

[研究論文]

FFT による水面波動の映像化

立花康夫

神奈川工科大学情報学部情報メディア学科

Visualization of Water Surface Wave by FFT

Yasuo TACHIBANA

Information Media, Kangawa Institute of Technology

Abstract

In this paper we present a visualization method of water surface wave by FFT(Fast Fourier Transform). Water surface wave is appeared in various scenes of computer games. In these usages, the shape of wave is necessary for human to acknowledge it real. The pictures are constructed by animation. Therefore the generation time of pictures is desirable to be short. For this purpose there are many cases in which the quasi-pictures are used. However it is better that the shape of wave in pictures approximates that of actual wave. In this paper for water in a rectangular parallelepiped, the analytical solution is constructed by Fourier series. This Fourier series is approximated by the DFT(Discrete Fourier Transform). In this paper the method of expression by DFT of the Fourier series is presented. In the case the point of DFT is selected as the power of 2, the FFT can be used to calculation. Several pictures of surface wave constructed by FFT are shown.

Keywords: surface wave, fast Fourier transform, initial boundary problems, animation

1. はじめに

この論文は直方体のプール内の水面波動の解析解を Fourier 級数により求め、それを有限 Fourier 変換により近似する方法を提案する。さらに、変換点数を 2 のべきとして FFT による計算により動画像として映像化するのに十分な高速計算が可能であることを示す。

計算機ゲームは今や日本の誇る偉大な文化に成長した。ゲームの中では仮想的な映像が数多く使用される。水面の波動等も各種の背景に用いられる。これらは基本的に動画像として用いられるので、高速の作成処理が求められる。そのために、人が見てそれらしい波、すなわち、仮想的な波が用いられる場合が多い。しかし、できるならば、可能な限り現実の波の動作を映像化するのが望ましい。

この論文では、流体力学の中で取り扱われてきた非圧縮性完全流体としての水面波動の解析結果を映像化することを試みている。この問題は教科書にも載っている古典的な問題であるが[1],[2]、空間的には 3 次元、それに時間を加えて 4 次元の偏微分方程式の初期値境界値問題となる。このような問題の数値解は最近では差分法[3],[4]や有限要素法等[5]により解かれる。しかし、波面の映像化を目的とするならば、メッシュの数は空間的には 1 次元あたり 50 程度ないと滑らかな映像は得られない。これは、空間だけで 1.25×10^5 個の格子を必要とし、計算には多くの時間がかかる。この論文で考察するような直方体のプールに張られた水の水面の波動の問題には Fourier 級数で表わされる解析解が存在する[1]。そのため、映像化の目的では、この解析解を水面の格子で計算する方が得策と考えられる。しかし、単純に Fourier 級数を有限項で打ち切って計算しても、やはり計算時間は多大となる。この論文では、解を構成するのに必要な初期波面を表す関数を、水面の領域

縦横をそれぞれ 2 倍にした領域に対して対称に拡張し、その有限 Fourier 変換[6]により元の有限項で打ち切った Fourier 級数が格子点では一致することを用いて解の格子点での値を有限 Fourier 変換で表す。この結果を用い、格子点の数を水面の縦横共に 2 のべきとなるように設定する。こうすると、2 次元の FFT により波面が計算できることを示す。これにより波面の高速計算が可能となる。Windows application としてのプログラムで、縦横 64 分割なら周期 10msec の繰り返し周期で動画像が表示できる事を示す。表示機能を DirectX や XNA とすれば、さらに高速の動画像が可能である。

2. 水面波動を定める方程式

水面波動を定める方程式を、順を追って導く。以下の議論は特に水とは限らないので、以後、適宜、流体、液体、液面、波面の用語を用いる。

2.1 質量保存則(連続の方程式)

Fig.1 のプールの横幅を $a[m]$ 、縦幅を $b[m]$ とし、プールの底は液面より $c[m]$ だけ下にあるとする。Fig.1 のように波のない静止した液面上、横方向を x 軸、縦方向を y 軸、液面上方を z 軸とする $x-y-z$ 座標軸を設定する。流体の点 $\mathbf{x}(x,y,z)$ における流体の速度を $\mathbf{v}(u,v,w)$ とする。流体力学の知識によれば、渦のない流体の場合に渦度は $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ であり、この場合には、速度 $\mathbf{v}[m \cdot s^{-1}]$ は点 $\mathbf{x}[m]$ のスカラー関数 $\Phi(t,x,y,z)$ により、 $\mathbf{v} = \text{grad} \Phi$ と表わされる[2]。 Φ は速度ポテンシャルである。一般に、流体の内部では質量保存則に基づく連続の方程式

