、差分法とパソコンによる数値計算を用いる方法を提案し、電磁気学学習の一方向を示す。

### 2 電磁気学のむずかしさ

電磁気学はやさしいよという人はそんなには多くないと思う。力学では、力と変位の関係は極めて容易に理解できる。ゴムひもやバネを想像すれば、それらを引っ張ると、引っ張った方向に伸びることを認識できない人はいない(力と変位が比例する場合は Hook の法則)。しかし、電場の強さと電気変位(あるいは電束密度)の間の関係をゴムひもやバネの場合のように想像できる人は少ない。当然、磁場の強さと磁束密度の関係においても同様である[2]。この点に、電磁気学が力学と比較して理解を困難にしている大きな原因があると考えられる。

力学では Hook の法則が理解できれば、複雑な構造物の応力と歪みの関係や、複雑な構造物を流れる流体の応力と歪み速度の関係の定式化はわかりやすく、容易に理解できる[5]。それらを基に基本方程式が導かれる。ここでは、特別な対称性を利用する必要はない。本来、Maxwell は電磁気学の基本法則をこのようにして導いたものであろう。しかし、電磁気学の教科書ではどちらかという、Maxwell の方程式は最後の方で天下り的に記述されている[1]。Maxwell の方程式の特別な環境下での問題を初めにいろいろ学習して、やっとそこにたどりつく。Maxwell の方程式を直接解くことは電磁波の扱いのような場合を除けば、教科書的にはあまりない。

最も一般的な式が容易に導かれる力学の場合と、物理的に高度の認識を経て初めて一般式が導かれる電磁気学の場合とでは、その後の扱いが大分異なる。複雑な構造の環境下で一般式の解法の必要性、あるいはもっと具体的に産業の中で工学的な要求がどれ程強いかが解に対する要求の強弱を左右する。力学的な応用では、ともかく与えられた構造の環境下で解(当然、数値解)が必要とされる。そのため、有限要素法、境界要素法や差分法等の数値解を求める手法の導入が発達し[6],[7]、それに伴う計算機の高度な利用が促された。

一方、電磁気学の応用では、電磁波に関する問題、電気機器の設計、核融合でのプラズマの利用等で有限要素法、境界要素法や差分法が用いられている[8]。しかし、教科書で身近な例題にこれらは取り上げられていない。

この論文では、卑近な同軸ケーブル内部の電圧の分布を題材に取り上げる。教科書に載っている記述はまず、同軸の円筒形のケーブルを扱う。そこでは、円筒の対称性を利用して、わかりやすい Coulomb の法則や Gauss の定理等を用いて電圧分布を求める。しかし、円筒形でない場合はどうなるかは記述されない。例えば、長方形断面や楕円断面ではどうなるのかは記述されない。しかも、円筒形で用いた手法はこれらには基本的に使えない。

この論文では、可能な限り一般的な式を用いてそれを差分法により直接数値解法する。パソコンで容易に計算して結果を図形表示すれば、物理的な本質も理解できる。

### 3 同軸ケーブルの問題

電荷分布の無い空気で満たされた空間を考える。この電界の強さ  $\mathbf{E}$  は電圧  $\phi$  を用いて

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi \quad (1)$$

と表される。また考えている空間には電荷の分布は無いので電束密度  $\mathbf{D}$  は

$$\text{div}\mathbf{D} = 0 \quad (2)$$

を満たす。さらに考えている空間は空気中であるので、

$$\mathbf{D} = \varepsilon_{\text{air}} \mathbf{E} \quad (3)$$

となる。 $\varepsilon_{\text{air}}$  は空気の誘電率である。式(1),(2),(3)から  $-(\text{div}\mathbf{D})/\varepsilon_{\text{air}} = -\text{div}\mathbf{E} = \text{div}(\text{grad}\phi) = \Delta\phi = 0$  (4) となる。ここで  $\Delta$  はラプラシアン(Laplacian)で、 $\phi$  は  $z$  方向に一様とすると、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

