

[研究論文]

断熱循環と熱平衡

宍戸文雄

電気電子情報工学科

Adiabatic circulation and thermal equilibrium

Fumio SHISHIDO

Abstract

The relation between the apparent stability of adiabatic circulation and thermal equilibrium is examined. The condition of both constant temperature and constant sum of chemical potential and gravitational potential implicitly includes the gravitational equilibrium. While no entropy change occurs with the transfer of a small portion of gas in adiabatic equilibrium, the transfer of an independent particle certainly causes the increase of entropy. The quantity of energy supply is calculated which is required to cause an adiabatic circulation under the boundary condition of initial isothermal equilibrium. Also the thermodynamic process is considered to cause reversibly an isothermal circulation under the boundary condition of initial adiabatic equilibrium. When the adiabatic equilibrium is attained it corresponds to the extremum of total energy. Stationary adiabatic circulation is kept with no additional energy supply. It seems to correspond to a quasi-equilibrium in which the apparent stability of adiabatic circulation is kept.

Keywords: Apparent stability of adiabatic circulation, extremum of total energy, adiabatic equilibrium and isothermal equilibrium

1. 序

地球環境問題の基本に大気の断熱循環がある。定常的な断熱循環が持続しているとき、それはあたかも準平衡状態にあるかのように見える。外部攪乱が無い条件で気体を準静的に循環させるとき、エネルギー変化とエントロピー変化は零に見える。熱伝達率零の極限においては、静止状態の大気のエントロピーが増加しないことは自明である。然るに、定常的な循環が続いてもエネルギー変化とエントロピー変化は零に見えることは熱力学の基本と如何に整合するのであろうか。平衡状態では系の温度は一定、化学ポテンシャルも一定であるとの基本命題と矛盾しないのであろうか。そのことを以下に考察する。熱力学の関係を吟味し、先ず簡単なモデルの循環を計算した後一般論を調べる。

問題は物理の基本概念の相互関係への考察であるから、最新の研究論文には殆ど見られない。教科書・概説書の類にもこの問題を論じた箇所が見出しにくい。その理由は、問題が物理学と地球物理学の境界にあることによるのかと

も推測される。地球物理学では断熱循環に関連する精密研究の量は膨大である。基本定理を所与のものと見なして、現実の対象の精密解析に集中する。基本概念の相互関係を調べなおすことが問題解決に寄与するわけではないので、そこには焦点があたらない。基本概念の相互関係が深く解析されるのは基礎物理学である。物理での熱力学においては基本概念の相互関係が深く追求される。そのとき諸々の例が扱われる。電界磁界の作用、不均一物質等である。しかし大気循環を扱う例は少ない。物性論における電界内での電子拡散の平衡の問題は大気循環と似るが数学的等価にはならない。重力と電界とは等価に置き換えられるが、電子拡散圧力は気圧とは等価に置き換えられないからである。以上の経緯により、この論文が引用する文献は殆ど無い。

2. 重力平衡と等温条件

重力平衡における圧力 P と高さ y の関係は、密度 ρ と重力加速度 g を含む次式で表わされる。

$$-dP = g\rho dy \quad (1)$$

両辺に体積 V をかけると、右辺は位置エネルギー Π の微分となる。

$$-VdP = d\Pi, \quad \text{但し} \quad \Pi = (\rho V) \int g dy \quad (2)$$

(ρV) は一定であるから (2) が成立する。

問題の対象となる対流圏と海洋では g が定数と見なせるので $\Pi = g(\rho V)y$ としてよい。

熱力学の基本式は、

$$dU = TdS - PdV$$

である。 U は内部エネルギー、 T は温度、 S はエントロピーである。これと (2) を組み合わせると、

$$d(\Pi + U) = TdS - PdV - VdP$$

従って、

$$d(\Pi + U + PV) = TdS \quad (3)$$

以下の3例に於いて、(3)の意味は、

A. 気体の断熱上下動では、位置エネルギーとエンタルピーの和は一定である。

B. 気体の等温上下動の理想気体近似では、エンタルピーは不変、位置エネルギーの減少分が発熱量に等しい。

C. 海水上下動の非圧縮近似では、 U と S は不変、位置エネルギーの減少がエンタルピーの増大 VdP に等しい。大局的にみると位置エネルギーの減少分だけ外部にエネルギー供与している。局所的にみると物性は全く変化しないのであるが、エンタルピーの増大分がエネルギー供与の履歴になっていることが興味深い。

