

[研究論文] 直交境界適合曲線座標系による流れ解析

長田泰久¹・中根一朗²

1 博士前期課程機械工学専攻

2 機械工学科

Numerical Flow Calculations with
Orthogonal Body Fitted Curvilinear Coordinate SystemYasuhisa OSADA¹, Ichiro NAKANE²

Abstract

Body fitted curvilinear coordinate systems (usually abbreviated to BFC) are widely used for calculating the flow around arbitrary complex bodies, but generally they are not orthogonal. The accuracy deteriorates if the departure from orthogonality is too large, and orthogonal coordinate systems make the application of boundary conditions more straightforward.

In this study, the method for generating the orthogonal BFC is suggested, and five kinds of BFC grids (one non-orthogonal and four orthogonal grids) are generated.

The two-dimensional calculations were performed for the flow around a circular cylinder with these orthogonal and non-orthogonal grids. The calculation results were compared with the measurements. The validity of our method for generating the orthogonal BFC is confirmed.

Keywords : Orthogonal Curvilinear Coordinate System, BFC, CFD, Cylinder Wake

1. まえがき

任意の複雑形状物体周りの流れを差分解析する際には、通常、境界適合曲線座標系による差分法、あるいはカットセル法が多く用いられる。特に、境界適合曲線座標系は、物体周りの流れを精度良く求める必要がある場合に使用されている。

ただし、一般に境界適合曲線座標系では座標線が非直交であり、管見において、境界適合曲線座標系での座標線の直交生成に関する報告は見あたらない。なお、これは、境界適合曲線座標系による格子生成の先達である Thompson ら^[1]が、「非直交性が極端に大きくなり、差分手法により計算精度を維持できない限り、と報告していることから分かるように、直交する座標系による座標線（格子）を生成するよりも、スキームによる精度保証を指向したことが多いことに起因していると思われる。

しかしながら、彼らの言葉は、非直交座標系の致命

的な欠点“非直交性が極端に大きい場合、つまり、極端に非直交となっている座標線（格子）が存在する場合には、差分スキームでは解決できない誤差を生む”を意味しており、少なくとも、非直交座標系での計算精度は、直交座標系での計算精度に比べて低くなることが予測される。とは言え、この欠点を補うため、生成した格子の非直交性をチェックし、トライアンドエラーで格子を決定するのは、賢明な方法とは思えない。加えて、直交座標系と異なり、非直交座標系では物体壁面上における境界条件を与える際にも、工夫を必要とすることが多い。

そこで本報告では、まず、直交する境界適合曲線座標系の座標線（格子）の生成手法を提案する。そしてさらに、作成した直交境界適合曲線座標系の格子を用い、実際に矩形外周内部に配置された円柱周りの流れを計算し、非直交境界適合曲線座標系に比べ、直交境界適合曲線座標系の優れていることを示す。

2. 直交境界適合曲線座標系の座標線(格子)の生成

本研究では、Thompson らの方法^[2]により生成した非直交境界適合曲線座標系 (Non-Orthogonal Body Fitted Curvilinear Coordinate System、以降、NBFC と略す) の座標線 (格子) を基本として、これより、直交境界適合曲線座標系 (Orthogonal Body Fitted Curvilinear Coordinate System、以降、OBFC と略す) の座標線 (格子) を生成する。ただし、本報告において、計算結果の検証に用いた実験結果が対称な流れであったことから、計算する場も対称であるとし、流れ場の半分のみ格子を生成して計算時間の短縮をはかった。以下に、OBFC 格子生成の手順を示す。

まず、Thompson らの方法^[2]に従い、次式(1)のポアソン方程式を解いて領域内の ξ と η の分布を求め、これらの等値線として NBFC 格子を生成する。なお、下式中の P と Q は指定した場所に座標線を集中させるための制御関数である。また、NBFC 格子の理解を助けるため、図1に模式的に表した物を示す。

