

FIR 型狭帯域フィルタによる微分フィルタ

立花 康夫、河合 敏勝

神奈川工科大学情報学部情報メディア学科

On a Differential Filter using the FIR narrow Band Filters

Yasuo TACHIBANA, Toshikatsu KAWAI

Abstract The signal processing of FFT for the sequence weighted by the extended Hanning window is equivalent to many narrow band FIR filters with different center frequencies. In this paper we propose a design method of the low pass differential filters with several orders from zero to the adequate value by the liner combination of these narrow band filters. The proposed method is a modifying one of the Remez's algorithm by the Penrose generalized inverse. It is shown that we obtain the Chebyshev approximation filter by the proposed method. Some numerical examples are presented.

1. まえがき

ディジタルフィルタは DSP 等の専用プロセッサの高性能化により通信システムやディジタル TV をはじめとするディジタル家電の中で有効に用いられている。一方において制御系の問題では連続系を表す伝達関数の推定にもディジタル微分フィルタが用いられている[1]。これは本来が連続系のシステム推定をディジタル信号処理により達成する方法である[2]。特に地震活動等における潮汐の解析などでは非常に長周期の成分から比較的短周期の成分を含む概周期関数を扱う必要がある[3]。我々は伝達関数をディジタル信号処理により推定するための各種の微分フィルタの構成について検討してきた[4]~[8]。長周期の成分を含む信号を基に伝達関数を推定するために、我々は同じ位相特性でかつ同じ低域特性の 0 階から 10 階程度までの微分フィルタを必要とする。この論文では新たな FIR 型の微分フィルタの設計について提案する。

FIR 型の内、特に線形位相特性のディジタルフィルタを構成する方法は古くより各種提案されてきた。理想特性を Chebyshev 近似する Remez のアルゴリズムに基づく McClellan のプログラムはその古典的な頂点を示すものである[9]。この方法は以後多くの改良が加えられて我々の FIR フィルタ設計の最重要なツールとなっている[10]。しかし、フィルタの次数が 500 を超えるような高次となると、係数の数から考えてこの様なフィルタ係数を独立に求める設計法は、それを実装する上でも好ましくない。線形位相特性 FIR フィルタの設計法の他の一つとして現在より有限個過去までの信号に Window を掛け有限 Fourier 変換を施し各成分が狭帯域フィルタを成すので、それを適当に加えて所定の特性を近似するものがある。Rabiner 等によりとられた方法で Kaiser, Hanning, Hamming 等の Window が用いられている[11],[12]。この際、

Window[13]により各 Fourier 成分のサイドローブが抑えられ、かつ隣同士の重なりが少なくなるように配慮されている。これで得られるフィルタはもちろん理想特性を Chebyshev 近似しているわけではない。

本論分では Hanning の Window を拡張し Fourier 成分のサイドローブを極端に圧縮した狭帯域フィルタを作る。この狭帯域フィルタはほぼ三角形のブロック状の振幅特性を示す。そこで、この狭帯域フィルタをいくつか選びそれらの線形結合により低域微分フィルタを構成し所定の特性を満たすようにする。狭帯域フィルタの線形結合係数を求めるに際しては、Penrose の一般化逆行列解を用いて、常に確定した解が得られるように配慮している。この解を出発点にして Remez アルゴリズム[14]と同じステップを踏むことにより Chebyshev 解を近似する結果が得られることを示す。

提案手法により次数が 100、階数が 0,1,2,3,4 階の Chebyshev 近似低域微分フィルタの設計例を示す。

2. 狭帯域フィルタ

N は 2 以上の整数として、2 つの N 次の FIR 型フィルタ

$$f(z, a) = \frac{1}{\delta_c} \sum_{n=0}^N z^{-n} \cos\left\{\left(n - \frac{N}{2}\right)a\right\} \sin^M\left(\frac{n\pi}{N}\right) \quad (1)$$

$$g(z, a) = \frac{1}{\delta_s} \sum_{n=0}^N z^{-n} \sin\left\{\left(n - \frac{N}{2}\right)a\right\} \sin^M\left(\frac{n\pi}{N}\right) \quad (2)$$