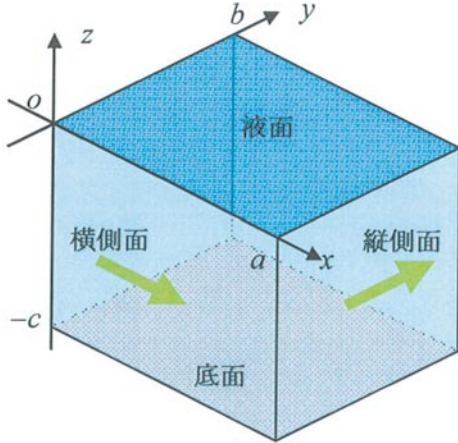


Fig.1 直方体形状のプール

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

が成立している[2]。ここで、 $\rho[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$ は流体の密度である。非圧縮性流体(液体)の場合には、密度 ρ が一定と考えるので、連続の方程式は $\text{div} \mathbf{v} = 0$ となる。ところで、

$$\text{div} \mathbf{v} = \text{div}(\text{grad} \Omega) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

であるから、流体の中では、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

が成り立っている。方程式(3)はLaplaceの方程式である。壁面または底面の法線(固体面から液体へ向かう壁面または底面の法線)を \mathbf{n} とすると、その方向の座標成分を n とすると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

である。具体的に、プールの中では、横壁面では、

$$\frac{\partial \Phi(t, x, 0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi(t, x, b, z)}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

であり、縦壁面では、

$$\frac{\partial \Phi(t, 0, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(t, a, y, z)}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

であり、底面では、

$$\frac{\partial \Phi(t, x, y, -c)}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

となる。

2.2 波面と大気との境界条件と波面の式

波が発生して、その高さを $\zeta[\text{m}]$ で表わすとき表面では、条件

$$F(t, x, y, z) \equiv z - \zeta(t, x, y) = 0 \quad (8)$$

が成り立つ。ここで、 \equiv は定義を表す。流体表面の点 $\mathbf{x}(x, y, z)$ の近傍の流体が時間 $\delta t[\text{s}]$ だけ過ぎて、表面上の点 $\mathbf{x} + \mathbf{v} \delta t$ に移動すると考える。当然、そこでも式(8)が成立するから、

$$F(t + \delta t, x + u \delta t, y + v \delta t, z + w \delta t) = 0 \quad (9)$$

である。これは、運動学的な条件と呼ばれる。式(9)を展開すると、式(8)を用いて

$$w = \zeta_t + u \zeta_x + v \zeta_y \quad (10)$$

が得られる。 $\mathbf{v} = \text{grad} \Phi$ を考慮すると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (11)$$

となる。ところで、流体の運動は、有名なNavier-Stokesの方程式に従う[2]。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad} \mathbf{v} \quad (12)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{\rho} (\chi_c + \frac{1}{3} \eta_c) \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}) + \frac{\eta_c}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{K}$$

ここで、 $p[\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}]$ は流体の圧力、 $\chi_c, \eta_c[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$ は粘性率と呼ばれる。また、 Δ はLaplacianで、

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (13)$$

で定義される。また、 $\mathbf{K}[\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}]$ は単位質量当たりの体積力(重力など)と呼ばれる外力である。我々の問題では、非圧縮(ρ は一定)で、粘性率を $\chi_c = \eta_c = 0$ として考える(完全流体)。このような場合には、方程式(12)は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{K} \quad (14)$$

となる。ところで、

$$\mathbf{v} \text{grad} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} \quad (15)$$

であるから、 $\text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ と ρ が一定であることを考慮すると、結局、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \mathbf{K} \quad (16)$$

が得られる。 $\mathbf{v} = \text{grad} \Phi$, $\mathbf{K} = -\text{grad}(gz)$ を考慮すると、

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) = \mathbf{0} \quad (17)$$

となる。ここで、 $g = 9.8[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$ は重力の加速度である。

従って、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz = \varphi(t) \quad (18)$$

となる。ここで、 $\varphi(t)$ は任意の時間関数である。大気の圧力 p は一定と考えると、 $\varphi(t) = p/\rho$ と選ぶことによって、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + gz = 0 \quad (19)$$

が得られる。従って、液体表面では、

$$z = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} v^2 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} |\text{grad} \Phi|^2 \quad (20)$$

が成立する。式(20)の右辺第2項は第1項に比較して、高次の微小量である。そこで、波面 $z = \zeta$ では

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (21)$$

となす。また、式(11)の高次の項を無視すると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (22)$$