となる。従って、電圧  $\phi$  はラプラスの方程式を満たし、

境界で所定の電圧となる(境界条件)。

この論文で考察する同軸ケーブルの断面は、図1、図2、図3のような円、長方形、楕円である。図1の場合、外側の電極である長方形の金属には0[V]、内側電極である長方形の金属にはV[V]の電圧がかけられている。我々の問題は、全て式(5)を所定の境界条件で解く、いわゆる、Dirichlet問題である。図1の場合は、容易に解けて、

$$\phi = V \log(b/r) / \log(b/a) \quad (6)$$

と表される[1]。しかし、図2や図3の場合ではもはや、式(6)のような式で解を得ることはできない。

#### 4 長方形断面の同軸ケーブル

我々は、これらの問題を差分法で求めようとする。図2の長方形断面の場合につき説明する。図2の断面でその中心に原点が来るようにx軸とy軸を設ける。断面の対称性から、第1象限の解が得られれば、他の象限の解は軸で折り曲げれば得られる。第1象限で辺の長さがA, Bの長方形領域の解を考える。図4のようにx軸とy軸に沿う辺を $M_A$ および $N_B$ 等分する。等分点で縦と横の線を引けば長方形領域が格子で覆われる。線の間隔はx軸刻み幅、y軸刻み幅で、

$$\Delta x = A/M_A \quad \Delta y = B/N_B \quad (7)$$

となる。さらに、

$$M_a = a/\Delta x \quad N_b = b/\Delta y \quad (8)$$

とすると内側壁の格子の位置番号が求められる。格子点を表すには、横方向の番号 $i (= 0, 1, \dots, M_A)$ と縦方向の番号 $j (= 0, 1, \dots, N_B)$ を用いる。そこで長方形領域内の格子は $(i, j)$ で指定できる。従って、 $(i, j)$ 格子の $(x, y)$ 座標は、

$$x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y \quad (9)$$

と表される。便宜上、下記のように定義する。

$$\gamma = \Delta y / \Delta x \quad (10)$$

$$\phi_{i,j} = \phi(x_i, y_j) \quad (11)$$

##### 4.1 電圧未知格子

我々は作成した格子の上の電圧のみを求める。格子の刻み幅を適当に小さくすれば、目的に沿う精度で電圧分布を求めることができる。図5は $M_a = 2, M_A = 5, N_b = 2, N_B = 5$ の場合での格子を表したものである。外殻と内棒の部分に属する格子の電圧は既知である。電圧が不明なのはこれらの空間に属する黒丸で記した16点である。一般の $1 \leq M_a < M_A, 1 \leq N_b < N_B$ の場合電圧未知格子数は下記のように表される。

$$P_T = (M_A + N_b + 1)(M_A - M_a - 1) \quad (12)$$

##### 4.2 差分法による定式化

電圧未知格子 $(i, j)$ で偏微分方程式(5)を考えると、

$$\frac{\partial^2 \phi(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x_i, y_j)}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

である。 $(i, j)$ 格子での偏微分の値を平均変化率で、

$$\frac{\partial^2 \phi(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{\phi(x_i + \Delta x, y_j) - 2\phi(x_i, y_j) + \phi(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x^2} \quad (14)$$

と近似できる。同様に、

$$\frac{\partial^2 \phi(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{\phi(x_i, y_j + \Delta y) - 2\phi(x_i, y_j) + \phi(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y^2} \quad (15)$$

と近似する。式(14),(15)を式(13)に代入して整理すると、

$$\gamma^2 \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j} - 2(1 + \gamma^2)\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j} + \gamma^2 \phi_{i,j-1} = 0 \quad (16)$$

$\phi_{i,j} = \phi(x_i, y_j)$ は正しい解の $(x_i, y_j)$ での値と考えると式(16)は近似式であるが、方程式(16)を満たす解を新たに $\phi_{i,j}$ とすると、これは $(x_i, y_j)$ での解の近似値となる。方程式(16)を解いて解の近似値を求める方法を差分法と呼ぶ。方程式(16)は2次元の差分方程式である。

