[研究ノート] 電磁力のマックスウェル方程式からの導出

宍戸文雄

電気電子情報工学科

Derivation of electromagnetic force from Maxwell equation

Fumio SHISHIDO

Abstract

The whole of Lorentz force together with Maxwell equation are not required for the first principle in electromagnetism. It is shown that total energy conservation law together with Maxwell equation or equivalently electrostatic force together with Maxwell equation is sufficient for the first principle. Electromagnetic force is derived from them without depending on the assumption of special relativity.

Key Words: first principle in electromagnetism, electromagnetic force,

1．序

電磁気学の体系において何が第一原理を成し、その第一原理から各定理が如何に導かれるのかという最も基本的な問題を整理して考えよう。この研究ノートではマクスウェルの方程式とエネルギー保存則だけから静電力と電磁力が導かれ、従ってこれだけの第一原理で閉じた体系を成す証明を示す。特殊相対論の仮定は使わない。

先ず多くの教科書でどのように記述されているかを概観する。 近年増えた、入門の・分かり易い・図解・工学部の・等の形容詞のついた電磁気学の殆どでは、上記の問題には触れていない。クーロンポテンシャルとビオ・サバールの法則が静電磁場のときだけの解であることを明示していない、マクスウェルの方程式は単に電磁波を記述するための道具の扱いである、等のことが多い。従って比較的程度の高いものを参考にしなくてはならない。ジャクソン、砂川重信、小谷正雄、高橋秀俊、ファインマン、等を参考にする。

$$rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad rotB = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j,$$

および　$$divB = 0, \qquad divE = 4\pi\rho, \tag{1}$$

$$F = \rho E + \frac{1}{c}[j \times B] \tag{2}$$

$$-\frac{d}{dt}\int wdV = \int jEdV, \tag{3}$$

ここで　$$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2),$$

$$div\, j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

上記（1）は真空中のマックスウェルの方程式である。（2）はローレンツ力であり、第一項を静電力第二項を電磁力と呼ぶ。（3）の w は電磁場のエネルギー密度であり、その体積積分はポインティングベクトルの消える十分遠方までとる。従ってポインティングベクトルは現われない。第一原理を論ずるのであるから真空中の電磁場を扱い物質内は論じない。

（1）のマクスウェル方程式は電荷ρと電流jが与えられたときに電場Eと磁場Bの時間空間的発展を決めるものであり、従って電荷に及ぼす力については何も記述していない。力は（2）式で与えられる。（3）は（1）から導かれる式である。ここで全エネルギー保存則を仮定するということは（3）の両辺が左辺で表される電磁エネルギーの減少がそれ以外の全エネルギーの増加に等しいと仮定することである。全エネルギー保存則の仮定から（2）の第一項の静電力は簡単に導けそうであるが、問題は（2）の第二項の電磁力である。これも第一原理としなければ体系は閉じないのであろうか。それを以下に論ずる。なお静電磁場だけを取り扱う場合、或いは入門の電磁気学ではEとBは観測される力から（2）によって定義するのが通常の立場であろう。それに対してマクスウェルの方程式を第一原理と見なす立場では、EとBはその方程式によって決定される何かの場であり、それは果して（2）を満足するのかどうかを吟味しなくてはならない。

小谷正雄は（2）の第一項の静電力を前提として、特殊相対論の仮定から第二項の電磁力を導いている。では特殊相対論の仮定無しではどうか。ジャクソンと砂川重信は（1）と（2）から全エネルギー保存則及び電磁場の応力テンソルを導いている。即ちこの疑問には触れていない。高橋秀俊は応力テンソルを仮定して、それから電磁力を導いている。しかし応力テンソルは複雑なものであり単純な第一原理とは見なしえない。ファインマンの教科書は電磁気だけではなく物理全般を扱う。電磁気の後に特殊相対論があり、従って特殊相対論の仮定無しに電磁気の第一原理がどの程度簡単化されるかについての明確な記述は見えない。

2．静電力

先ず全エネルギー保存則から静電力が導けることを示す。そのための準備として、ある点で$E=0,$のときそこにある電荷に及ぶ力は0であることを帰謬法で導く。（1）のマクスウェル方程式は電荷ρと電流jを与えられたときに電場Eと磁場Bの時間空間的発展を決めるものであるが、jは時間空間の任意の関数であってよく、不連続でもかまわない。ρは（4）の連続の条件からjに従属して決まり、EとBはそのρとjから決まる。今ある点で$E=0,$であるがそこにある電荷に有限の力Fが生じると仮定する。その点に突然有限の電流を加える。電荷は正負打ち消して0であり電流は有限とすることは可能である。電流を加えた電磁場と加えずそのままであった電磁場の二つを比較しよう。直後の（3）の右辺を比較すると$E=0,$であるから両者は等しい。従って電磁場のエネルギーの変化率は等しい。ところが加えた電流の運動エネルギーの変化率は有限の力Fのために両者で異なる。従って全エネルギー保存則に反して矛盾である。従って証明された。

二つの異なる電磁場のそれぞれのEがある点で一致するとき、そこにある電荷に及ぼす力も一致しなくてはならない。何故ならば重ね合わせの原理により二つの異なる電磁場の差の電磁場はマクスウェルの方程式の解であり、そのとき二つの力の差の力が働くが、それは0であると前述に証明されている。