を考える。ここで、 M は 0 以上の偶数、 a は $0 \leq a \leq \pi$ の実数で δ_c と δ_s は

$$f(e^{ja}, a) = \exp(-jNa/2) \quad (3)$$

$$g(e^{ja}, a) = j \exp(-jNa/2) \quad (4)$$

となるように定める。具体的な値は後に決まる。ここで $P(z, a) = \delta_c \cdot f(z, a) + j\delta_s \cdot g(z, a)$ とすれば、

$$P(z, a) = \exp\{-j(Na/2)\} \cdot \sum_{n=0}^N z^{-n} e^{jna} \sin^M(n\pi/N) \quad (5)$$

であるから、特に a を

$$a = 2\pi\ell/N \quad (\ell = 0, 1, \dots, N/2) \quad (6)$$

のように選んだとすれば、式(1)と式(2)のフィルタは、現在より過去 N 個のサンプルデータに Window として $\sin^M(n\pi/N)$ を掛けて有限 Fourier 変換した値の実数部と虚数部から得られる ($N+1$ が 2 の冪なら FFT により計算できる)。使用した Window において特に $M=2$ とすると、

$$\sin^2(n\pi/N) = [1 + \cos\{(n - N/2)2\pi/N\}]/2 \quad (7)$$

となり、これは Hanning の Window である。すなわち、この論文で用いる Window は Hanning の Window の拡張と考えられる [13]。フィルタ $f(z, a), g(z, a)$ の周波数特性は $z = e^{j\theta}$ と置いて

$$f(e^{j\theta}, a) = \varphi(\theta, a) \exp(-jN\theta/2) \quad (8)$$

$$g(e^{j\theta}, a) = j\psi(\theta, a) \exp(-jN\theta/2) \quad (9)$$

と表される。関数 $\varphi(\theta, a), \psi(\theta, a)$ は θ の実関数であり、具体的には、

$$\varphi(\theta, a) = \frac{1}{2^{M+1}\delta_c} \sum_{m=0}^M {}_M C_m \{\sigma_m(\theta+a) + \sigma_m(\theta-a)\} \quad (10)$$

$$\psi(\theta, a) = \frac{1}{2^{M+1}\delta_s} \sum_{m=0}^M {}_M C_m \{\sigma_m(\theta+a) - \sigma_m(\theta-a)\} \quad (11)$$

で与えられる。ここで ${}_M C_k$ は M 個の中から k 個を取り出す組み合わせの数であり、

$$\sigma_m(\theta) = \sin\{N(\theta + \mu_m)/2\} / \sin\{(\theta + \mu_m)/2\} \quad (12)$$

$$\mu_m = (2m - M)\pi/(N-1) \quad (m = 0, 1, \dots, M) \quad (13)$$

である。明らかに $\mu_{M-m} = -\mu_m$ ($m = 0, 1, \dots, M$) が成り立つ。式(10)と(11)から

$$\delta_c = \frac{1}{2^{M+1}} \sum_{m=0}^M {}_M C_m \{\sigma_m(2a) + \sigma_m(0)\} \quad (14)$$

$$\delta_s = \frac{1}{2^{M+1}} \sum_{m=0}^M {}_M C_m \{\sigma_m(2a) - \sigma_m(0)\} \quad (15)$$

となる。明らかに $\varphi(\theta, a)$ は偶関数、 $\psi(\theta, a)$ は奇関数であり、共に周期は 2π である。それぞれの形状を $|\theta| \leq \pi$ でいくつかの a に対して描くと図 1 と図 2 のようになる。 $\varphi(\theta, a)$ は a が 0 に近い所では単峰であるが a が増大すると双峰となる。 M が増大するとサイドローブは著しく小さくなる。数値計算的には $\theta > a$ での最初の零点を $\theta_c = a + \Delta\theta_c$ とすると、

$$\Delta\theta_c \approx (M+2)\pi/N \quad (16)$$

であり、 $\theta > \theta_c$ での最大サイドローブの値を ε_c とすると、

$$\varepsilon_c \approx 0.21/2.36^M \quad (17)$$

である。双峰の場合には $\theta < a$ でも様子は同様である。また $\psi(\theta, a)$ は必ず $\psi(0, a) = 0$ で、符号が異なる双峰である。 $\theta > 0$ での様相は $\varphi(\theta, a)$ とほぼ同じような性質を示す。これらの特性からフィルタ $f(z, a)$ は偶数階の微分フィルタの合成に、 $g(z, a)$ は奇数階の微分フィルタの合成に供