##### 4.3 差分方程式に現われる格子

$(i, j)$ が電圧未知格子とする。このときに差分方程式(16)に現れる格子は図6のようになる。すなわち、電圧未知格子の両隣と上下の4点の関係する。従って、 $(i, j)$ が電圧未知格子であると、方程式に関係する格子はそれよりも一回り広い範囲の格子である。その中には、内外の境界に含まれる格子も現れる。これらの格子では電圧値は未知ではなく境界値として定まっている。また、構造物の対称性により切り取った部分の格子では、対称性に伴う条件

$$\phi_{i,-1} = \phi_{i,1} \quad (i = M_a + 1, \dots, M_A - 1) \text{ (下対称点)} \quad (17)$$

$$\phi_{-1,j} = \phi_{1,j} \quad (j = N_b + 1, \dots, N_B - 1) \text{ (左対称点)} \quad (18)$$

が付される。電圧未知格子 $(i, j)$ での差分方程式に関わる全ての格子を表すと、一まわり大きな範囲の格子となる。図3すなわち $M_a = 2, M_A = 5, N_b = 2, N_B = 5$ の場合に関係する全格子は図5となる。図5では内棒の内部でも格子を設定している。関係する全ての格子 $(i, j)$ はインデックス

$$i = -1, 0, 1, \dots, M_A \quad j = -1, 0, 1, \dots, N_B \quad (19)$$

により指定できることがわかる。したがって、この範囲の格子は電圧未知格子か、電圧の定まった格子である。

##### 4.4 未知格子の番号付け

値未知格子の数は全部で $P_T$ 個あり、その点で差分方程式(16)を考えると、方程式の数も $P_T$ である。しかも現れる $\phi_{i,j}$ は未知格子に対応するか、値が定まっているかである。従って連立一次方程式として一意的に解くことができる。そこで、電圧未知格子に通し番号を付けるとともに、関連する拡大範囲の格子に印を付すことを考える。例えば図5の場合では、電圧未知格子は1から $P_T = 16$ までの通し番号、外側境界に属する格子には0、内側境界に属する格子には-1、内の金属内部に属する格子には-2を付す。また対称性の条件(17),(18)を考慮して1から $P_T = 16$ までの番号を付す。図6の中には格子に付した通し番号も記されている。このように $(i, j)$ 格子に付した通し番号は関数 $\sigma(i, j)$ により与える。一般の場合にも $\sigma(i, j)$ は容易に定義できる。

##### 4.5 1次方程式としての表示

電圧未知格子に1から $P_T$ までの通し番号が付されたので、次のようにして変数の置き換えをする。まず、

$$p = \sigma(i, j), p_1 = \sigma(i, j + 1), p_2 = \sigma(i - 1, j), p_3 = \sigma(i + 1, j), p_4 = \sigma(i, j - 1) \quad (20)$$

とする(図7)。pは電圧未知格子に付された通し番号

で  $1 \sim P_T$  と変化する。そこで、新たに変数  $u_p = \phi_{i,j}$  を定義する。こうして  $u_k (k=1 \sim P_T)$  が我々の求める未知数となる。  $p_1, p_2, p_3, p_4$  は  $1 \sim P_T$  の他に  $0, -1$  を取る。そこで、  $k \geq 1$  では  $v_k = u_k$ 、  $k = -1$  では  $v_k = V_i$ 、  $k = 0$  では  $v_k = V_E$ 、  $k = -2$  では  $v_k = V_j$  とすると、差分方程式(16)は、

$$-\gamma^2 v_{p_1} - v_{p_2} + 2(1 + \gamma^2) v_p - v_{p_3} - \gamma^2 v_{p_4} = 0 \quad (21)$$

と表される。  $v_k$  の定義を用いて式(21)を整理すると、

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (22)$$

と書ける。ここで、  $n = P_T$  で

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

とした。行列  $\mathbf{A}$  の要素  $a_{p,q}$  で  $0$  でないものは  $a_{p,p}, a_{p,p_2}$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) のみである。ベクトル  $\mathbf{b}$  の要素は  $v_k$  で  $u_k$  とならなかった値を右辺に移項した項からなる。このようにして我々は  $n$  変数に対する  $n$  個の式からなる連立1次方程式(23)を得ることができた。

#### 4.6 連立1次方程式の解法

方程式の次数  $n$  が小さいとき ( $n \leq 500$  程度) には Gauss の掃き出し法(Sweep out)による解法が効率的である。しかし、これを超えると Gauss-Seidel 法等繰り返し法の方が効率的である。方程式(23)を各行ごとに書き下すと