が得られる。波面では $z = \zeta$ であるから、式(21),(22)より、

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

が得られる。これは液面と大気の境界での境界条件である。境界条件が微分方程式で与えられるのである。また、波面は式(21)で与えられる。

2.3 波面の初期条件

液中の点の波の満たす方程式(3)と壁面と底面での境界条件(5),(6),(7)と液面と大気との境界条件および液面の満たす式が得られた。偏微分方程式(3)を解くには、これでは不足である。時刻 0 での液面の形状 $f_I(x,y)$ ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) が必要となる。すなわち、

$$\zeta(0, x, y) = f_I(x, y) \quad 0 \leq x < a \quad 0 \leq y < b \quad (24)$$

である。式(24)は初期条件である。 ζ は式(21)で与えられる。

3. 解析解

問題の条件は全て整ったが、このような関数 $\Phi(t, x, y, z)$ をどのように求めたらよいか。例えば、数値解を差分法で求めようとする、4次元の問題となり、膨大なメモリと計算時間が必要になると予測される。幸いな事に、我々の問題には解析解が存在する。以下、変数分離法と Fourier 解析に基づく解析解について説明する。

関数 Φ を各変数の関数の積に分解できるとして[1]、

$$\Phi(t, x, y, z) = T(t)X(x)Y(y)Z(z) \quad (25)$$

と表わす。これを Laplace の方程式(3)に代入して Φ で割ると、

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (26)$$

が得られる。境界条件(6)より、

$$\frac{dX(0)}{dx} = \frac{dX(a)}{dx} = 0 \quad (27)$$

となる。同様に、

$$\frac{d\Phi(0)}{dy} = \frac{d\Phi(b)}{dy} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{dZ(-c)}{dz} = 0 \quad (29)$$

となる。また、液面と大気との境界条件(23)は

$$g \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = 0 \quad (30)$$

となる。さらに、初期条件(24)は

$$\frac{dT(0)}{dt} = -\frac{g}{XYZ} f_I(x, y) \quad (31)$$

となる。(26)式を変形して、

$$-\left(\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}\right) = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (32)$$

とする。式(32)において左辺は y, z のみの関数、右辺は x のみの関数であるから、両辺共に定数でなければならない。そこで、

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \quad (33)$$

である。便宜上、 $-\alpha^2$ と負に設定した。同様に、

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \quad (34)$$

である。さらに、

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad (35)$$

である。定数を正としたのは、式(25)より、

$$-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (36)$$

でなければならないからである。方程式(33)は容易に解

けて、一般解は

$$X = c_X \cos(\alpha x) + s_X \sin(\alpha x) \quad (37)$$

となる。境界条件(27)を満たすのは

$$s_X = 0 \quad \alpha = \frac{\pi m}{a} \quad m: \text{integer} \quad (38)$$

の場合のみである。ここで、 c_X は任意であるので、 $c_X = 1$ とする。そこで、

$$X_m = \cos(\alpha_m x) \quad \alpha_m = \frac{\pi m}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (39)$$

が方程式(33)の境界条件(27)での特別解である。同様に、方程式(34)の境界条件(28)での特別解、

$$Y_n = \cos(\beta_n y) \quad \beta_n = \frac{\pi n}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (40)$$

を得る。方程式(34)の一般解は、

$$Z = c_Z \cosh(\gamma z) + s_Z \sinh(\gamma z) \quad (41)$$

である。境界条件(29)から

$$\tanh(\gamma c) = s_Z / c_Z \quad (42)$$

が得られるので、

$$Z = c_Z \cosh\{\gamma(z+c)\} / \cosh(\gamma c) \quad (43)$$

となる。係数 s_Z は任意であるので、結局、方程式(35)の境界条件(29)での特別解は

$$Z_{m,n} = \cosh\{\gamma_{m,n}(z+c)\} \quad \gamma_{m,n} = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} \quad (44)$$

である。次に、液面と大気境界面での境界条件(31)は

$$g \gamma_{m,n} \tanh(\gamma_{m,n} c) + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = 0 \quad (45)$$

となる。そこで、方程式(45)の一般解、

$$T = c_T \cos(\omega_{m,n} t + \delta_{m,n}) \quad \omega_{m,n} = \sqrt{g \gamma_{m,n} \tanh(\gamma_{m,n} c)} \quad (46)$$

を得る。ここで、 $c_T, \delta_{m,n}$ は任意の定数である。特に、

$c_T = 1, \delta_{m,n} = \pi/2$ とおいて、下記のようにする。

$$T_{m,n} = \cos(\omega_{m,n} t + \pi/2) = -\sin(\omega_{m,n} t) \quad (47)$$

従って、境界条件を満たす方程式(3)の一般解は

$$\Phi(t, x, y, z) = -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \sin(\omega_{m,n} t) \cdot \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \cosh\{\gamma_{m,n}(z+c)\} \quad (48)$$