せられるべきであることがわかる。

3. 理想特性

0 以上の整数 r に対して、我々は理想 r 階微分フィルタの周波数特性を、

$$J_{r,\beta}(\theta) = \begin{cases} I_{r,\beta}(\theta) \exp(-jN\theta/2) & r: \text{even} \\ jI_{r,\beta}(\theta) \exp(-jN\theta/2) & r: \text{odd} \end{cases} \quad (18)$$

とする。ここで、 $I_{r,\beta}(\theta)$ は $|\theta| \leq \beta\pi$ ($0 < \beta \leq 1$) を通過帯域として

$$I_{r,\beta}(\theta) = \begin{cases} (-1)^{r_H} \theta^{r_H} & |\theta| \leq \beta\pi \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (19)$$

である。ここで、 r_H は r が偶数なら $r_H = r/2$ で、 r が奇数なら $r_H = (r-1)/2$ である。我々の最終の目的は微分フィルタを伝達関数のパラメータ推定に用いることである。高々 $r_{\max} (\geq 0)$ 次の伝達関数を推定する場合には、位相と通過帯域の揃った $0 \sim r_{\max}$ 階の微分フィルタが必要となる [6]。作成したフィルタの振幅特性を $u(\theta)$ として、近似誤差を

$$e_r(\theta; u, I_{r,\beta}) = u(\theta) - I_{r,\beta}(\theta) \quad |\theta| \leq \pi \quad (20)$$

とする。

4. 提案微分フィルタ

最初に r が偶数の場合を考える。 L は 1 以上の整数として L 個の点、

$$0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_L \leq \beta\pi \quad (21)$$

を考える。この L 個の点を用いてフィルタ

$$F(z) = \sum_{k=1}^L c_k f(z, a_k) \quad (22)$$

を構成する。このフィルタ $F(z)$ の周波数特性は

$$F(e^{j\theta}) = p(\theta) \exp(-jN\theta/2) \quad (23)$$

と表される。ここで、

$$p(\theta) = \sum_{k=1}^L c_k \varphi(\theta, a_k) \quad (24)$$

である。 $p(\theta)$ により $I_{r,\beta}(\theta)$ を近似する。次に、 $L+1$ 個の評価点

$$0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_L \leq \beta\pi \quad (25)$$

を考える。これらの点で $p(\theta)$ は $\ell = 0, 1, \dots, L$ に対して、次の方程式を満たすとする。

$$p(\theta_\ell) - I_{r,\beta}(\theta_\ell) = (-1)^{\ell+r_H} \lambda \theta_\ell^{r_H} \quad (26)$$

ここで λ は未知のパラメータである。式(26)は理想特性に幅 $\lambda\theta^r$ を考え、その範囲に特性が入るように考えている。式(26)を行列とベクトルを用いて表すと

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (27)$$

となる。ここで \mathbf{A} は $(L+1) \times (L+1)$ 行列、 \mathbf{b} は $(L+1) \times 1$ ベクトル(列ベクトル)、 \mathbf{c} は $(L+1) \times 1$ ベクトルである。具体的には

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varphi(\theta_0, a_1) & \cdots & \varphi(\theta_0, a_L) & (-1)^{r_H} \theta_0^r \\ \varphi(\theta_1, a_1) & \cdots & \varphi(\theta_1, a_L) & (-1)^{1+r_H} \theta_1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi(\theta_L, a_1) & \cdots & \varphi(\theta_L, a_L) & (-1)^{L+r_H} \theta_L^r \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_L \ -\lambda]^T \quad (29)$$

$$\mathbf{b} = [I_{r,\beta}(\theta_0) \ I_{r,\beta}(\theta_1) \ \cdots \ I_{r,\beta}(\theta_L)]^T \quad (30)$$

である。右肩の T は行列やベクトルの転置を表す。ところで \mathbf{A} が正則でないとき式(27)の解は存在しない。 \mathbf{A} が正則であることを一般に証明するのは困難である(Haar の条件)。しかし、我々は少し条件を緩めて最小二乗解、すなわち

$$\|\mathbf{Ac} - \mathbf{b}\|^2 \rightarrow \min \quad (31)$$

となる解は、 $\text{rank}(\mathbf{A}) < L+1$ でも常に存在する。具体的に、 \mathbf{A} の Penrose の一般化逆行列 \mathbf{A}^+ により