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (1)$$

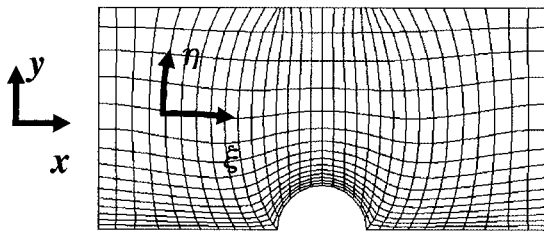


図1 非直交境界適合曲線座標系(NBFC)格子の概略

図1の概略図、ならびに式(1)において $P=0$ とすることでラプラス方程式となることから明かなように、NBFC 格子における ξ ライン ($\eta = \text{一定ライン}$) は、ポテンシャル流れの流線に近い分布となる。また、流れ解析においては、流れと直交・平行する方向に格子の2辺ずつを定めることにより、計算精度の向上することが知られていることから、NBFC 格子の ξ ラインをそのまま残し、 ξ ラインに対して直交する η ラインを、以下の通りに生成する。

ξ ラインに対する接線方向の単位ベクトルは次式により表される。

$$t^{(\xi)} = \frac{x_{\xi}}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} i + \frac{y_{\xi}}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} j \quad (2)$$

ここで、この接線方向の単位ベクトルを表すポテンシャル量をととして、次式で定義すると、勾配と等値線

は直交することから、この等値線が ξ ラインに対して直交することとなる。

$$d\xi = \frac{x_{\xi}}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} dx + \frac{y_{\xi}}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} dy \quad (3)$$

さらに、 $dx = x_{\xi} d\xi + x_{\eta} d\eta$ $dy = y_{\xi} d\xi + y_{\eta} d\eta$ であることから、前式(3)は次式(4)に変形される。

$$d\xi = \frac{1}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} \{ (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2) d\xi + (x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}) d\eta \} \quad (4)$$

従って、前式(4)を積分することで、 ξ ラインに対して直交する η ラインが得られる。なお、実際には、 ξ ライン ($\eta = \text{一定ライン}$) 上での積分を行っており、次式(5)から η の値を求め、この等値線として η ラインを生成している。

$$\begin{aligned} \xi &= \int \frac{1}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} \{ (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2) d\xi + (x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}) d\eta \} \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2) d\xi = \int \sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2} d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

またこのため、上記より明かなように、本報告における OBFC 格子は、ポテンシャル流れの流線と、これに対して直交する等ポテンシャル線の等値線を座標線にすることと概念的には同じである。

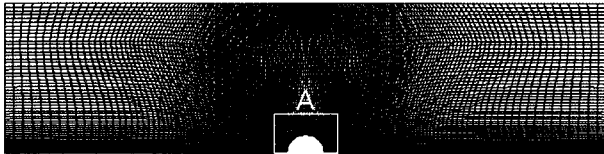
ただし、円柱に対して直交する座標線は放射状に広がるため、円柱から離れるに従って格子が極端に大きくなってしまふ。そこで本報告では、計算領域全体を直交させている訳ではなく、円柱壁ならびに下側境界からある一定本数までを直交させることで、以下の4種類の部分直交格子を作成した。

- (a) 円柱壁から5本目までが直交する格子
($\xi_0=5$ と記す、直交領域が最も狭い OBFC 格子)
- (b) 円柱壁から15本目までが直交する格子
($\xi_0=15$ と記す)
- (c) 円柱壁から25本目までが直交する格子
($\xi_0=25$ と記す)
- (d) 円柱壁から35本目までが直交する格子
($\xi_0=35$ と記す、直交領域が最も広い OBFC 格子)

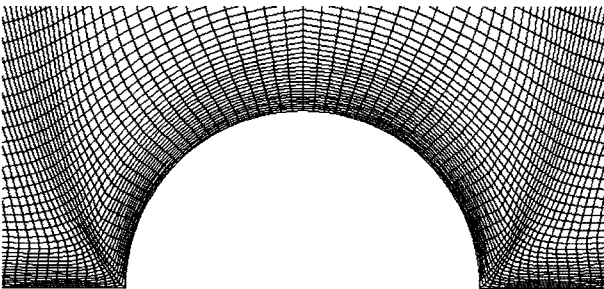
なお、(a)～(d)の部分直交格子の非直交領域における座標線は、OBFC の座標線と NBFC の座標線の移動平均により算出し、最終的には NBFC の座標線に漸近させている。つまり、円柱から離れるにともなって、