である。ここで、 $A_{m,n}$ は任意の定数である。

ここで、波面は式(21)で計算される。式(21)において、 Φ を時間で偏微分した後、 $\Phi_t(t, x, y, z)$ の z 座標は ζ と置くべきである。すなわち、 $\zeta = -\Phi_t(t, x, y, \zeta) / g$ である。ところが、実際には、波面は $\zeta = 0$ の近傍で生ずると考え、式(21)を計算するには、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_t(t, x, y, 0)}{\partial t} = \frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \omega_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t) \cdot \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \cosh(\gamma_{m,n} c) \quad (49)$$

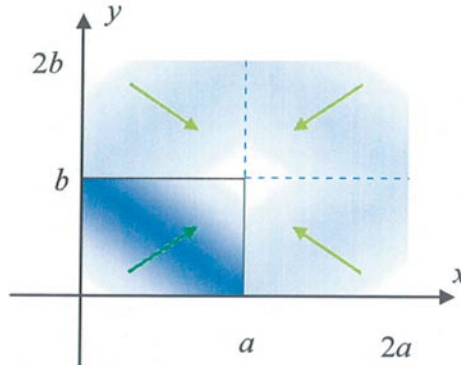
で十分な近似が得られる。そこで、波面の初期条件(24)は、

$$g f_I(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \omega_{m,n} \cosh(\gamma_{m,n} c) \cdot \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (50)$$

のように表わされる。

4. 関数 $f_I(x, y)$ の Fourier 級数

関数 $f_I(x, y)$ は領域 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ で定義されているが、これを次の式により $0 \leq x \leq 2a, 0 \leq y \leq 2b$ に括

Fig.2 関数 $f_I(x, y)$ の拡張

張する(Fig.2).

$$f_I(2a - x, y) = f_I(x, y), f_I(x, 2b - y) = f_I(x, y) \quad (51)$$

一般に、領域 $0 \leq x < 2a, 0 \leq y < 2b$ で定義された関数は、

$$f_I(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{I,m,n} e^{\pi j(m \frac{x}{a} + n \frac{y}{b})} \quad (52)$$

のように Fourier 級数に展開できる。そして、Fourier 係数は

$$F_{I,m,n} = \frac{1}{4ab} \int_0^{2a} \int_0^{2b} f_I(x, y) e^{-\pi j(m \frac{x}{a} + n \frac{y}{b})} dx dy \quad (53)$$

で与えられる。式(51)の関係を考慮すると、

$$F_{I,m,n} = \frac{1}{4ab} \int_0^{2a} \int_0^{2b} f_I(x, y) \cos(\pi m \frac{x}{a}) \cos(\pi n \frac{y}{b}) dx dy \quad (54)$$

となり、 $F_{I,m,n}$ は実数である。式(54)より、直ちに次の性質があることがわかる。

$$F_{I,-m,n} = F_{I,m,n} \quad F_{I,m,-n} = F_{I,m,n} \quad F_{I,-m,-n} = F_{I,m,n} \quad (55)$$

この性質を用いると、

$$\begin{aligned} f_I(x, y) &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{F}_{m,n} \cos(\pi m \frac{x}{a}) \cos(\pi n \frac{y}{b}) \\ &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{F}_{m,n} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \end{aligned} \quad (56)$$

が得られる。ここで、

$$\hat{F}_{m,n} \equiv \begin{cases} F_{I,0,0}/4 & m=n=0 \\ F_{I,m,0}/2 & m>0 \\ F_{I,0,n}/2 & n>0 \\ F_{I,m,n} & m,n>0 \end{cases} \quad (57)$$

である。そこで、 $A_{m,n}$ を

$$A_{m,n} \omega_{m,n} \cosh(\gamma_{m,n} c) = 4g \hat{F}_{m,n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (58)$$

のように選定すれば、初期条件(50)が満たされる。従って、係数は

$$A_{m,n} = \frac{4g \hat{F}_{m,n}}{\omega_{m,n} \cosh(\gamma_{m,n} c)} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (59)$$

で得られる。また、任意の時刻での波面は次式で得られる。

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_I(t, x, y, 0)}{\partial t} \\ &= 4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t) \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \end{aligned} \quad (60)$$

5. 有限 Fourier 変換による解

解析的な解は、理論的な結果として極めて重要であ

る。しかし、実際の計算では、多くの困難が伴う。それは、級数が無限級数であること、Fourier 係数の計算に定積分が含まれること等である。そこで、我々は、有限 Fourier 変換による手法を提案する。この場合、初期形状を表す関数 $f_I(x, y)$ の領域 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ の全ての値ではなくて、格子点での値だけを用いる。今、 M, N を正の整数として、プールの横幅 a を M 等分し、縦幅 b を N 等分する。このとき、 k, ℓ は整数として

$$x_k = \Delta x \cdot k \quad y_\ell = \Delta y \cdot \ell \quad 0 \leq k \leq M \quad 0 \leq \ell \leq N \quad (61)$$

