[研究論文] ３ＤＣＧアニメーションにおけるクロスシミュレーションアルゴリズムの数理的な厳密化

服部元史[1]・朝倉 涼[2]

1 神奈川工科大学情報メディア学科
2 多摩美術大学情報デザイン学科

Mathematically Rigorous Formulation of Cloth Simulation Algorithm in 3DCG Animation

Motofumi HATTORI[1)]・Ryo ASAKURA[2)]

Abstract

In order to animate cloths in 3DCG (cloth simulation methods about 3DCG animation), a cloth is modeled by a 2-dimensional surface in 3-dimensional Euclideanspace, and the motion is simulated based on the Newton's dynamics equation of the surface. In this paper, the dimension of the surface will be generalized. The authors derived the Newtonian dynamics equation of m-dimensional surface(manifold) in n-dimensional Euclidean space. In many cloth simulation methods about 3DCG animation, surfaces are modeled by finite material particles. The authors proposed a method to derive the Newtonian dynamics equation of the continuum surface model based on the variational principles.

Key Words : Cloth simulation, Variational principle, Evolution equation, Distributed parameter system, Computer Art

1 はじめに

３ＤＣＧにて「布」のアニメーションを表示するための物理シミュレーションにおいて、布は、３次元空間 $\mathbf{R}^3$ 内の２次元の曲面としてモデル化される。つまり、$\mathbf{R}^2$ 内の連結で有界な閉集合 Q から３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ への関数

$$r : Q \to \mathbf{R}^3 \tag{1}$$

としてモデル化される事が多い。ここでは $q \in Q$ に対して３次元ベクトル $r(q)$ の x 座標・y 座標・z 座標の値の成分表示を

$$\begin{aligned} r(q) &= (r_x(q), r_y(q), r_z(q)) \qquad (2)\\ &= (r_i(q); i \to x, y, z) \qquad (3) \end{aligned}$$

のように表わすものとする。曲面の曲率が定義できるために、曲面を表わす関数 r が２階微分可能である事を仮定する。

このように ３次元空間内の２次元の曲面として布はモデル化されるが、布の３ＤＣＧアニメーションを制作するには、布の運動をシミュレーションするためのニュートン力学の運動方程式を導く必要がある。この運動方程式を導くにあたって、連続体としての曲面を力学的に考察し、偏微分方程式（無限次元の関数空間上の発展方程式）として導出した先行研究は見当たらない。

Baraff 達の先行研究 [1] [2] や これらの文献で引用されている先行研究では、曲面を有限個のポリゴンに分割し、有限個の質点系として定式化された近似モデルに対して有限次元のユークリッド空間上の発展方程式として運動方程式を導出している。つまり 曲面を有限個のポリゴンに分割したときの頂点の個数を K 個とすると、K 個の質点から構成される質点系に対して、$\mathbf{R}^{3K}$ 上の発展方程式として運動方程式を導出し

ている。それらの研究では、変形する以前の布の形状（布の型紙の形状）と変形後の布の形状との間の距離を表現するような (a) 伸びに関するポテンシャル・(b) 剪断 (ずれ)[3] に関するポテンシャル・(c) 曲げに関するポテンシャル の (a) (b) (c) それぞれを小さくするように布の内力が働くという知見に基づいて運動方程式が導出されている。

布は外部から如何なる力も受けない時には型紙の形状 (曲面の安定な形状) に戻る。布に重力が働いたり 布と物体との衝突によって布に抗力が加わるような場合でも、型紙の形状に戻ろうとする力が布の内部で生じているという知見が、上記の先行研究において基本的な原理と成っている。

それらの先行研究において、

- (a) 曲げに関するポテンシャルの定義は、隣り合う２つのポリゴン面の成す角度の変形前と変形後との違いの総和で与えられている。
- (b) 伸びに関するポテンシャルの定義は、変形前と変形後とのポリゴンの各辺の長さの違いの総和として与えられている。
- (c) 剪断 (ずれ) に関するポテンシャルの定義は、ポリゴンの頂点を共有する２つの辺が成す角度の 変形前と変形後との違いの総和で与えられ、それらの２辺をベクトルと見做したときの２つのベクトルの内積の変形前と変形後との違いの総和で近似されている。