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

となる。初期値  $\mathbf{u}^{(0)} = [u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}]^T$  を適当に定める。次に、最大繰り返し数  $N$  に対して  $k$  ステップ目の近似解ベクトル  $\mathbf{u}^{(k)} = [u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_n^{(k)}]^T$  が定まったら、  $i=1, 2, \dots, n$   $k=0, 1, \dots, N-1$  に対して

$$u_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} u_j^{(k)} \right) \quad (25)$$

により  $k+1$  ステップ目の近似解ベクトル  $\mathbf{u}^{(k+1)} = [u_1^{(k+1)}, u_2^{(k+1)}, \dots, u_n^{(k+1)}]^T$  を得る。途中で  $\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}\|^2 = \sum_{i=1}^n |u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}|^2 < \varepsilon$  (26)

となれば逐次近似過程を中断する。初期ベクトルは  $\mathbf{u}^{(0)} = [u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}]^T = [1, 1, \dots, 1]^T$  (27) とする。 Gauss-Seidel 法では  $a_{i,i} \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) が必須であるが、我々の場合は  $a_{i,i} = 2(1 + \gamma^2)$  なので、この条件は常に満たされている。実は、 Gauss-Seidel 法が収束する条件も我々の場合には満たされている。  $\varepsilon$  は正の小数である。図 10 に計算例を図示した。

#### 5 楕円筒の内部の電圧分布

円筒内部の電圧分布は、極めて簡単な式(6)で表された。それでは似たような問題として、円筒でなく楕円筒に囲まれた空間の電圧分布はどのようになるだろうか。ただし、楕円の形は皆同じ形、すなわち、長半径と短半径の比が同じとする。前の問題と同じような設定にするために内部の楕円筒の長半径を  $a[\text{m}]$ 、外側の楕円筒の

長半径を  $b[\text{m}]$  とし、長半径に対する短半径の比を  $\rho$  とする。外側筒の電圧を  $0[\text{V}]$ 、内側筒の電圧を  $V[\text{V}]$  とする。円筒に囲まれた内部において、長半径  $r[\text{m}]$  で長半径に対する短半径の比が  $\rho$  の楕円筒面上の点  $P$  の電位  $\phi[\text{V}]$  を求める。

このような問題では電圧  $\phi$  を簡単な式で表すことはできない。楕円の内部を表すのに極座標ではなく楕円のパラメータ表示として良く用いられる座標系を導入する(これを便宜上、楕円座標とする)。図 8 で長半径  $r$ 、短半径  $\rho r$  の楕円を考える。この楕円の上の点  $P(x, y)$  を楕円座標  $(r, \theta)$  で表す。半径  $r$  の円を楕円に外接させる。点  $P$  から  $x$  軸に垂線を引き外接円と交わる点と円の中心からの線分が  $x$  軸となす角を  $\theta$  とすると

$$x = r \cos \theta \quad y = \rho r \sin \theta \quad (28)$$

である。円すなわち  $\rho = 1$  なら、円で極座標になる。ここで、便宜上、

$$\mu = 1 + 1/\rho^2 \quad \nu = 1 - 1/\rho^2 \quad (29)$$

と置く。円の場合と本質的には同じであるが、少し複雑な計算をすると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\mu + \nu \cos 2\theta}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ &- \frac{\nu \sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\mu - \nu \cos 2\theta}{2r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ &+ \frac{\mu - \nu \cos 2\theta}{2r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\nu \sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$r$  と  $\theta$  を図 9 のような領域の範囲で変化させると、  $(x, y)$  は楕円筒に囲まれたドーナツ状の領域(Torus)を表す。ドーナツ領域は楕円座標  $(r, \theta)$  では矩形となる。これが差分法で楕円座標を用いる理由である。電圧  $\phi$  を楕円座標で表し  $\phi(r, \theta)$  と記す。図 9 の左の辺は図 3 のドーナツ領域での内側楕円を表し電圧が  $V$ 、図 9 の右の辺は外側楕円を表し電圧は  $0$  なので、

$$\phi(a, \theta) = V \quad \phi(b, \theta) = 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (31)$$