とする。ここで、 $\Delta x = a/M, \Delta y = b/N$ である。格子点 (x_k, y_ℓ) での $f_I(x, y)$ の値を $f_{k,\ell} \equiv f_I(x_k, y_\ell)$ ($0 \leq k \leq M, 0 \leq \ell \leq N$) とする。さらに、 $f_{k,\ell}$ の定義を、

$$f_{2M-k,\ell} = f_{k,\ell} \quad f_{k,2N-\ell} = f_{k,\ell} \quad f_{2M-k,2N-\ell} = f_{k,\ell} \quad (62)$$

により、 $0 \leq k \leq 2M, 0 \leq \ell \leq 2N$ へ拡張する。次に、有限 Fourier 変換を整数 m, n ($0 \leq m < 2M, 0 \leq n < 2N$) として、

$$F_{m,n} = \frac{1}{4MN} \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{\ell=0}^{2N-1} f_{k,\ell} e^{-2\pi j(\frac{km}{2M} + \frac{\ell n}{2N})} \quad (63)$$

とする。ここで、 $F_{m,n}$ は複素スペクトルで、逆有限 Fourier 変換により、 $0 \leq k < 2M, 0 \leq \ell < 2N$ に対して

$$f_{k,\ell} = \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=0}^{2N-1} F_{m,n} e^{2\pi j(\frac{km}{2M} + \frac{\ell n}{2N})} \quad (64)$$

が成り立つ[6]。式(62)から $0 \leq m < 2M, 0 \leq n < 2N$ で

$$F_{m,n} = \frac{1}{4MN} \sum_{\ell=0}^{2N-1} \sum_{k=0}^{2M-1} f_{k,\ell} \cos(\frac{\pi km}{M}) \cos(\frac{\pi \ell n}{N}) \quad (65)$$

が成り立つ。すなわち、 $F_{m,n}$ は実数となる。式(65)より $0 \leq m \leq 2M, 0 \leq n \leq 2N$ で

$$F_{2M-m,n} = F_{m,n} \quad F_{m,2N-n} = F_{m,n} \quad F_{2M-m,2N-n} = F_{m,n} \quad (66)$$

が成り立つ。次に、 $F_{m,n}$ により $F_{I,m,n}$ を近似することを考える。式(54)より、 $0 \leq m < M, 0 \leq n < N$ に対して

$$\begin{aligned} F_{I,m,n} &= \frac{1}{4ab} \int_0^{2a} \int_0^{2b} f_I(x, y) \cos(\pi m \frac{x}{a}) \cos(\pi n \frac{y}{b}) dx dy \\ &\approx \frac{\Delta x \Delta y}{4ab} \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{\ell=0}^{2N-1} f_I(x_k, y_\ell) \cos(\pi m \frac{x_k}{a}) \cos(\pi n \frac{y_\ell}{b}) \quad (67) \\ &= \frac{1}{4MN} \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{\ell=0}^{2N-1} f_{k,\ell} \cos(\frac{\pi mk}{M}) \cos(\frac{\pi n \ell}{N}) = F_{m,n} \end{aligned}$$

であることがわかる。ここで、

$$\hat{F}_{m,n} \equiv \begin{cases} F_{0,0}/4 & m=n=0 \\ F_{m,0}/2 & m>0 \\ F_{0,n}/2 & n>0 \\ F_{m,n} & m,n>0 \end{cases} \quad (68)$$

とする。波面 ζ を表す式(60)において、和の上限を有限とし、格子点 (x_k, y_ℓ) での値を考えると、

$$\begin{aligned} \zeta(t, x_k, y_\ell) &= 4 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t) \cos(\alpha_m x_k) \cos(\beta_n y_\ell) \quad (69) \\ &\approx 4 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t) \cos(\frac{\pi km}{M}) \cos(\frac{\pi \ell n}{N}) \end{aligned}$$

のように近似できる。しかし、式(69)の右辺の式は直接有限逆 Fourier 変換できない(横 M 点、縦 N 点の有限 Fourier 変換ではない)。式(69)の右辺を有限逆 Fourier 変換できるように工夫を施す。まず、 $\omega_{m,n}$ の定義を拡張して、 $0 \leq m \leq 2M, 0 \leq n \leq 2N$ に対して

$$\omega_{2M-m,n} = \omega_{m,n} \quad \omega_{m,2N-n} = \omega_{m,n} \quad \omega_{2M-m,2N-n} = \omega_{m,n} \quad (70)$$