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (32)$$

のように得られる。 \mathbf{A} が正則なら、この値は $\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ となる。我々の方程式は最小二乗解であれば常に解ける。しかし、数値計算的に検討すると、これは杞憂であることが多い。すなわち、実際の場合、 $\varphi(\theta, a)$ は θ が $|\theta - a| > \Delta\theta_c$ では殆ど 0 に近い値となる。そのため、 θ_k を a_k の近傍に設定すると行列 \mathbf{A} では対角線を中心にして帯状に 0 でない値が並んだ構造となり $\text{rank}(\mathbf{A}) = L+1$ となり方程式(27)は解けることになる。しかし、一般的な議論としては式(32)を解としなければならない。

r が奇数の場合も殆ど同じように構成できる。 L の選定は r が偶数の場合と同じである。 L 個の点は

$$0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_L \leq \beta\pi \quad (33)$$

のように選ぶ。フィルタ

$$G(z) = \sum_{k=1}^L d_k g(z, b_k) \quad (34)$$

により $I_{r,\beta}(\theta)$ を近似する。 $G(z)$ の周波数特性は

$$G(e^{j\theta}) = j\varphi(\theta) \exp(-jN\theta/2) \quad (35)$$

と表される。ここで、

$$q(\theta) = \sum_{k=1}^L d_k \psi(\theta, b_k) \quad (36)$$

である。評価する点は

$$0 < \theta'_0 < \theta'_1 < \cdots < \theta'_L \leq \beta\pi \quad (37)$$

とする。評価点で $\ell = 0, 1, \dots, L$ に対して

$$q(\theta'_\ell) - I_{r,\beta}(\theta'_\ell) = (-1)^{\ell+r_H} \lambda \theta_\ell^r \quad (38)$$

のように定める。式(38)も式(27)と同じように表される。 r が奇数の場合にも、偶数の時と同様最小二乗解が常に存在する。

5. 修正 Remez 法による Chebyshev 近似

4 節で得られたフィルタの振幅特性は理想特性を Chebyshev 近似するものではない。本論分の主題である、Chebyshev 近似のステップについて述べる。最良一様近似を達成するには、よく知られた以下に示す Remez のアルゴリズムを用いる[14]。

1° 方程式(27)を解く。

2° $e_r(\theta; p, I_{r,\beta})$ は点 $\theta_k (k = 0, 1, \dots, L)$ で交互に符号が変化するから $(\theta_{k-1}, \theta_k) (k = 1, 2, \dots, L)$ にゼロ点が存在する。それを z_k とする。さらに $z_0 = 0, z_{L+1} = \beta\pi$ と置く。

3° 区間 $(z_k, z_{k+1}) (k = 0, 1, \dots, L)$ には θ_k が含まれている。 $e_r(\theta_k; p, I_{r,\beta})$ が正なら区間 $[z_k, z_{k+1}]$ で $e_r(\theta; p, I_{r,\beta})$ が最大となる。最大となる θ を y_k とする。 $e_r(\theta_k; p, I_{r,\beta})$ が負なら区間 $[z_k, z_{k+1}]$ で $e_r(\theta; p, I_{r,\beta})$ が最小となる θ を y_k とする。

4° 区間 $[0, \beta\pi]$ で $|e_r(\theta; p, I_{r,\beta})|$ が最大となる θ を y_{\max} とする。数列 $y_0 \sim y_L$ の中へ y_{\max} を加え、同時に一つ取り除き新たな数列 $y'_0 \sim y'_L$ を作成し $e_r(y'_k; p, I_{r,\beta}) (k = 0, 1, \dots, L)$ が交互に符号を変え、しかも $k = 0, 1, \dots, L$ に対して

$$|e_r(y'_k; p, I_{r,\beta})| \geq |e_r(y_k; p, I_{r,\beta})| \quad (39)$$

となるようにする。

5° 得られた数列 y'_k に対して $\theta_k = y'_k (k = 0, 1, \dots, L)$ とする。

6° ある繰り返しでの y_{\max} と λ に対して、次の繰り返しでの値を y'_{\max} と λ' とし、以下の 2 条件

$$\text{rank}(\mathbf{A}) < L+1 \quad (40)$$

$$\|y'_{\max} - |y_{\max}|\| < e_R \quad \text{and} \quad |\lambda - \lambda'| < e_R \quad (41)$$