OBFC 格子は NBFC 格子に一致することとなる。

この手法により生成した格子を図 2、3 に示す。特に、比較が容易なように、円柱周りを半円ずつに切り取り接合させた図 3 において、円柱近傍における OBFC 格子の直交性が明らかである。加えて、図 2 の拡大図と図 3 より、直交領域の座標線と非直交領域の座標線が、滑らかに接合されていることも確認される。



(a) 全体図



(b) A 部詳細

図2 直交境界適合曲線座標系(OBFC)格子($\xi_0 = 15$)

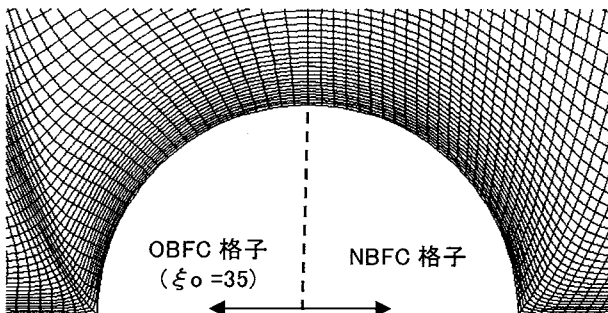


図3 OBFC 格子($\xi_0 = 35$)と NBFC 格子の比較

3. 数値計算手法と計算条件

本報告では、4 種類の OBFC 格子と、その元になった NBFC 格子を用い、円柱周りの流れを数値計算することで、OBFC 格子の有効性の確認を行った。計算手法の概要を以下に列挙する。

- (a) 支配方程式：流れ関数—渦度系
- (b) 離散化手法：有限体積法による差分法
- (c) 差分スキーム：対流項はハイブリッド法による陰解法、拡散項は中心差分法
- (d) 数値演算手法：TDMA 法
- (e) 収束判定条件：相対誤差の絶対値の最大値 $< 10^{-3}$

なお、境界条件は、以下の通りである。

- (f) 円柱壁：ノースリップ壁
- (g) 入口：一様流入
- (h) 出口：十分発達した流れ
- (i) 上部境界：スリップ壁
- (j) 円柱壁を除いた下部境界：対称面（対称境界）

また、図 2、3 より計算格子と計算場の概要把握は可能であると考えているが、定量的に、その概略を以下に追記する。

- (k) 計算領域の大きさ：流れ方向が $16d$ 、幅方向が $4d$
[d ：円柱直径]

- (l) 座標(格子)線の数：

流れ方向に 224 本、幅方向に 65 本

- (m) 円柱より 1 点目の格子の大きさの平均値：

円周方向が約 $4 \times 10^{-2}d$ 、半径方向が約 $1 \times 10^{-2}d$

4. 結果および考察

今回作成した部分直交格子の中で最も直交領域の広い $\xi_0 = 35$ の OBFC 格子と、その元となった NBFC 格子による円柱後流渦の数値計算結果を、Bouard⁽³⁾らによる無次元時間 $t^* = 2.5$ ($t^* = Ut/d$ U : 代表速度、 t : 実時間) の可視化結果との比較により、図 4 に示す。ただし、(a)、(b) が $Re = 550$ の結果であり、(c)、(d) は $Re = 3000$ の結果である。また、結果の図においては、Bouard⁽³⁾らによる可視化結果を上部に、数値計算結果を下部に配置し、これをひとまとめに接合させて 1 枚の結果にしている。従って、(a)、(c) の下部流線が $\xi_0 = 35$ の OBFC 格子による計算結果であり、(b)、(d) の下部流線が NBFC 格子による計算結果である。

同図より明らかなように、いずれの計算結果も可視化結果によく一致しているように見える。しかしながら、詳細に観察すると、 $\xi_0 = 35$ の OBFC 格子と NBFC 格子では、再循環領域の流れ方向長さに違いのあることが分かる。これは、 $Re = 550$ と $Re = 3000$ のどちらにおいても同様に見受けられ、NBFC 格子による計算結果は、 $\xi_0 = 35$ の OBFC 格子のみならず、可視化結果と比較しても、再循環領域が流れ方向に縦長になっている。つまり、非直交座標系の計算精度の低さが、定性的にも現れていると考えられる。