と考える。式(70)により得られる $\omega_{m,n}$ ($m > M, n > N$) は式(46)によるものとは異なる。拡張された $\omega_{m,n}$ を用いて、

$$\begin{aligned} P_{k,t} &= \sum_{m=0}^{2M-1} \{\hat{F}_{m,0} \cos(\omega_{m,0}t) - \hat{F}_{m,N} \cos(\omega_{m,N}t)(-1)^t\} e^{j\frac{\pi km}{M}} \\ Q_{k,t} &= \sum_{n=0}^{2N-1} \{\hat{F}_{0,n} \cos(\omega_{0,n}t) - \hat{F}_{M,n} \cos(\omega_{M,n}t)(-1)^k\} e^{j\frac{\pi ln}{N}} \\ R_{k,t} &= \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=0}^{2N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) e^{j(\frac{\pi km}{M} + \frac{\pi ln}{N})} \\ &= \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=0}^{2N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) \cos(\frac{\pi km}{M}) \cos(\frac{\pi ln}{N}) \end{aligned} \quad (71)$$

を定義する。ここで定義された $P_{k,t}, Q_{k,t}, R_{k,t}$ はそれぞれ $2M$ 点、 $2N$ 点、 $2M \times 2N$ 点の有限逆 Fourier 変換である。 $R_{k,t}$ は一見すると式(69)の右辺の式と似ているが、異なるものである。すこし計算をして、

$$\begin{aligned} \zeta(t, x_k, y_l) &\approx 4 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) \cos(\frac{\pi km}{M}) \cos(\frac{\pi ln}{N}) \\ &= P_{k,t} + Q_{k,t} + R_{k,t} + \hat{F}_{0,0} \cos(\omega_{0,0}t) + \hat{F}_{M,N} \cos(\omega_{M,N}t)(-1)^{k+l} \\ &\quad - \hat{F}_{M,0} \cos(\omega_{M,0}t)(-1)^k - \hat{F}_{0,N} \cos(\omega_{0,N}t)(-1)^l \end{aligned} \quad (72)$$

となる(付録参照)。従って、 $\zeta(t, x_k, y_l)$ ($0 \leq k < M, 0 \leq l < N$) は有限逆 Fourier 変換により求められる。

6. 高速 Fourier 変換 FFT による計算

有限 Fourier 変換は、点数が

$$M = 2^{m_s} \quad N = 2^{n_s} \quad (73)$$

のように 2 のべきで与えられる場合には、非常に効果的な計算法が知られている。すなわち、Fast Fourier 変換と呼ばれる。これは、決して近似計算法ではない。因数分解を効果的に実施することにより高速演算を達成しているのである。通常、式(71)の $R_{k,t}$ のような有限 Fourier 変換を式の通りに計算すると、全部で $(4MN)^2 = 2^{2(m_s+n_s+2)}$ の演算回数が必要である。しかし、FFT の場合には、 $(4MN)(m_s + n_s + 2) = 2^{m_s+n_s+2} \cdot (m_s + n_s + 2)$ で計算できる。たとえば、 $M = 2^6, N = 2^6$ は $2^{2(m_s+n_s+2)} = 2^{28}$, $2^{m_s+n_s+2}(m_s + n_s + 2) = 2^{14} \cdot 14 \approx 2^{17.8}$ であるから、 $2^{28} / 2^{17.8} = 2^{10.2} \approx 1.17 \cdot 10^3$ となり FFT による計算は 1,000 倍以上速い。

7. 処理結果

本論文で提案する FFT を用いた波面計算をプログラム化して検討する。プログラム名は PoolWaveTst で MS Visual Studio 2008 上の C# により作られている。プログラムを起動すると、メインフォームが現れ、さらに Fig.3 のパラメータ設定のダイアログ、Fig.4 の 3D 画像描画のパラメータ設定ダイアログが現れる。描画を開始すると、Fig.5~Fig.8 に示すような波面の動画が現れる。初期波形は

$$f_I(x, y) = \begin{cases} h_I & (x, y) \in P_A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (73)$$

とする。ここで、平行四辺形領域 P_A は

$$P_A = [a_I - 3\Delta x, a_I + 3\Delta x] \times [b_I - 3\Delta y, b_I + 3\Delta y] \quad (74)$$

で与えられる。ここで示す例はパラメータを

$$\begin{aligned} a &= 1[\text{m}], b = 1[\text{m}], c = 10[\text{m}], m_s = 6, n_s = 6 \\ aI &= 0.5[\text{m}], bI = 0.5[\text{m}], hI = -0.5[\text{m}] \end{aligned} \quad (75)$$

と設定した場合である。また、時間軸は

$$K = 1000, t_{\max} = 10[\text{s}], h = t_{\max} / K = 100[\text{ms}] \quad (76)$$

として h 時間毎の変化を実際には $T_s = 50[\text{ms}]$ で表示している。Fig.5~Fig.8 は開始後それぞれ $10h, 110h, 210h, 310h$ 時点での波形を表している。