次に化学ポテンシャルを調べる。二点間の粒子の移動による系のエントロピー変化が零であるためには、

$$\pi + \mu = \pi + u + Pv - Ts \quad (4)$$

が二点間で等しくなくてはならない。ここで π, μ, u, v, s は、それぞれ粒子一個についての、位置エネルギー、化学ポテンシャル、内部エネルギーの平均、体積、エントロピーである。(3)を考慮して(4)を微分すると、

$$d(\pi + \mu) = -sdT \quad (5)$$

従って、温度一定の場合 $(\pi + \mu)$ は一定である。

故に次の命題が成立する。重力平衡、温度一定、

$(\pi + \mu)$ 一定、の3条件のうち2条件が満足されれば残りの1条件は満足される。言い換えれば、温度一定と $(\pi + \mu)$ 一定の2条件がエントロピー極大を保証することが熱力学の基本であるが、それに加えてさらに重力平衡を保証する。

では、断熱平衡における安定性はどう保証されるのだろうか。温度一定ではないので、二点間のエネルギーのみの移動によりエントロピーが変化することは勿論であるが、二点間の粒子移動によるエントロピー変化はどうかを調べよう。そのため、体積一定の系から平均エネルギーを持つ1粒子を取り除くときのエントロピー減少に着目すと、それは、

$$\delta S = -\frac{(\pi + u) - (\pi + \mu)}{T} \quad (6)$$

(6)に(4)を代入すると、

$$\delta S = -s + \frac{Pv}{T} \quad (7)$$

これを粒子移動によるエントロピー変化と呼ぶことにする。右辺第二項の意味を考える。系から粒子を取り除いた後は系の密度が減少している。それを補償するため v だけ断熱圧縮させる。それによるエネルギー増加を補償するための熱を取り除いた後のエントロピー減少が(7)の第二項に等しい。結局第一項だけが残る。最初の系の示強変数一定に保ち系を少し小さくしたことに相当するので、当然の結果である。右辺第一項だけを流体移動によるエントロピー変化と呼ぶことにする。

断熱平衡における断熱循環においては、粒子移動ではなく流体移動によるエントロピー変化が寄与し、従って全エントロピーは一定である。

粒子移動において、理想気体の場合には第二項は定数であるから、やはり全エントロピー一定が成立しそうに見えるがこれは正しくない。1の位置から2の位置への粒子移動を考える。1から取り去る $(\pi_1 + u_1)$ をそのまま2に

与えるのである。 $(\pi_2 + u_2)$ は重力平衡環境内での移動過程で外部とのエネルギー授受により変化した値である。従って、

$$-\delta S_1 = \frac{(\pi_1 + u_1) - (\pi_1 + \mu_1)}{T_1} \quad (8)$$

$$\delta S_2 = \frac{(\pi_1 + u_1) - (\pi_2 + \mu_2)}{T_2} \quad (9)$$

(5)を(9)に代入すると、

$$-\delta S_1 = s_1 - \frac{P_1 v_1}{T_1} \quad (10)$$

$$\delta S_2 = s_1 - \frac{P_1 v_1}{T_2} \quad (11)$$

従って、温度の異なる二点間の粒子移動によりエントロピーは必ず変化する。温度が一定でないこと及び $(\pi + \mu)$ が一定でないことの両方の影響が打ち消しあってエントロピー変化が零になることは無い。これは自明に見える結果である。熱伝達零の極限で断熱平衡にある状態から、仮想的に平均自由行程を大きくすると、粒子移動により熱緩和が始まる筈である。一次の項の影響が消える場合は考え難い。