そこで、今回作成した 4 種類の OBFC 格子とその元になった NBFC 格子において、定量的にどの程度の計算結果の違いを生ずるかを、円柱後流渦のパラメータを対象として、やはり Bouard⁽³⁾らの結果と計算結果を比較することにより検討した。その結果を図 5 に示す。なお、同図において、 a ：円柱後端から渦中心までの x 方向距離、 b ：双子渦の中心間距離、 L ：中心線上での閉じた円柱後流渦の長さ、である。

図 5 より明らかなように、全体として、数値計算結果と Bouard⁽³⁾らの可視化結果は良く一致している。また、格子の違いによる影響を見て取ると、渦中心のパ

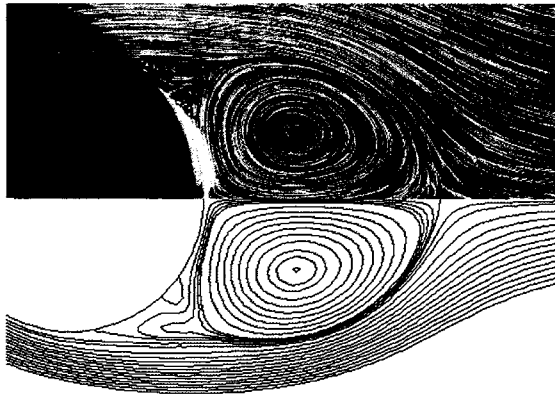
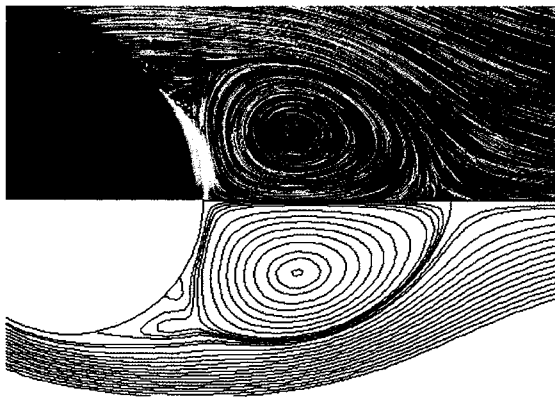
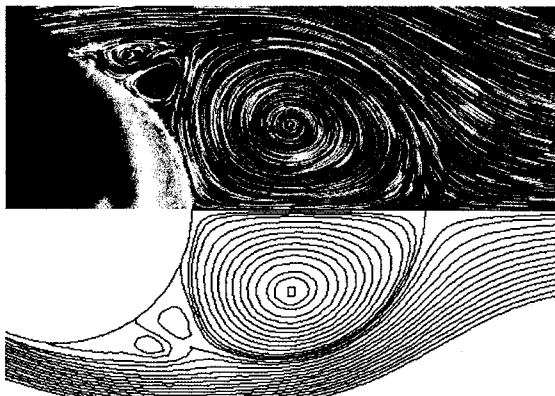
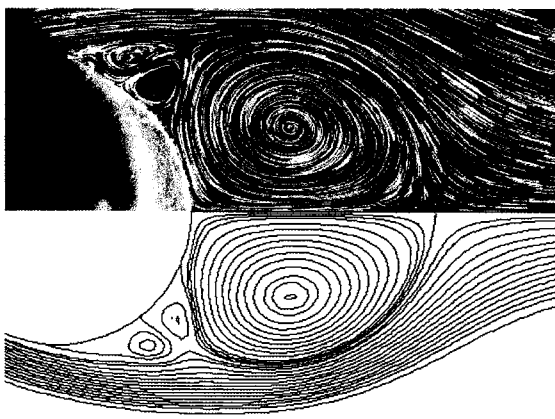
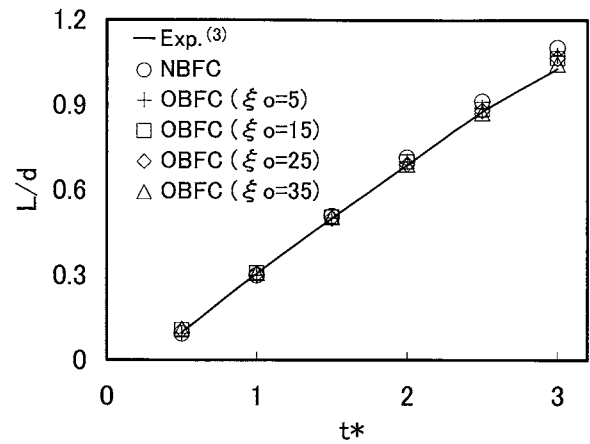
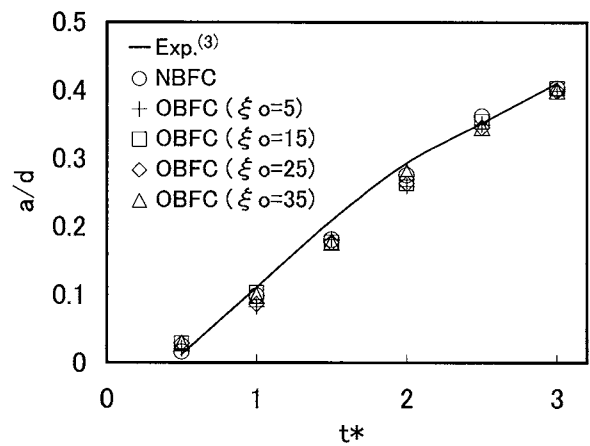