である。ところで、ドーナツ状の形状から明らかに次式が成り立つ。

$$\phi(r, \sigma) = \phi(r, \sigma - 2\pi) \quad (a \leq r \leq b; 0 \leq \sigma \leq 2\pi) \quad (32)$$

図 9 で下側の辺での電圧と上側の辺での電圧は同じとなる。式(31),(32)を境界条件、特に式(32)を周期的境界条件という。我々は式(31),(32)で表される境界条件の下で式(30)の偏微分方程式を解くことになる。解くべき偏微分方程式の形は複雑になるが、領域は長方形である。4節に示した差分法を適用する場合に、領域が長方形になることは差分法には都合が良い。円の場合の計算結果を図 11 に、楕円の場合の結果を図 12 に示す。

#### 6. まとめ

静電気の典型的問題である同軸ケーブル内の電圧分布を差分法で解き、電磁気現象の理解の方法の一つを示した。断面が、円、長方形、楕円の場合についての結果を示した。式での解が得られなくても、パソコンのように、卑近にある計算手段を用いれば、数値的な計算結果が容易に得られること、またそれをうまく表示することに工夫をすることにより、電磁気学の学習には有効な方法を与えるものであることを示した。なお、この論文では差分方程式の解が元の偏微分方程式の境界値問題をどの程度近似するかの議論はしなかった。



参考文献

- [1] 三谷健次「電磁気学」共立全書、1971
- [2] パノフスキー、フィリップ「電磁気学上」吉岡書店、1962
- [3] ランドウ、リフシツ「場の古典論」東京図書、1978
- [4] 犬井鉄郎「特殊関数」岩波全書、1962
- [5] 巽友正「連続体の力学」岩波書店、1995
- [6] 高見頼郎、河村哲也「偏微分方程式の差分法」東京大学出版会、1994
- [7] 矢川元基、関東康祐、奥田洋司「計算力学」岩波講座・現代工学の基礎、2000
- [8] 電気学会「計算電磁気学」、倍風館、2003