3. 管内の断熱循環

気体の断熱循環の一般論を論ずる準備のため、先ず簡単なモデルを考察する。図1では長方形に曲げられた管に等温気体が満たされている。右側の縦管途中の隔壁が僅か上昇して気体が僅か断熱循環をした後の様子を調べる。管の断面積は1とする。重力加速度 g も1とする。

上下の横管が長いときは、右上に冷えた気体が侵入し左下に温まった気体が侵入するが、上下の横管内の圧力は変わらない。左の縦管内の変化と右のそれとは独立であり解は簡単であるが、一般論の考察に寄与しない。

上下の横管が短い極限が一般論の考察へ寄与するので詳しく論ずる。隔壁上昇に伴う隔壁に接する質量の移動量を Δ 、そこでの密度を ρ とする。仮に等温循環であれば各位置の圧力変化は零、各質点の圧力変化は右側で $-\Delta$ 左側で Δ となる。

さて、断熱循環では、
右上の管内に生ずる圧力変化を

$$\delta P_1 = -(\Delta + \varepsilon_3) + 2\varepsilon_1 \quad (12)$$

$$\text{右下では} \quad \delta P_2 = -(\Delta + \varepsilon_3) - 2\varepsilon_2$$

$$\text{左側では} \quad \delta P_3 = (\Delta + \varepsilon_3)$$

と表す。各質点の圧力変化は各領域で定数となる。各位置の圧力変化は位置の複雑な関数である。

右上の断熱膨張は、

$$[(1/\rho_1 - 1/\rho) - K_1][(\Delta + \varepsilon_3) - 2\varepsilon_1] \quad (13)$$

第一因子内の第一項は等温圧縮率である。等温膨張とは全

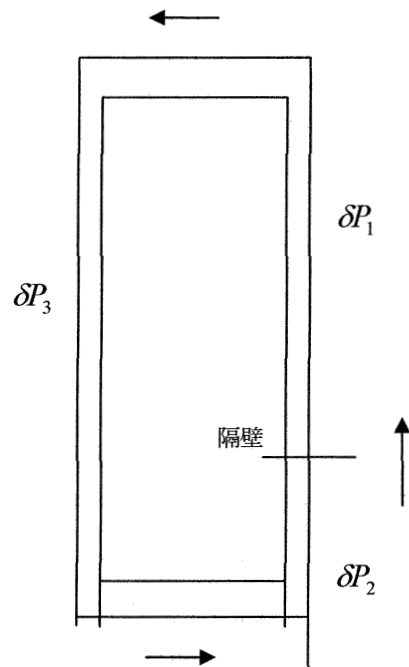
体の状態を変えず移動することなのでこの係数となる。こ

こで ρ_1 は上端での密度である。 K_1 は断熱圧縮率と等温圧縮率の差である。

次に上の横管内の移動を調べる。左右の各質点の圧力変化が等しいときは移動零である。左右の圧力変化が異符号で絶対値が等しいときはその絶対値だけの移動がある。一般には左右の圧力変化の差の半分の移動が生じて圧力の連続が保たれる。従って上の横管内の移動量は

$$\text{左向きに} \quad (\Delta + \varepsilon_3) - \varepsilon_1 \quad (14)$$

図 1



断熱膨張(13)は上の横管への移動量(8)の体積と隔壁上昇の体積の差に等しいので、

$$\begin{aligned} & [(1/\rho_1 - 1/\rho) - K_1][(\Delta + \varepsilon_3) - 2\varepsilon_1] \\ & = [(\Delta + \varepsilon_3) - \varepsilon_1]/\rho_1 - \Delta/\rho \end{aligned}$$

右下と左側の領域も同様の考察により、

$$\begin{aligned} & [(1/\rho - 1/\rho_2) - K_2][(\Delta + \varepsilon_3) + 2\varepsilon_2] \\ & = \Delta/\rho - [(\Delta + \varepsilon_3) + \varepsilon_2]/\rho_2 \end{aligned}$$

$$[-(1/\rho_1 - 1/\rho_2) + (K_1 + K_2)][(\Delta + \varepsilon_3)]$$

$$=[(\Delta + \varepsilon_3) + \varepsilon_2] / \rho_2 - [(\Delta + \varepsilon_3) - \varepsilon_1] / \rho_1$$