布の形状が型紙の形状と一致して 最も安定な形状を取る時に、上記 (a) (b) (c) の３種類の質点系のポテンシャルは 最小値 0 を取る。布の形状が型紙の形状から離れて 不安定に成れば成るほど、上記 (a) (b) (c) の３種類の質点系のポテンシャルは正の大きな値を取る事になる。このようにして (a) (b) (c) の３種類のポテンシャルが 0 に向けて減少するように布の中で内力が働く事になる。そのような内力と外力 (重力と抗力との和) との釣り合いを考慮しながら質点系の運動エネルギーと併せてラグランジュの解析力学の原理を適用する事によって 、有限個の質点系に対する 有限次元の運動方程式を導いているのが、上記の先行研究である。

ここで分割するポリゴンの大きさを無限に小さくして行って、頂点の個数を無限に多くして行く極限を考察すると、上記の有限次元の運動方程式は無限次元の運動方程式（偏微分方程式としての運動方程式）に収束して行くと考えられる。そのような (有限次元近似されていない) 連続体としての曲面に対して運動方程式を導く事は、理論的には大きな意義を有している。また 数式で表現された曲面を Surface とする３Ｄオブジェクト（ポリゴン分割に頼らない方式の Surface を有する３Ｄオブジェクト）の変形を表現する 3DCG アニメーションのための数値シミュレーションを数理的に導出するという応用上の観点からも重要である。

このような観点から、連続体としての曲面に関して (A) 曲げに関するポテンシャル・(B) 伸びに関するポテンシャル・(C) 剪断 (ずれ) に関するポテンシャルの定義を、次のように提案する。

- (A) 曲げに関するポテンシャルの定義は、曲面の曲率の 変形前と変形後との違いを曲面全体に渡って積分した量で与えられる。
- (B) 伸びに関するポテンシャルの定義は、曲面の接ベクトルの長さの 変形前と変形後との違いを曲面全体に渡って積分した量で与えられる。
- (C) 剪断 (ずれ) に関するポテンシャルの定義は、曲面の q_1 方向の接ベクトルと q_2 方向の接ベクトルとの内積の変形前と変形後との違いを 曲面全体に渡って積分した量で与えられる。

このように、(A) 曲げに関するポテンシャル・(B) 伸びに関するポテンシャル・(C) 剪断 (ずれ) に関するポテンシャルを、３次元空間内の２次元の曲面

$$r : \mathbf{R}^2 \supset Q \to \mathbf{R}^3 \tag{4}$$

に対して定式化する事ができる。

更に Computer Art における物理シミュレーションの役割は、この世に有る現象を再現するためだけでなく、この世に無い新しい現象を創り出

す事も求められつつある。近年の Computer Art の潮流として、３ＤＣＧ制作において３次元空間に収まりきらない４次元以上の高次元の図形も積極的に活用しようとする試みもある [4][5][6]。

そこで本論文では、空間の次元を一般化し、n 次元ユークリッド空間内の m 次元の曲面を関数 r が表現している場合を考える。m 次元のユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ 内の連結で有界な閉集合 Q から n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ への２階微分可能な関数

$$r : Q \to \mathbf{R}^n \tag{5}$$

は、n 次元ユークリッド空間内の m 次元の曲面 (多様体) を表現している。このような一般次元の曲面 (多様体) に対して上記の (A) (B) (C) のポテンシャルを考察具体的にする事でその変形運動を記述する運動方程式を導く事にする。

$m = 2$, $n = 3$ とした３次元ユークリッド空間内の２次元の曲面を例として包含しながらも、一般次元の曲面 (多様体) のアニメーションに対して定式化を進める事になる。この場合には、式 (2)(3) の n 次元ベクトル $r(q)$ の成分表示は

$$\begin{aligned} r(q) &= (r_1(q), r_2(q), \cdots, r_n(q)) && (6)\\ &= (r_i(q); i \to 1, 2, \cdots, n) && (7) \end{aligned}$$