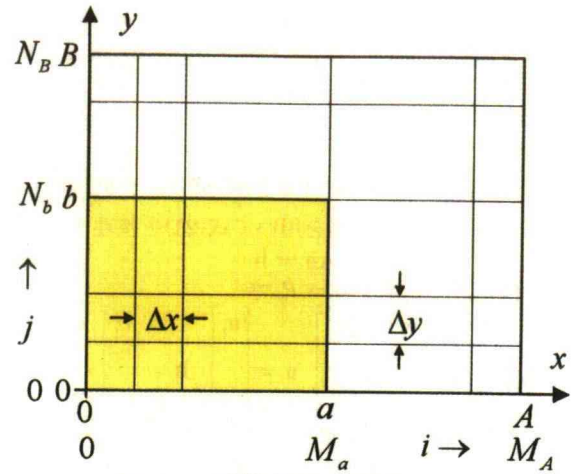


図4 計算格子の導入

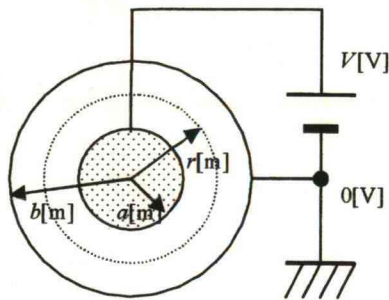


図1 円筒に囲まれた空間の電位

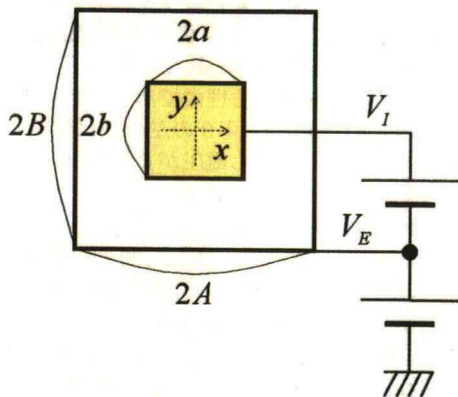


図2 長方形筒に囲まれた空間の電位

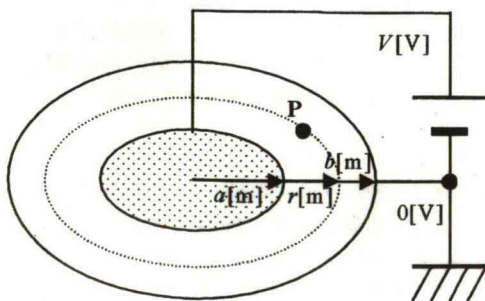
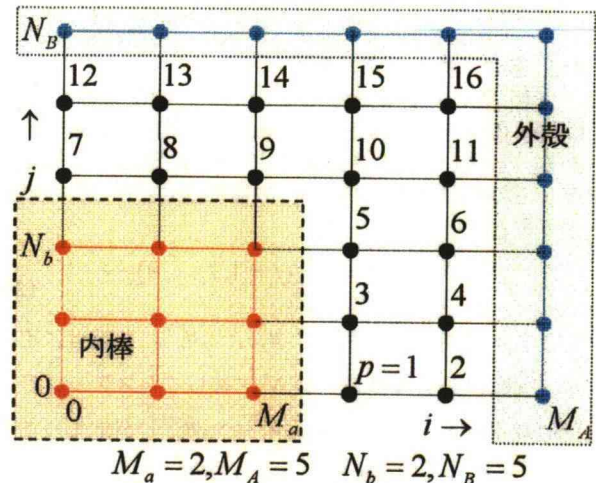
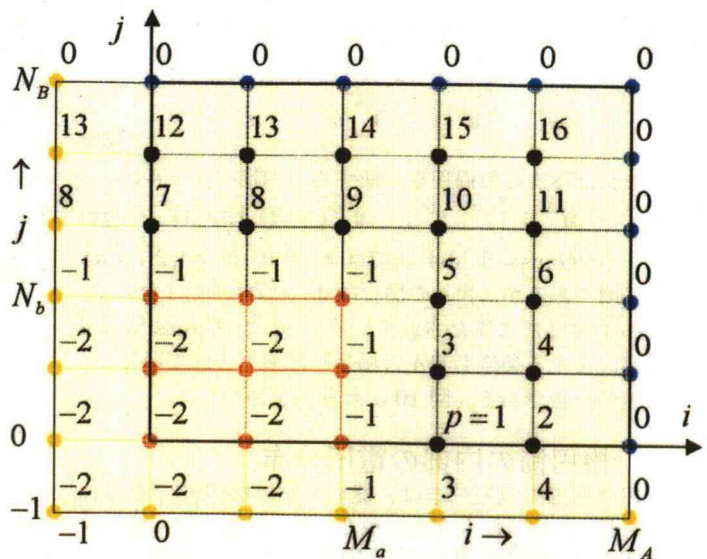