従ってある点において電場Eを与えられたときそこの電荷に及ぶ力は周りがどんな電磁場であるかは無関係であるから、最も簡単な電磁場として一個の点電荷によって生ずる静電場を選ぶ。対称性から（2）の第一項の形であることが係数を除いて決まる。それを（3）に代入すると係数は1であると決まり、（2）の第一項の静電力が導かれた。

3．静電磁場での電磁力

（3）の右辺の積分にはEだけが現われBは現れない。前述の議論にあったように、任意の点に突然jを加えてもよいのであるから、（3）の右辺の積分へのBに依る寄与はいたるところで0でなくてはならない。従ってBに依る力はjと直交する。更に対称性を考察するとBにも直交する。従ってその力は（2）の第二項と同じ方向であり、その大きさだけを調べればよい。先ず静電磁場の場合を考察しよう。静電磁場内で着目点を原点、Bの方向ををz方向と定める。適当な静電場を重ねて原点でのEを消す。静電磁場を外場とみなしてその中でy方向の微少電流に働く力を調べよう。ところがこのままでは難しい。連続条件（4）から微少電流の両端に電荷が現われるからである。そこでx方向の幅が無限小の長方形の回路を考えそれに電流Iが流れていると仮定する。この無限小幅長方形がx方向に力を受けてゆっくりと移動したとする。そのとき他へ仕事をする。このとき外場は移動する無限小幅長方形の影響を受けるのであるが適当にエネルギーの授受を調節して外場を一定に保つ。外場は一定であるから原点付近の外場に電場Eは現われない。長方形回路内の電荷の運動方向と外場に依る力の方向は直交するのでエネルギーの授受は無い。従って他になした仕事の量は長方形回路での$\int EjdVdt$に一致する。

そのとき観測者も同時に移動していくとする。観測者から見て長方形は静止しており静電磁場が移動する。移動する静電磁場はもはや静電磁場ではない。(1) のマックスウェルの方程式を解くと次のことが分かっている。電荷 ρ と電流 j を u の速さでゆっくりと平行移動させたときの解は静電磁場の解に (u/c) の一次の補正項が加わる。観測者から見て移動する静電磁場はもはや静電磁場ではないので原点付近の B は時間変化しており従って電場 E が現われる。長方形回路での $\int EjdVdt$ を計算しよう。

$(u/c) \to 0,$ のゆっくりした極限においては (u/c) の一次の補正項の積分への寄与は消えて静止系と移動系で一致する。

(1)のマックスウェルの方程式の積分式、

$$\oint E\,ds = -\frac{1}{c}\iint \frac{\partial B}{\partial t}\,dS \qquad (5)$$

を使うと、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{c} I \frac{\partial B}{\partial x} \qquad (6)$$

F と B の正負の対称性から、

$$F = \frac{1}{c} IB \qquad (7)$$

となり（2）の第二項の電磁力が得られる。

4．一般の電磁場の電磁力

一般の電磁場での電磁力を調べるためには、静電場での議論と同様に $B=0,$ の点での電磁力が $F=0,$ であると証明できればよい。そのために再び帰謬法を用いる。ある点で $B=0,$ であるが電磁力 F は有限であると仮定する。その場合、適当な静磁場 B を重ねて電磁力が $F/2,$ となるように定める。すると静磁場 B に因る電磁力とこの $F/2,$ の電磁力は反対向きである。

再び3．の静電磁場での電磁力と同様の議論を行う。無限小幅長方形をｘ方向に移動させるときの仕事と観測者がそれと共に移動するときの $\int EjdVdt$ を比較する。静電磁場ではなく複雑に時間変化する一般の電磁場であるから、それを正確に計算することは試みない。しかし次のことは言える。移動の距離を無限小にした極限を考える。そのとき両者の正負の符号は確定する。それは反対であり矛盾する。従って証明できた。

（2）の第二項の電磁力は一般の電磁場の場合にも成立するとの結論が得られた。

5．補足

今までの議論には、電磁力は電流の瞬間値に依りその変化率には依らないとの前提が含まれていた。その点を再考する。

力が電流の時間変化率にも依存すると仮定すると矛盾することを示す。何故ならば力とは即ち微少電流の位置の時間に関する二回微分である。他方電流は電荷の位置の一回微分従って電流の時間変化率とは電荷の位置の二回微分である。従って二回微分が二回微分を含む関数として決まるということになるが、それは結局二回微分が二回微分を含まない関数として決まるということである。従って原点の微少電流に働く力を求めるときそれは定常であると仮定してよい。

6．結論

マクスウェルの方程式と全エネルギー保存則だけから静電力のみならず電磁力も特殊相対論の仮定無しに導かれる、従ってこれだけで第一原理として閉じている。

参考文献

1．　小谷正雄：電磁気学（岩波講座・現代物理学）岩波

2．　Ｊ．Ｄ．ジャクソン：電磁気学（原著第３版、西田稔訳）、吉岡書店（２００２）

3．　砂川重信：理論電磁気学第３版、紀伊国屋書店（１９９９）

4．　高橋秀俊：電磁気学　裳華房

5．　ファインマン：電磁気学（ファインマン物理学）岩波