のいずれかが成立したらアルゴリズムを停止する。そうでなければ、1° に戻る。

方程式(27)の解法は Remez アルゴリズムの第 1 ステップである。式(25)のような任意の数列に対して行列 \mathbf{A} の第 $L+1$ 列目を取り除いた行列の rank が常に L (従って $\text{rank}(\mathbf{A}) = L+1$ が直ちに得られる)である場合 Haar の条件を満たすという[14]。Haar の条件が成立すれば、ここで述べた Remez のアルゴリズムは常に継続でき、その k_{thr} ステップで得られる係数 $\mathbf{c}^{(k_{\text{thr}})}$ は収束し、それが Chebyshev 解を与える。我々の場合では Haar の条件を満たすことの証明はされていない。しかし数値的には先に述べたように殆どの場合 $\text{rank}(\mathbf{A}) = L+1$ が満たされる。これが満たされる限り Remez のアルゴリズムを進めることができる。提案手法の場合、最小二乗解を用いているから、係数 $\mathbf{c}^{(k_{\text{thr}})}$ は常に得られる。一般化逆行列

の計算の過程で $\text{rank}(\mathbf{A}) = L+1$ の成立が判別されるので、得られた $\mathbf{c}^{(k_{ir})}$ の出生の内容を知ることができる。この点は式(40)としてアルゴリズムの中に組み込まれている。Remez のアルゴリズムが進行する限り評価区間での最大誤差絶対値 $|y_{\max}|$ と $|\lambda|$ の値は互いに近づいてゆく。それらの値の前ステップとの差が所定の値 e_R 以下になれば終了させる。これが、式(41)としてアルゴリズムに組み込まれている。

6. 設計例

通過帯域は $\beta = 0.2$ で $r = 0, 1, 2, 3, 4$ の場合の微分フィルタの設計例を示す。 $N = 100$, $M = 20$, $L = 7$ とすると、遷移域巾は式(16)より、ほぼ $\Delta\theta_c = (20+2)\pi/100 = 0.22\pi$ となる。さらに、
 $a_k = b_k = 0.01 + 0.19 \cdot (2k-1)/2/L$ ($k = 1, \dots, L$) (42)
 $\theta_i = \theta'_i = 0.01 + 0.19i/L$ ($i = 0, 1, \dots, L$) (43)
とする。これらの設定のとき、提案手法で計算した係数 \mathbf{c} を表 1 に、近似特性と $|e_r| \cdot I_{0,\beta}$ を図 3~図 12 に示す。いずれの場合も繰り返しの間 $\text{rank}(\mathbf{A}) = L+1$ であった。例えば、 $r = 1$ の場合、 $e_R = 10^{-10}$ とすると、 $k_{ir} = 11$ で終了し、約 60 秒の計算時間を要した。(1.6GHz の Intel Celeron CPU 内臓 Windows XP パソコン)。

7. まとめ

本論分では拡張した Hanning の Window を施した Fourier 成分からなる狭帯域フィルタをいくつか選びその線形結合による低域微分フィルタの構成を提案した。線形結合の係数は、Penrose の一般化逆行列解(最小二乗解)を用いて、常に確定した解が得られるように配慮した。この解を出発点にして Remez アルゴリズムと同じステップを踏むことにより Chebyshev 解を近似する結果が得られることを示した。提案手法により次数が $N = 100$ で階数が $r = 0, 1, 2, 3, 4$ の Chebyshev 近似微分フィルタの設計例を与え、手法の妥当性と有効性を示した。

References

- [1] S.Sagara, Z.J. Yang and K.Wada, "Identification of continuous systems using digital low-pass filters", Int. J. System Sci., Vol.22, No.3, pp.1159-1176, 1991
- [2] R.Johansson, "Identification of Continuous-Time Models", IEEE Trans. on signal processing, Vol.42, No.4, April 1994
- [3] 横田崇、立花康夫、香取和之、川崎晶二、"気象庁納め地震活動等総合監視システム"、三菱電機技報, Vol.63, No.9, pp.744-747, 1989.9
- [4] 立花康夫、"ディジタルフィルタを用いた同定"、計測自動制御学会論文集 Vol.9, No.4, pp.438-445, 1973.8
- [5] 立花康夫、"カスケードディジタル微分フィルタによる伝達関数の推定"、電子通信学会論文誌 Vol.58-D, No.9, pp.546-553, 1975.9