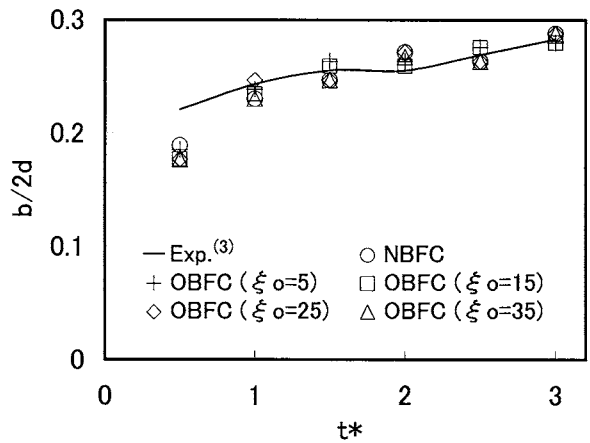
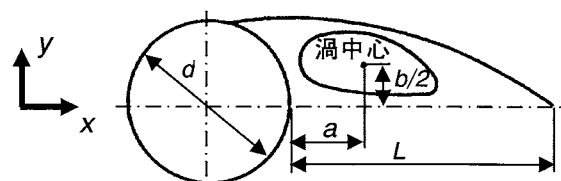
(a) $Re=550$ 、 $t^*=2.5$ 、OBFC 格子 ($\xi^*o=35$)(b) $Re=550$ 、 $t^*=2.5$ 、NBFC 格子(c) $Re=3000$ 、 $t^*=2.5$ 、OBFC 格子 ($\xi^*o=35$)(d) $Re=3000$ 、 $t^*=2.5$ 、NBFC 格子

図4 直交・非直交座標系による円柱後流渦の違い

(a) 直交領域の異なる格子による L/d の比較 ($Re=550$)(b) 直交領域の異なる格子による a/d の比較 ($Re=550$)(c) 直交領域の異なる格子による $b/2d$ の比較 ($Re=550$)

(d) 円柱後流渦のパラメータ概略図

図5 座標系の直交性が円柱後流渦の計算結果に与える影響の比較

ラメータ a/d , $b/2d$ においては、その違いがわずかである。加えて、 a/d , $b/2d$ における微妙な格子による違いも、格子による一定の傾向を持っている訳ではなく、渦中心の読みとり精度や数値計算の収束性に関わると思われるランダムな違いであると判断される。