三式の両辺を整理して、

$$\begin{aligned} &-(1/\rho_1 - 1/\rho)(2\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - K_1[(\Delta + \varepsilon_3) - 2\varepsilon_1] \\ &= -(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / \rho_1 \\ &[(1/\rho - 1/\rho_2)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - K_2[(\Delta + \varepsilon_3) + 2\varepsilon_2]] \\ &= -(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) / \rho_2 \\ &-(1/\rho_1 - 1/\rho_2)\varepsilon_3 + (K_1 + K_2)[(\Delta + \varepsilon_3)] \\ &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / \rho_1 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) / \rho_2 \end{aligned} \quad (15)$$

この式の意味を考える。等温膨張では全体の状態は変わらない。各質点の圧力は増減するが、各位置の圧力は変わらない。初めに隔壁上昇により等温膨張させたと考え、その後隔壁を固定したまま各質点の位置と圧力を断熱膨張に対応するように補正する。上式はその補正に対応する式である。右辺は補正移動量である。左辺第一項は補正圧力による等温膨張の寄与、第二項は断熱膨張と等温膨張の差である。

三式を再び整理して、

$$\begin{aligned} (2A-1)(\varepsilon_1 / \rho_1) + (1/\rho + K_1)\varepsilon_3 &= -K_1\Delta \\ (2B-1)(\varepsilon_2 / \rho_2) + (1/\rho - K_2)\varepsilon_3 &= K_2\Delta \\ (\varepsilon_1 / \rho_1) + (\varepsilon_2 / \rho_2) - (K_1 + K_2)\varepsilon_3 &= (K_1 + K_2)\Delta \end{aligned} \quad (16)$$

これを解いて左辺の3未知数が右辺の Δ で表わされる。ここで、

$$\begin{aligned} A &= 1 - \rho_1 / \rho - \rho_1 K_1 \\ B &= \rho_2 / \rho - 1 - \rho_2 K_2 \end{aligned}$$

隔壁の両側の圧力差は $2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ であり、隔壁によって

なされる仕事 $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Delta / \rho$ を計算すると

$$\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Delta}{\rho} = (K\Delta^2) \frac{\rho_2 - \rho_1 - \rho_1 \rho_2 K}{\rho_2 - \rho_1 - \rho(\rho_1 K_1 + \rho_2 K_2)} \frac{1}{Q} \quad (17)$$

ここで Q は1に近い補正因子である。

$$Q = 1 + \frac{2ABK + AK_1 - BK_2}{A+B} \rho$$

(17)の右辺の最初の $(K\Delta^2)$ 以外の因子は1に近い。このことは初めの隔壁の位置が変化しても仕事の大きさは殆ど変化しないとの直感的予想に合う。

4. 一般論

循環に伴いどのようなエネルギー変化が生ずるかの一般論を以下に論ずる。ある高さの水平面に着目すると、循環に伴い面の上向きの流れと下向きの流れは等量である。等温平衡の部分と断熱平衡の部分とがそれぞれ有限な体積を持って共存する場合を論ずることは難しい。そこで先ず全系が等温平衡の初期条件にあるとき、そのなかで微小体積 V が無限小の断熱循環を始めるときのエネルギー変化を計算する。その後、反対の場合、即ち全系が断熱平衡の初期条件にあるとき、微小体積 V が無限小の等温循環を始めるときのエネルギー変化を計算する。無限小変化を調べることにより、等温平衡と断熱平衡のそれぞれの熱力学的量の大小関係の不等式が判定できる。

等温圧縮率 α を次式で定義する。

$$\frac{\delta V}{V} = -\alpha \delta P, \quad \alpha \approx \frac{1}{P} \quad (18)$$

第二の近似式は理想気体では等式になる。次に断熱圧縮率を次式で定義する。

$$\frac{\delta V}{V} = (-\alpha + k \frac{1}{P}) \delta P, \quad (19)$$

k は無次元の1程度の数値である。

体積 V が dy 断熱下降したときに受ける浮力 F は断熱圧縮された体積と周囲の等温平衡にある体積との差に比例する、即ち(19)と(18)の差に比例するので、

$$F = g\rho \left(\frac{k}{P}\right) V \left(-\frac{dP}{dy}\right) dy \quad (20)$$