- [6] 立花康夫、真庭久和、亀田洋志、近藤倫正、"巡回型狭帯域フィルタによる微分フィルタの最適設計"、電子情報通信学会論文誌 A, Vol.J78-A, No.5, pp.554-561, 1995.5
- [7] Y. Tachibana, and Y. Suzuki, "Parameters and system order estimation using differential filters and resultant", IEICE Trans. Fundamentals, vol. E82-A, no.9, pp.1900-1910, Sept.1999
- [8] 立花康夫、河合敏勝、山本達夫、"B-Spline 関数による微分信号の抽出と伝達関数推定"、電子情報通信学会論文誌 A, Vol.J84-A, No.7, pp.901-910, 2001.7
- [9] J.H.McClellan, T.W.Parks and L.R.Rabiner, "A Computer Program for Digital Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters", IEEE Trans. Vol.AU-21, No.6, pp.506-526, Dec. 1973
- [10] J.H.McClellan, T.W.Parks, "A Personal History of the Parks-McClellan Algorithm", IEEE Signal Processing Magazine, pp.82-86, march, 2005
- [11] Rabiner L.R., Schafer R.W., "On the Behavior of Minimax Relative Error FIR Digital Differentiators", Bell Syst. Tech. J., 53, 2, pp.333-361, Feb. 1974
- [12] N.K.Bose, "Digital Filters", North-Holland, 1985
- [13] J.W.Adams, "A New Optimal Window", IEEE Trans. of Signal Processing, Vol.39, No.8, pp.1753-1769, 1991.8
- [14] E.W.Cheney, "Introduction to Approximation Theory", McGraw-Hill, 1966