のように考える。また $q \in Q$ に対して m 次元ベクトル q の成分表示を

$$q = (q_1, q_2, \cdots, q_m) \tag{8}$$

で表わす事にする。

そこで本研究では、布を例として含む一般次元の曲面の、連続体としての運動方程式を、関数空間 $L^2(Q, \mathbf{R}^n)$ 上の発展方程式として導く。

2 曲面の内力を産み出すポテンシャル

布の型紙の形状に相当する 曲面にとって最も安定な形状を、著者達の先行研究 [7][8] にならって 曲面の安定形状と呼び、

$$s : Q \to \mathbf{R}^n \tag{9}$$

で表す。Q におけるパラメータを s の弧長とする事によって、各座標軸方向の接ベクトルの長さを１とし、それらが互いに直交するものとして良い [9]。

曲面の形状 r が安定形状 s に一致する時、ポテンシャル (A) (B) (C) は 最小値 0 を取る。曲面の形状 r が安定形状 s から離れれば離れるほど、ポテンシャル (A) (B) (C) は 正の大きな値を取る。

このようなポテンシャル (A) (B) (C) は、３節・４節・５節で示すような考察によって具体的に導かれる。また これらのポテンシャル (A) (B) (C) が最小値 0 に向けて減少するように働く曲面の内力は、それぞれのポテンシャルの関数空間 $L^2(Q, \mathbf{R}^n)$ におけるフレッシェ微分によって、３節・４節・５節で示されるように求められる。

ポテンシャルのフレッシェ微分を求めるためには、まず、２階のソボレフ空間 $H^2(Q, \mathbf{R}^n)$ の要素でコンパクトな support を有する関数全体からなる関数空間 $H_0^2(Q, \mathbf{R}^n)$ の要素である任意の関数 $h : Q \to \mathbf{R}^n$ の方向の偏微分 (ガトー微分) を求める。この h が $H_0^2(Q, \mathbf{R}^n)$ の任意の要素である事からフレッシェ微分を求める事ができる [10][11]。

3 曲げのポテンシャルとそのフレッシェ微分

曲面 r の座標軸 q_j 方向の曲率を

$$R_{(curv)j}(q) = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial q_j^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial q_j^2} \right\rangle_{\mathbf{R}^n}^{1/2} \tag{10}$$

で表わし、安定形状 (型紙) s の座標軸 q_j 方向の曲率を

$$S_{(curv)j}(q) = \left\langle \frac{\partial^2 s}{\partial q_j^2}, \frac{\partial^2 s}{\partial q_j^2} \right\rangle_{\mathbf{R}^n}^{1/2} \tag{11}$$

で表わす [9]。ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{R}^n}$ は、n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ における内積を表わしている。

すると、曲げに関するポテンシャル $Pot_1(r)$ は

$$Pot_1(r) = \tag{12}$$
$$\sum_{j=1}^{m} \int_Q c_{bend}^j(q) \left\{ R_{(curv)j}(q) - S_{(curv)j}(q) \right\}^2 dq$$

で定義される。ここで

$$c^j_{bend} : Q \to [0, +\infty) \tag{13}$$

は、曲げに関する曲面の弾性係数の大きさである。

その 2階のソボレフ空間 $H^2(Q, \mathbf{R}^n)$ の要素でコンパクトな support を有する関数全体からなる関数空間 $H^2_0(Q, \mathbf{R}^n)$ の要素である任意の関数 h の方向の「曲げに関するポテンシャル $Pot_1(r)$ の偏微分（ガトー微分）」$\langle \partial Pot_1(r)/\partial r, h\rangle_{L^2(Q,\mathbf{R}^n)}$ は