8. まとめ

計算機ゲーム等で用いられる背景としての水面波動を動画として作成するために、直方体プールの水面の波形の解析解を求め、これを有限 Fourier 変換により近似する手法を与えた。FFT により波面を計算することにより、動画像としてより実際の波形を近似する映像を十分な処理速度で作成できる事を示した。

参考文献

- [1] コシリヤコフ他「物理・工学における偏微分方程式」岩波書店、1976.8
- [2] 巽友正「連続体の力学」、岩波書店、1995
- [3] 高見頼郎、河村哲也「偏微分方程式の差分法」東京大学出版会、1994
- [4] 立花康夫、河合敏勝「電気現象の差分法による検討」、神奈川工科大学研究報告 B, Vol.30, pp.61-65, 2006.3
- [5] 矢川元基他「計算力学」岩波書店、2000.5
- [6] 木村英紀「Fourier-Laplace 解析」岩波書店、1993.9

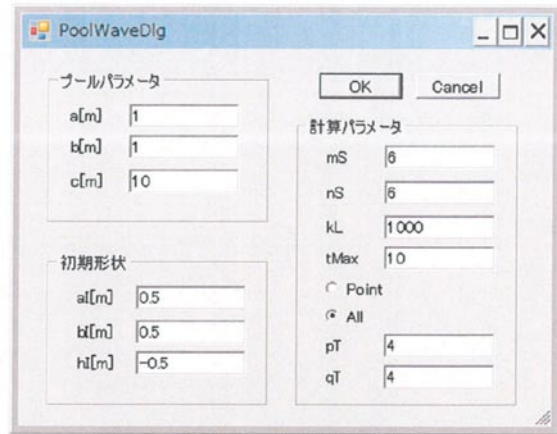


Fig.3 パラメータ設定ダイアログ

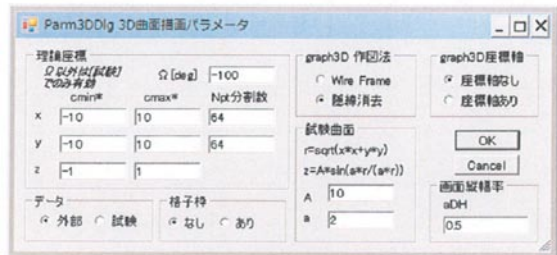


Fig.4 3D 画像設定ダイアログ

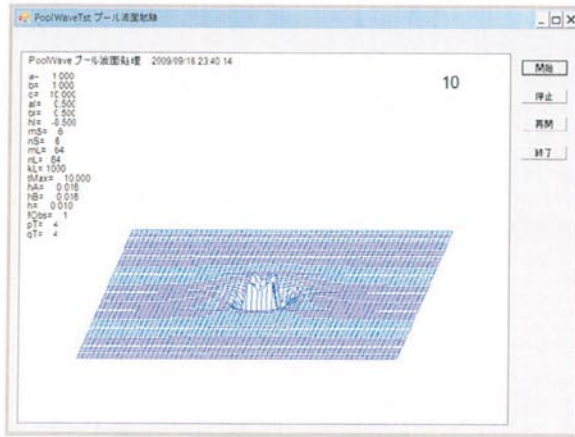


Fig.5 開始後 10h[s]の波形

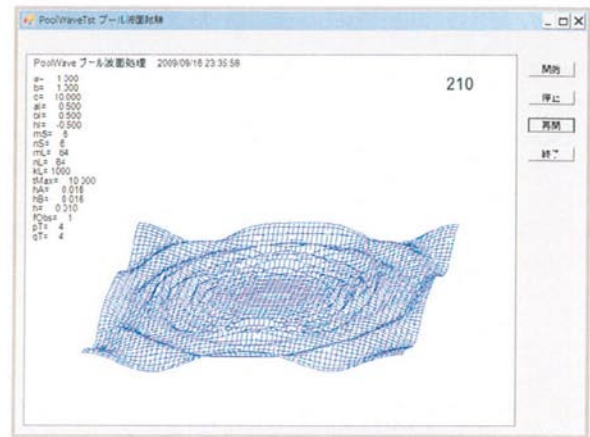


Fig.7 開始後 210h[s]の波形

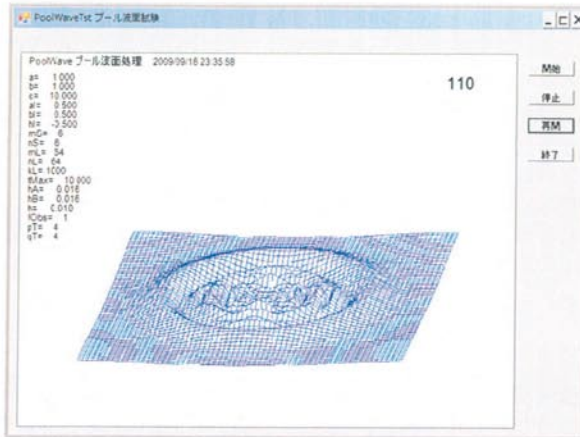


Fig.6 開始後 110h[s]の波形

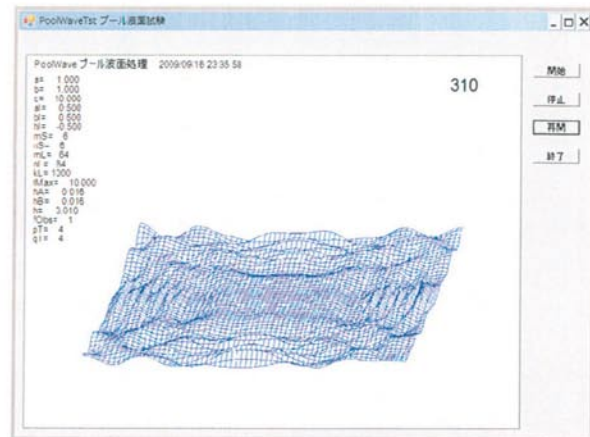


Fig.8 開始後 310h[s]の波形

附録 式(72)の証明

$$\begin{aligned}
 R_{k,t} &\equiv \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=0}^{2N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) e^{\pi j(\frac{km}{M} + \frac{\ell n}{N})} = \sum_{m=0}^{2M-1} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) e^{\pi j(\frac{km}{M} + \frac{\ell n}{N})} + \sum_{n'=1}^N \hat{F}_{m,n'} \cos(\omega_{m,n'}t) e^{\pi j(\frac{km}{M} + \frac{\ell n'}{N})} \right\} \\
 &= \sum_{m=0}^{2M-1} \left[2 \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) \cos\left(\frac{\pi \ell n}{N}\right) e^{\pi j \frac{km}{M}} - \{ \hat{F}_{m,0} \cos(\omega_{m,0}t) - \hat{F}_{m,N} \cos(\omega_{m,N}t)(-1)^\ell \} e^{\pi j \frac{km}{M}} \right] \quad (n' = 2N - n) \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{2M-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) \cos\left(\frac{\pi \ell n}{N}\right) e^{\pi j \frac{km}{M}} - P_{k,t} \quad (m' = 2N - m) \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi \ell n}{N}\right) \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) e^{\pi j \frac{km}{M}} + \sum_{m'=1}^M \hat{F}_{m',n} \cos(\omega_{m',n}t) e^{-\pi j \frac{km'}{M}} \right\} - P_{k,t} \\