図3 楕円筒に囲まれた空間の電位



$$M_a = 2, M_A = 5 \quad N_b = 2, N_B = 5$$

図5 電圧未知格子の番号付け



$$M_a = 2, M_A = 5 \quad N_b = 2, N_B = 5$$

図6 拡大領域での  $p = \sigma(i, j)$  の定義

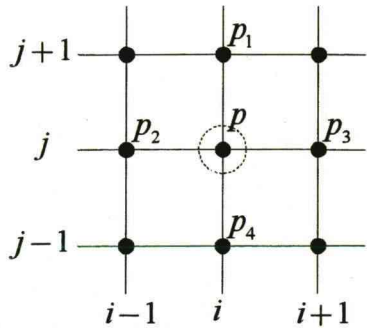


図7 未知格子周辺の格子

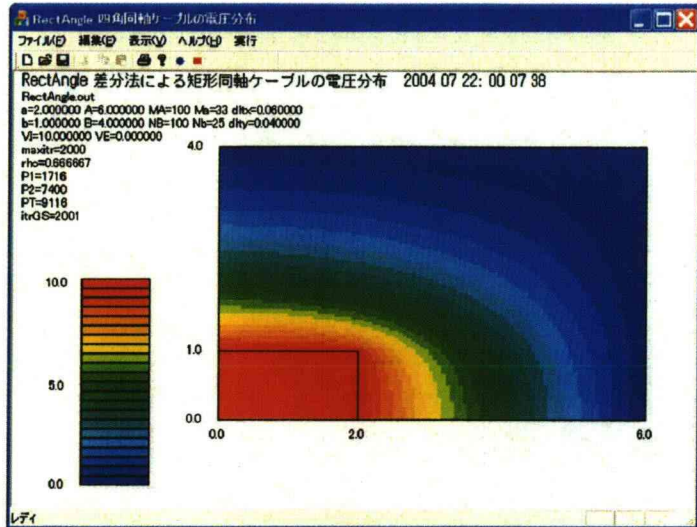


図10 長方形断面電位

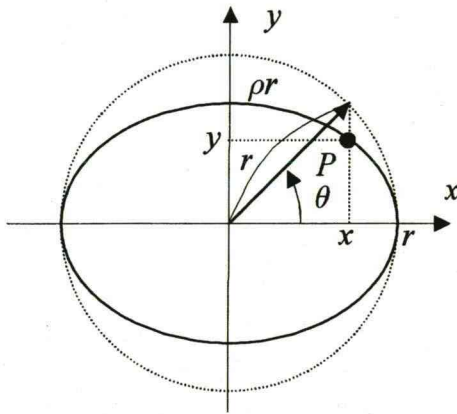


図8 直交座標と楕円座標

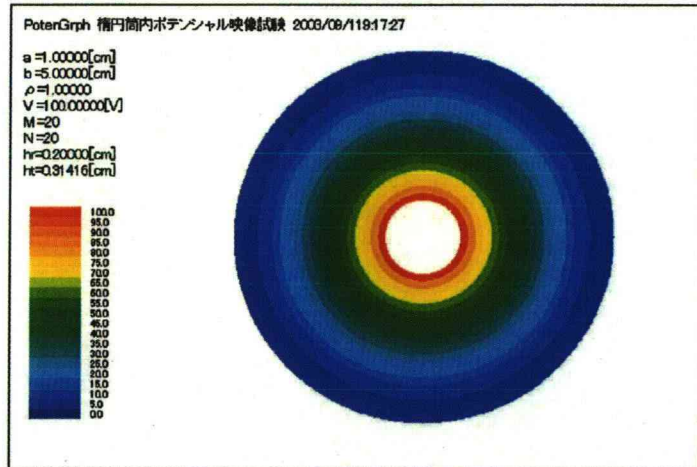


図11 円断面電位  $M = 20, N = 20, \rho = 1.0$

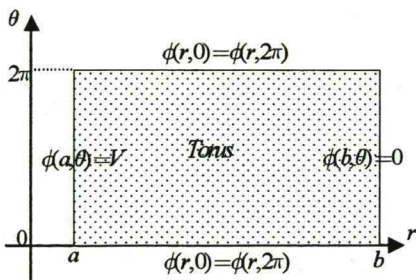


図9 楕円座標での境界条件の表示

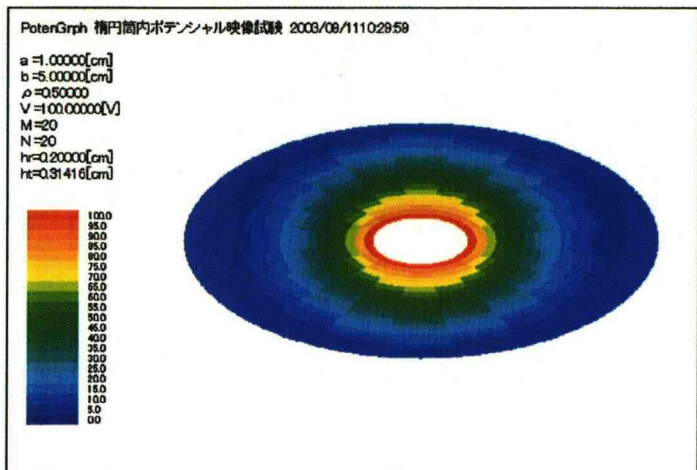


図12 楕円断面電位  $M = 20, N = 20, \rho = 0.5$