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial Pot_1(r)}{\partial r}, h \right\rangle_{L^2(Q,\mathbf{R}^n)} \\
=\ & \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{Pot_1(r+\varepsilon h) - Pot_1(r)}{\varepsilon} \qquad (14)\\
=\ & 2\sum_{j=1}^{m} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial q_j^2}\left\{ c^j_{bend}(q)\frac{\partial^2 r}{\partial q_j^2}\right\}, h \right\rangle_{L^2(Q,\mathbf{R}^n)} \qquad (15)\\
& -2\sum_{j=1}^{m} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial q_j^2}\left\{ c^j_{bend} S_j R_j^{-1}\frac{\partial^2 r}{\partial q_j^2}\right\}, h \right\rangle_{L^2(Q,\mathbf{R}^n)}
\end{aligned}$$

となる。

ここで h が任意であることから、式 (15) の 2つの項における関数空間 $L^2(Q, \mathbf{R}^n)$ における内積の左側の部分の総和が、曲げに関するポテンシャル $Pot_1(r)$ のフレッシェ微分 $\partial Pot_1(r)/\partial r$ に等しくなるので、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Pot_1(r)}{\partial r} = \qquad (16)\\
&2\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}\left\{ c^j_{bend}(q)\frac{\partial^2 r}{\partial q_j^2}\right\} \\
&-2\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}\left\{ c^j_{bend}(q)S_j(q)R_j(q)^{-1}\frac{\partial^2 r}{\partial q_j^2}\right\}
\end{aligned}$$

である。

4 伸びのポテンシャルとそのフレッシェ微分

曲面 r の各座標軸 q_j 方向の接ベクトルの長さを

$$R_{(len)j}(q) = \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_j}, \frac{\partial r}{\partial q_j} \right\rangle^{1/2}_{\mathbf{R}^n} \tag{17}$$

で表わし、安定形状 (型紙) s の各座標軸 q_j 方向の接ベクトルの長さを

$$S_{(len)j}(q) = \left\langle \frac{\partial s}{\partial q_j}, \frac{\partial s}{\partial q_j} \right\rangle^{1/2}_{\mathbf{R}^n} \tag{18}$$

で表わす。

伸びに関するポテンシャル $Pot_2(r)$ は、

$$\begin{aligned}
&Pot_2(r) = \qquad (19)\\
&\sum_{j=1}^{m}\int_Q c^j_{stretch}(q)\left\{R_{(len)j}(q) - S_{(len)j}(q)\right\}^2 dq
\end{aligned}$$

によって定義される。ここで

$$c^j_{stretch} : Q \to [0, +\infty) \tag{20}$$

は、伸びに関する布の弾性係数の大きさを表している。

伸びに関するポテンシャル $Pot_2(r)$ のフレッシェ微分 $\partial Pot_2(r)/\partial r$ は、曲げに関するポテンシャル $Pot_1(r)$ の時と同様の計算によって

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Pot_2(r)}{\partial r} = \qquad (21)\\
&-2\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial q_j}\left\{ c^j_{stretch}(q)\frac{\partial r}{\partial q_j}\right\} \\
&+2\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial q_j}\left\{ c^j_{stretch}(q)R_{(len)j}(q)^{-1}\frac{\partial r}{\partial q_j}\right\}
\end{aligned}$$

となる。

5 剪断 (ずれ) のポテンシャルとそのフレッシェ微分

曲面 r の座標軸 q_j 方向の接ベクトルと座標軸 q_k 方向の接ベクトルとの n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内での内積を

$$R_{(pro)jk}(q) = \left\langle \frac{\partial r}{\partial q_j}, \frac{\partial r}{\partial q_k} \right\rangle_{\mathbf{R}^n} \tag{22}$$

で表わし、安定形状 s の座標軸 q_j 方向の接ベクトルと座標軸 q_k 方向の接ベクトルとの n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内での内積を

$$S_{(pro)jk}(q) = \left\langle \frac{\partial s}{\partial q_j}, \frac{\partial s}{\partial q_k} \right\rangle_{\mathbf{R}^n} \tag{23}$$