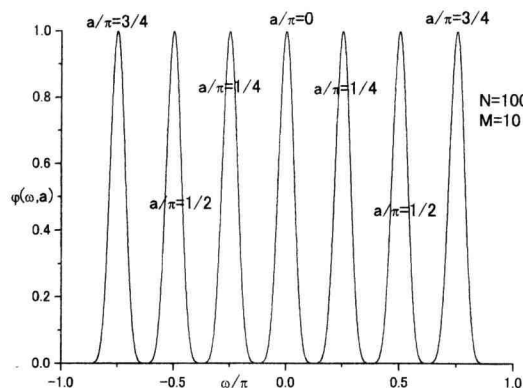


図 1 $\phi(\theta, a)$ の形状

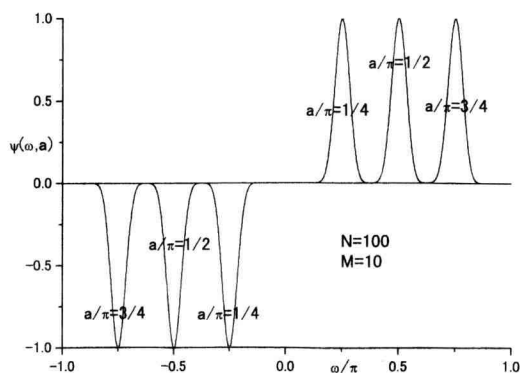
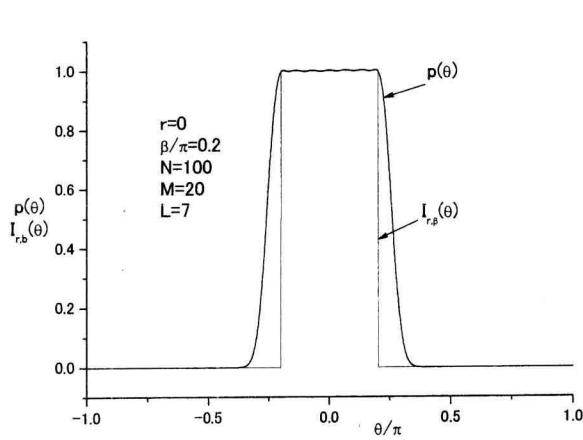
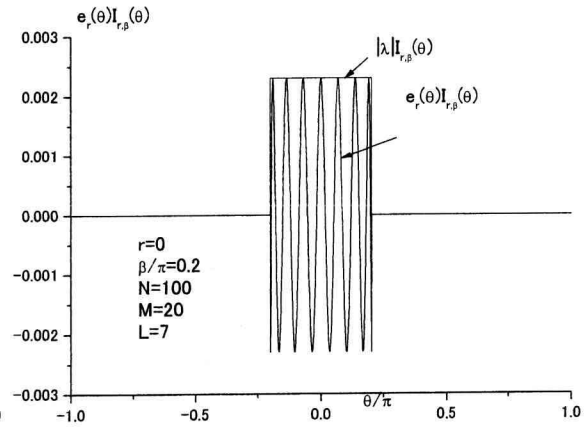
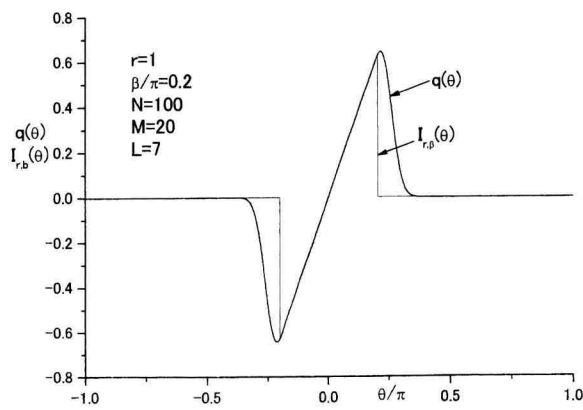
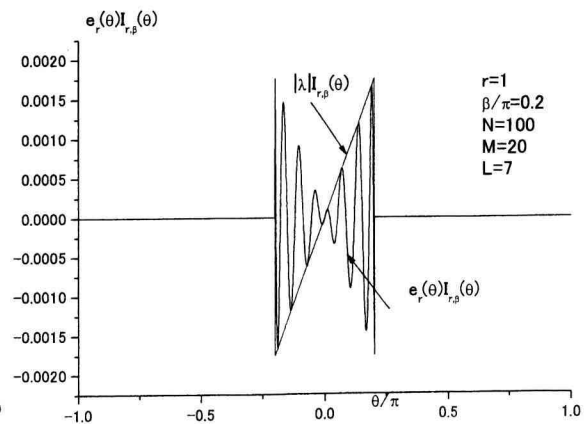
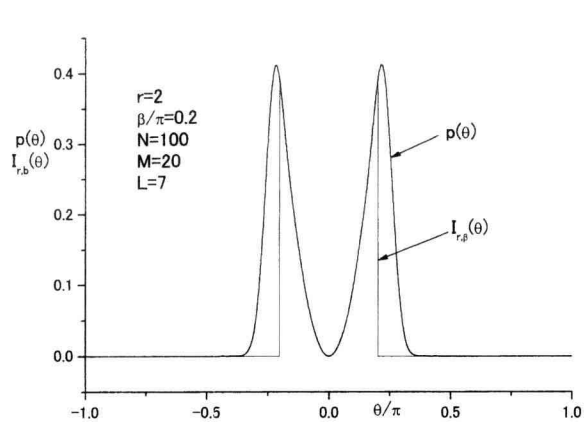
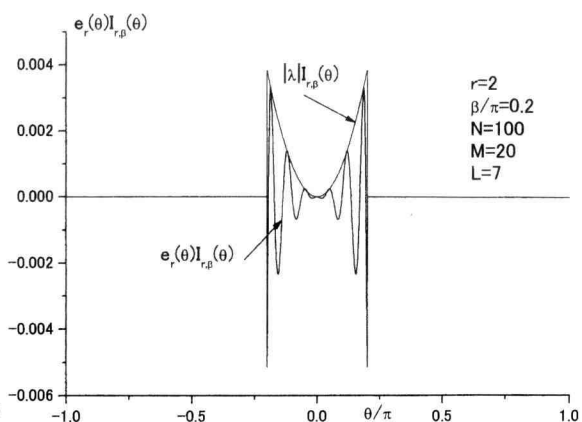
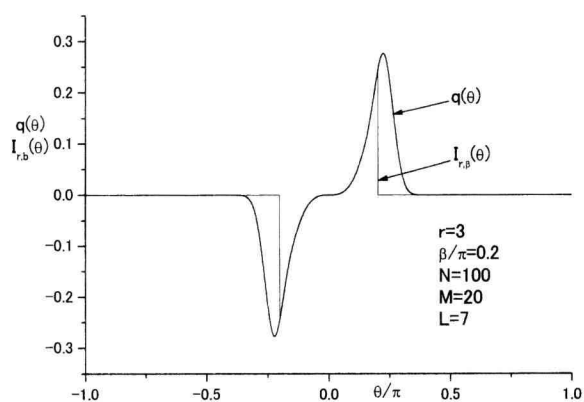
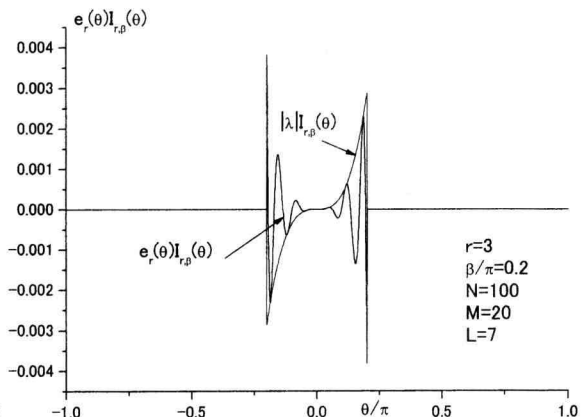
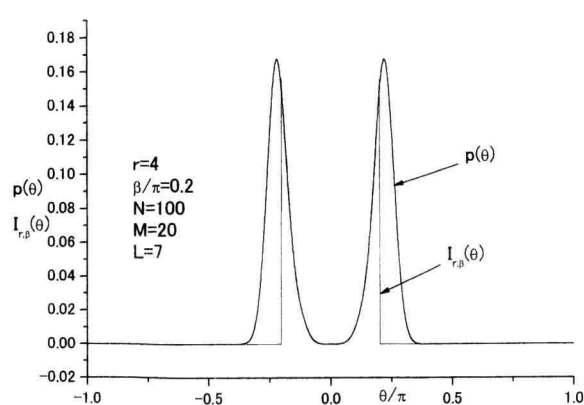
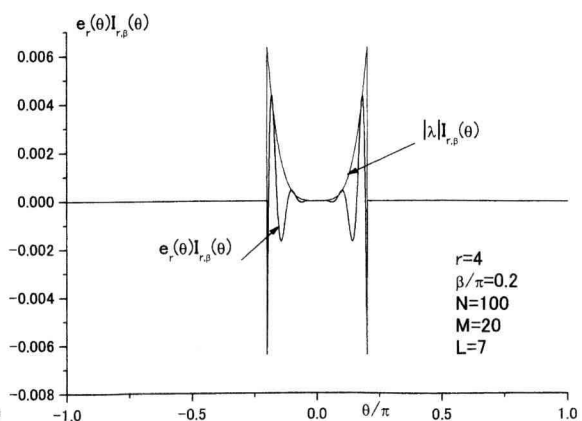