しかしながら、図4において問題となった渦の長さ L/d に関しては、図(a)より分かるように、計算結果の可視化結果との違いと、計算に用いた格子の直交する領域の広さとの間に明らかな相関があり、直交する領域が狭くなるのにもなって、可視化結果との違いが顕著になっている。特に、 $t^*=3.0$ においては、 $\xi_0=35$ の OBFC 格子による計算結果が可視化結果と2%弱の違いで一致しているのに対し、NBFC 格子における計算結果と可視化結果の違いは約8%となっている。さらに、この違いは、 t^* が大きくなるに従ってより顕著になるような傾向を示している。

なお、渦の長さ L/d においてのみ格子の非直交性の影響が現れ、渦中心位置 a/d , $b/2d$ に関して格子の違いによる影響がほとんど現れないのは、再循環領域、特に渦中心近傍では、流速が遅いためであると推察される。これは、以下のような理由による。

壁面に沿った方向と、それに対して垂直な方向で構成する直交座標系においては、移流項による偽拡散が防止され、精度の高い解が得られる。ただし、流速が遅い場合には、そもそも拡散の影響が大きいことから、偽拡散を防止することの利点が小さくなると考えられる。またこのため、 Re が小さい場合には、渦の長さ L/d においても、座標の直交性の利点が計算結果に反映されづらいことが予測される。実際、これに関しては、より小さな Re ($Re=31$) の結果である図6から確認され、格子に関わらず、計算結果はほぼ等しく、可視化結果とも良く一致している。

なお、このため、逆に Re が大きい場合には、NBFC 格子における計算精度の低下が顕著になると推察している。ただし、図4に示した、 $Re=550$ と $Re=3000$ では、 Re の違いが5.5倍程度であるためか、 $Re=3000$ の渦の長さ L/d の比較結果は $Re=550$ の場合とほぼ同じ程度であった。

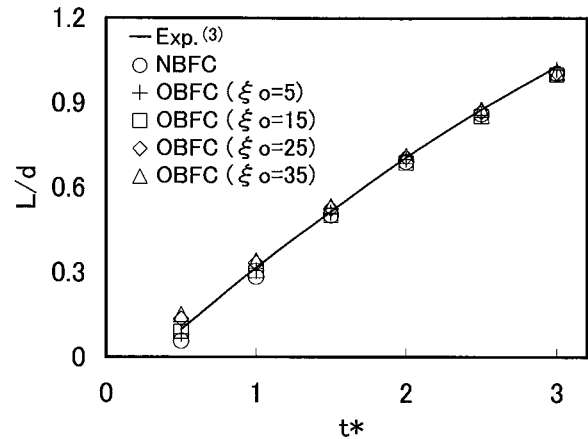


図6 直交領域の異なる格子による L/d の比較 ($Re=31$)

5. まとめ

本研究では、直交する境界適合曲線座標系の座標線(格子)生成手法を提案するとともに、数値計算精度に対するその有効性を確認した。その結果、直交領域が広い物ほど、可視化結果に一致する解が得られ、その有効性が確認された。

なお、 Re の小さい場合、座標線が直交していることの利点は、計算結果に反映されづらくなる。ただし、実現象、特に工業分野での流れにおいては、ほとんどの場合、 Re が非常に大きいことから、数値計算に関わる格子生成において、本研究の提案する手法は有用性が高いと考えられる。

参考文献

- [1] Thompson, J. F., Warsi, Z.U.A and Mastin, C. W., "Numerical Grid Generation - Foundations and Applications-", Elsevier Science Publishing Co., Inc., (1985)
- [2] Thompson, J. F., Thames, C. and Mastin, C. W., "TOMCAT - A Code for Numerical Generation of Boundary Fitted Curvilinear Coordinate Systems on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", J. Computational Physics, Vol.24 (1977), pp 274-302.
- [3] Bouard, R. and Coutanceau, M., "The Early Stage of Development of the Wake Behind an Impulsively Started Cylinder for $40 < Re < 10^4$ ", J. Fluid Mechanics, Vol.101, No.3 (1980), pp 583-607.