で表わす。

剪断 (ずれ) のポテンシャル $Pot_3(r)$ は、

$$Pot_3(r) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k\neq j}\int_Q$$
$$c^{jk}_{shear}(q)\left\{R_{(pro)jk}(q) - S_{(pro)jk}(q)\right\}^2 dq$$

によって定義される。ここで

$$c^{jk}_{shear} : Q \to [0, +\infty) \tag{24}$$

は剪断 (ずれ) の弾性係数の大きさを表している。物理的な意味から

$$c^{jk}_{shear}(q) = c^{kj}_{shear}(q) \tag{25}$$

である。

剪断 (ずれ) のポテンシャル $Pot_3(r)$ のフレッシェ微分 $\partial Pot_3(r)/\partial r$ は、曲げに関するポテンシャル $Pot_1(r)$ の時と同様の計算によって

$$\frac{\partial Pot_3(r)}{\partial r} = \tag{26}$$
$$-4\sum_{j=1}^{m}\sum_{k\neq j}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(c^{jk}_{shear}(q)\ \ R_{(pro)jk}(q)\frac{\partial r}{\partial q_j}\right)$$

となる。

6　曲面のラグランジアンから運動方程式を導く

上記で求まった曲面の曲げ・伸び・剪断 (ずれ) の３つのポテンシャルの総和

$$Pot_{inner}(r) = \sum_{l=1}^{3} Pot_l(r) \tag{27}$$

が、曲面の内力を決定するポテンシャル エネルギーとなる。曲面に働く重力や、曲面が他の物体と衝突して受ける反力などの外力の合力を $f(r)$ で表わす。

曲面 $r \in H^2(Q, \mathbf{R}^n)$ の質量密度を $c_{mass}(q)$ とおくと、曲面 r の運動エネルギー $Kin(\dot{r})$ は、

$$\begin{aligned} & Kin(\dot{r}) \\ = \ & \frac{1}{2}\int_Q c_{mass}(q)\langle \dot{r}(q), \dot{r}(q)\rangle_{\mathbf{R}^n} dq \quad (28) \\ = \ & \frac{1}{2}\langle c_{mass}\dot{r}, \dot{r}\rangle_{L^2(Q,\mathbf{R}^n)} \quad (29) \end{aligned}$$

で定義される。

ラグランジアン $Lag(r, \dot{r})$ は

$$Lag(r, \dot{r}) = Kin(\dot{r}) - Pot_{inner}(r) \tag{30}$$

となる。

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Lag(r, \dot{r})}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial Lag(r, \dot{r})}{\partial r} = f(r) \tag{31}$$

より、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Kin(\dot{r})}{\partial \dot{r}}\right) + \frac{\partial Pot_{inner}(r)}{\partial r} = f(r) \tag{32}$$

だから、

$$c_{mass}\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\partial Pot_{inner}(r)}{\partial r} + f(r) \tag{33}$$

が従う [12]。

故に、曲面の変形運動を決定する運動方程式は

$$c_{mass}\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial Pot_l(r)}{\partial r} + f\left(r(t)\right) \tag{34}$$

となる。ここで $\partial Pot_l(r)/\partial r$ は、式 (16),(21),(26) によって求められている。

7　おわりに

３ＤＣＧにおいて「布」のアニメーションを表示するにあたって、布は３次元空間 $\mathbf{R}^3$ 内の２次元の曲面としてモデル化され、その曲面の運動方程式に基づいて変形運動がシミュレーションされる。従来の諸研究では、有限個のポリゴン分割で曲面を近似して、その近似された有限個の質点系において、布の型紙 (安定形状) に対する曲げ・伸び・剪断 (ずれ) の３種類のポテンシャルから運動方程式が導出されていたが、その理論を本論文では次の観点から一般化・厳密化した。

- 布のモデルである曲面を集中定数化 (離散化・有限次元化) することなく、連続体の曲面における 曲げ・伸び・剪断 (ずれ) の３種類のポテンシャル を提案し、それらのフレッシェ微分を求める事によって分布定数系としての運動方程式を偏微分方程式 (無限次元の関数空間上の発展方程式) として導いた。