図 2 $\psi(\theta, a)$ の形状

表 1 係数 c_k, d_k, λ

	$r \rightarrow$	0	1	2	3	4
k	a_k	c_k	d_k	c_k	d_k	c_k
1	0.02357	5.10641	5.75281	1.36641	1.92153	0.39066
2	0.05071	-8.86851	-20.10667	-2.90018	-6.89415	-0.84323
3	0.07786	13.99828	24.49709	4.68019	8.69730	1.41605
4	0.10500	-15.75104	-22.07450	-5.84555	-8.31725	-1.89397
5	0.13214	14.27166	16.38709	5.66062	6.54759	1.96929
6	0.15929	-8.75368	-9.01715	-3.89336	-3.92098	-1.50453
7	0.18643	3.76332	3.33879	1.75769	1.51766	0.72069
	λ	0.00230	-0.00175	-0.00378	-0.00282	-0.00637

図 3 $p(\theta), I_{r,\beta}(\theta)$ for $r=0$ 図 4 $e_r(\theta)I_{0,\beta}(\theta)$ for $r=0$ 図 5 $q(\theta), I_{r,\beta}(\theta)$ for $r=1$ 図 6 $e_r(\theta)I_{0,\beta}(\theta)$ for $r=1$

図 7 $p(\theta), I_{r,\beta}(\theta)$ for $r=2$ 図 8 $e_r(\theta)I_{r,\beta}(\theta)$ for $r=2$ 図 9 $q(\theta), I_{r,\beta}(\theta)$ for $r=3$ 図 10 $e_r(\theta)I_{r,\beta}(\theta)$ for $r=3$ 図 11 $p(\theta), I_{r,\beta}(\theta)$ for $r=4$ 図 12 $e_r(\theta)I_{r,\beta}(\theta)$ for $r=4$