これに(1)を代入すると、

$$F = k \frac{(g\rho V)^2}{PV} dy \quad (21)$$

従って、浮力に逆らって供給されるエネルギーは、

$$\delta U = \frac{1}{2} k \frac{(g\rho V)^2}{PV} (dy)^2 \quad (22)$$

従って、単位質量に供給されるエネルギーは、

$$\frac{\delta U}{\rho V} = \frac{1}{2} k g^2 \left(\frac{\rho}{P}\right) (dy)^2 \quad (23)$$

これが一般論である。等温平衡の初期条件で断熱循環を起こすためにはエネルギー供給が必要であることが無限小の変位については判明した。このエネルギーは着目する微小体積 V のエネルギーと外部のエネルギーの和、即ち全エネルギーの増加である。体積 V と周囲にどう配分されるかはここでは分からない。(3)を使って計算することは出来ない。重力平衡において体積 V が移動するときには(3)を使える。然るに、この場合では重力平衡が破れて浮力が生じ、それを補償するために外部から力を与えているのである。従って、(3)を使えない。

次に、全系が断熱平衡の初期条件にあるとき、微小体積が無限小の等温循環を始めるときのエネルギー変化を調べる。断熱平衡の初期条件において、上部と下部の間に熱伝達を促進させると等温平衡に近づくが、それは不可逆過程である。ここでは、可逆的に等温循環を起こす過程を考える。

体積 V を dy_1 下降させると同時に隣接する体積 V を dy_2 上昇させる。このとき二つの体積 V の間には熱伝導を促進させて温度差が生じないように保つ。するとエントロピーは増加しない。 dy_1 と dy_2 が等しいとき、エントロピーは増加しないが温度は初期条件での温度からずれていく。そこで dy_1 と dy_2 を適当な比率に定めると、温度は初期条件から変化せず、しかもエントロピーは増加しない。

下降する体積 V は浮力ではなく下に引きずられる力を受け、上昇する体積 V は上に持ち上げられる力を受ける。従ってこの過程において外部にエネルギーを供給する。このときの力 F と外部に供給するエネルギーはそれぞれ(21)と(22)で与えられる。準静的過程で外部にエネルギーを供給するということは、現実には運動エネルギー増大という現象に対応する。

前者の過程、即ち等温平衡の初期条件での断熱循環の開始は何かの外部攪乱によって生じ、現実にはこれに近いことがおこっている。然るに、後者の過程、即ち断熱平衡の初期条件での等温循環の開始が可逆的に生じることは思考実験に近く現実には起こることは稀と推定される。

図2の $P-V$ グラフにおいて、曲線 t は等温曲線、曲線 s は等エントロピー曲線である。初期条件 A から断熱循

環では $B \cdot C$ に動く。 B と C は独立に動いてよい。等温循環では $D \cdot E$ に動く。このとき D と E は独立には動けない。 AD と AE の距離が適当な比率を保つときにのみ全エントロピーが一定に保たれる。 A の近傍では dP は dy に比例

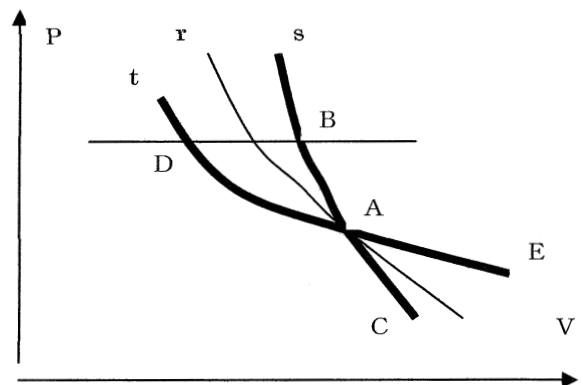
する。 P が一定の水平線と曲線 t および曲線 s との交点に着目すると、二つの交点間の距離は断熱圧縮の体積と等温圧縮の体積の差である、従って二曲線と水平線に囲まれる面積が丁度(22)のエネルギーに比例する。