- ３次元のユークリッド空間における２次元の曲面の運動方程式に留まらず、一般次元のユークリッド空間における一般次元の曲面 (多様体) の運動方程式を導いた。

このようにして導出された 偏微分方程式 (無限次元の関数空間上の発展方程式) としての運動方程式は、有限個のポリゴン分割で有限次元近似された質点系の運動方程式の極限と考えられ、そのような極限としての運動方程式を導く事は、数理的な基盤研究として大きな意義を有している。

また 数式で表現された曲面を Surface とする３Ｄオブジェクト（ポリゴン分割に頼らない方式の Surface を有する３Ｄオブジェクト）の変形を表現する 3DCG アニメーションのための数値シミュレーションを数理的に導出するという応用上の観点からも重要である。

更に２次元平面・３次元空間におけるベクトルの概念が高次元の線形空間や無限次元の関数空間の理論として一般化される事によって益々その美しさを発現しているように、高次元の曲面の変形運動をコンピュータで数値シミュレーションして鑑賞する事も、数理的な眼で美を探るという Computer Art の新しいコンセプトを切り開くものと考える。

曲面の安定形状（布の型紙の形状）$s : Q \to \mathbf{R}^n$ を、本論文では時間 t によって変化しないものとして定式化したが、著者らの先行研究 [7] [8] で試みたように曲面の安定形状 s が時間と共に変化する関数 $s(t)$ とすると、現実には有り得ない様々な面白い動きを 曲面 r のアニメーションとして実現できるので、追求して行く所存である。

References

[1] 画像電子学会編（西田友是・近藤邦雄・藤代一成 監修）:「ビジュアル コンピューティング – ３次元ＣＧによる画像生成 –」, 東京電機大学出版局 , 2006, 第４章 4.7 節

[2] David Baraff, Andrew Witkin : “Large Steps in Cloth Simulation”, SIGGRAPH ’98 Proceedngs, ACM, Addison-Wesely, pp. 43–54, 1998.

[3] 井上達雄 :「弾性力学の基礎」, 日刊工業新聞社, 1979, 第４章 p.42

[4] 多摩美術大学 芸術アルゴリズム研究会 :「20 世紀コンピュータ・アートの軌跡と展望」多摩美術大学美術館, 2006

[5] Thomas F. Banchoff 著、永田雅宜・橋爪道彦 共訳 :「目で見る高次元の世界」東京化学同人　ＳＡライブラリー 13, 1994

[6] 宮崎興二 編著、石井源久・山口哲 共著 :「高次元図形サイエンス」京都大学学術出版会, 2005

[7] 堂田卓宏, 河辺郁, 服部元史, 高森年 :「時変安定形状を用いてクロス･シミュレーションに演出機能を付加した 3DCG アニメーションシステムの開発」情報処理学会 第６５回（平成１５年）全国大会 講演論文集 CD-ROM 講演番号 5N-5 , pp.4-103,104 2003 年 3 月 25 日

[8] Takuhiro Dohta, Motofumi Hattori, Toshi Takamori : ”An Intuitive Operation System for Cloth Animation of Computer Graphics”, SICE 2002. Proceedings of the 41st SICE Annual Conference Publication Date: 5-7 Aug. 2002 Volume: 4, On page(s): 2372- 2375 vol.4 ISBN: 0-7803-7631-5 INSPEC Accession Number: 7786587 Digital Object Identifier: 10.1109/SICE.2002.1195780

[9] J.A. ソープ著 :「微分幾何の基本概念」シュプリンガー・ジャパン, 2006

[10] コルモゴロフ, フォーミン 共著、山崎三郎, 柴岡泰光 共訳 :「函数解析の基礎　原書第４版　下」岩波書店　1979　第 10 章

[11] 小磯憲史著 :「変分問題」共立講座２１世紀の数学 12、共立出版, 1998

[12] Cornelius Lanczos : ”The Variational Principles of Mechanics”, Dover 0-486-65067-7