 &= 4 \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi \ell n}{N}\right) \sum_{m=0}^{M-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) \cos\left(\frac{\pi km}{M}\right) - 2 \sum_{n=0}^{N-1} \{ \hat{F}_{0,n} \cos(\omega_{0,n}t) - \hat{F}_{M,n} \cos(\omega_{M,n}t)(-1)^k \} \cos\left(\frac{\pi \ell n}{N}\right) - P_{k,t} \\
 &= 4 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) \cos\left(\frac{\pi km}{M}\right) \cos\left(\frac{\pi \ell n}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N-1} \{ \hat{F}_{0,n} \cos(\omega_{0,n}t) - \hat{F}_{M,n} \cos(\omega_{M,n}t)(-1)^k \} (e^{j \frac{\pi \ell n}{N}} + e^{-j \frac{\pi \ell n}{N}}) - P_{k,t} \\
 &= 4 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) \cos\left(\frac{\pi km}{M}\right) \cos\left(\frac{\pi \ell n}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N-1} \{ \hat{F}_{0,n} \cos(\omega_{0,n}t) - \hat{F}_{M,n} \cos(\omega_{M,n}t)(-1)^k \} e^{j \frac{\pi \ell n}{N}} \\
 &\quad - \sum_{n'=N+1}^{2N} \{ \hat{F}_{0,n'} \cos(\omega_{0,n'}t) - \hat{F}_{M,n'} \cos(\omega_{M,n'}t)(-1)^k \} e^{j \frac{\pi \ell n'}{N}} - P_{k,t} \\
 &= 4 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}_{m,n} \cos(\omega_{m,n}t) \cos\left(\frac{\pi km}{M}\right) \cos\left(\frac{\pi \ell n}{N}\right) - Q_{k,t} - P_{k,t} \\
 &\quad - \hat{F}_{0,0} \cos(\omega_{0,0}t) + \hat{F}_{0,N} \cos(\omega_{0,N}t)(-1)^\ell + \hat{F}_{M,0} \cos(\omega_{M,0}t)(-1)^k - \hat{F}_{M,N} \cos(\omega_{M,N}t)(-1)^{k+\ell}
 \end{aligned}$$