曲線 t と曲線 s に加えて、その中間の曲線 r も想定できる。三曲線 t 、 s 、 r 、それぞれの曲線に沿って V と P の適当な関数が定数である。 t と s は無限に想定される関数の中の二つの例に過ぎない。然るに、 r が t と s に挟まれる領域を超えてその外側に存在することは有り得ない。何故ならば、 t は熱伝達率無限大の極限、 s は熱伝達率零の極限に対応するからである。 r が t と s に挟まれる領域を超えてその外側に存在することは熱力学の法則に反する。

曲線 t の等温平衡の初期条件に外部攪乱によるエネルギー供給があると曲線 s へ向かって容易にずれることは分かった。それに対して曲線 s の断熱平衡の初期条件から可逆的に外部にエネルギーを放出し、即ち運動エネルギーを増加させる過程は起こり難いことも分かった。可逆的ではなく不可逆的に曲線 t に向かつてずれることは熱伝達により起こる。その緩和時間は熱伝達率によって決まる。曲線 r の中間の平衡状態の初期条件は s に向かつてても t に向かつててもずれる要因を有するので不安定である。

曲線 s の断熱平衡は熱力学の制限により片側へしかずれない。熱伝導により不可逆的にずれても、外部攪乱によるエネルギー供給があると元に戻る。地球大気は24時間周期の攪乱を受けているので、熱伝達率が極端に大きい場合を除き、ほぼ曲線 s に張り付いているとの結論が得られる。

図2



5. 結論

気体の完全な平衡状態では温度一定であり $(\pi + \mu)$ も一定である。この2条件がエントロピー極大を保証することは熱力学の基本であるが、それに加えてさらに重力平衡を自動的に保証している。重力平衡、温度一定、 $(\pi + \mu)$ 一定、の3条件のうち2条件が満足されれば残りの1条件は自動的に満足されている。

断熱平衡では、重力平衡は満足されているが温度一定ではない、従って $(\pi + \mu)$ 一定ではない。断熱平衡においては、流体移動が続いても全エントロピーは不変である。然るに粒子の移動が生ずると必ずエントロピーは変化する。

等温平衡にある気体に断熱循環を起こすにはエネルギー供給を要する。エントロピーは変わらないが全エネルギーが上昇する。エネルギー供給を続けて断熱平衡が実現すると全エネルギーは極大に達する。そこで断熱循環を続けるにはもはやエネルギー供給は不要である。等温平衡にある気体に断熱循環を起こすに必要なエネルギーは、図2において二曲線 t 、 s と水平線に囲まれる面積に比例する。

等温平衡と断熱平衡の中間の状態では、エントロピーが増えると等温平衡に近づき、エネルギー供与を受けると全エネルギーが増えて断熱平衡に近づく。これは曲線 r に対応し、 s に向かっても t に向かってもずれる要因を有するので不安定である。

然るに、いったん断熱平衡に達してしまうと、全エネルギー極大となり循環が定常的になる。熱力学的準安定状態にある。ここに見かけの分り難さがある。

等温平衡の初期条件から外部攪乱によるエネルギー供給により断熱平衡に近づくことは容易におこる。それに対して、断熱平衡の初期条件から可逆的にエネルギーを放出しながら、即ち運動エネルギーを増加させながら等温平衡に近づく過程は起こりにくい。現実には等温平衡に近づく過程は熱伝導による不可逆過程が主である。外部攪乱を受けて全エネルギーを増加させると断熱平衡に近づく。それをさらに超えた状態、即ち二曲線 t 、 s の外側は熱力学の制限により存在しない。

曲線 s の断熱平衡は熱力学の制限により片側へしかずれない。熱伝達により不可逆的にずれても、外部攪乱によるエネルギー供給があると元に戻る。地球大気は24時間周期の攪乱を受けているので、熱伝達率が極端に大きい場合を除き、ほぼ曲線 s に張り付いているとの結論が得られる。

References

1) 熱力学・統計力学 / 原島鮮著

培風館