[研究ノート] 微分型Fay恒等式の縮約と運動の積分のテータ関数解における値について

土谷洋平

基礎・教養教育センター

Reduction of differential Fay identity and integral of motions of algebro-geometric solutions

Yohei Tutiya

Abstract

In this note, we discuss polynomial solutions of Periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian. The integral of motions of these solutions are written by symmetric functions of soliton length, which obviously correspond to the eigenvalues of Macdonald q-difference operators. The purpose is to show that the so-called algebro-geometric solutions of reduced differential Fay identity degenerate into these polynomial solutions.

Keyword: Fay identity, Hirota Miwa equation, Krichever constraction, Macdonald operator

1. 概要

次の非局所的な可積分方程式を考える。

$$\frac{\partial_t \eta(x,t)}{\eta(x,t)} = \fint_{-1/2}^{1/2} idy\ \eta(y,t)\Delta\cot\{\pi(y-x)\} \quad (1)$$

式中, $\fint$ は Cauchy の主値積分を表し, Δ は γ を複素定数とする離散 Laplacian$\Delta f(y) = f(y-\gamma) - 2f(y) + f(y+\gamma)$ を表すものとする。また, $\eta(x,t)$ は周期境界条件 $\eta(x+1,t) = \eta(x,t)$ を満たすものとする。(1) は [1] において Periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian と呼ばれている方程式である。本稿では [1] で提出した (1) の, 特殊解のある保存量の基底と Macdonald 作用素の固有値が対応するという予想について, 特殊解とは Krichever constraction などで導かれる代数幾何的な解のことであるという説明を述べる。

2. 方程式 (1) の導出とその保存量

$z = e^{2\pi ix}$ とおいて $\eta(x,t)$ の Fourier 級数展開を

$$\eta(z,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_{-n} z^n \quad (2)$$

と書く。この形では (1) 式は

$$\frac{\partial_t \eta(z,t)}{\eta(z,t)} = \sum_{n\neq 0} \mathrm{sgn}(n)(1-q^{|n|})\eta_{-n} z^n \quad (3)$$

となる。両辺で z^0 の係数を比較すると次が分かる。

命題

$\dfrac{\partial \eta_0}{\partial t} = 0$, すなわち η_0 は保存量となる。

このことに注意して

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} \eta_{-n} z^n &= \eta_+ = \frac{\partial_t \tau_+}{\tau_+}, \\ \sum_{n>0} \eta_n z^{-n} &= \eta_- = \frac{\partial_t \tau_-}{\tau_-} \end{aligned} \quad (4)$$

とおくと次の双線形形式が得られる。

$$D_t\ \tau_- \cdot \tau_+ = \varepsilon \underline{\tau}_- \overline{\tau}_+ - \eta_0 \tau_- \tau_+ \qquad (5)$$

ただし D_t は広田微分であり，q シフト作用素を $\overline{f}(z) = f(qz), \underline{f}(z) = f(z/q)$ と書いている。双線形型式 (5) は広田-三輪方程式や離散 KdV 方程式に良く似ていることに気づく。そこで双線形形式を中心においた KP 階層の理論に沿ったやり方で方程式 (5) の導出を説明したい。まず広田-三輪方程式 (離散 KP 方程式) を標準的な表記で次のように書く。

$$\begin{aligned}&(a_3^{-1} - a_2^{-1})\tau^{(l)}\tau^{(m,n)}\\ &\quad +(a_1^{-1} - a_3^{-1})\tau^{(m)}\tau^{(l,n)}\\ &\quad +(a_2^{-1} - a_1^{-1})\tau^{(n)}\tau^{(l,m)} = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

ただし $\tau = \tau(l,m,n)$ であり，シフトを $\tau^{(l)} = \tau(l + a_1, m, n), \tau^{(m)} = \tau(l, m + a_2, n), \tau^{(n)} = \tau(l, m, n + a_3)$ と書くことにする。どれか 1 つの差分間隔を 0 にする極限を考える。ここでは仮に a_1 を 0 にする極限を考えると次の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned}&D_l \tau^{(n)} \cdot \tau^{(m)}\\ &= (a_2^{-1} - a_3^{-1})\big(\tau\tau^{(m,n)} - \tau^{(n)}\tau^{(m)}\big)\end{aligned} \qquad (7)$$

この方程式は KP 階層の理論の応用ではしばしば表れるものであり，[2] などでは differential Fay identity と呼ばれている。ここから (5) を得るには，大雑把に言えば $e^{-clm}\tau$ をあらためて τ とおきなおし，m と n を同一視する縮約条件を課した上で $a_3 - a_2$ の虚部を正の無限大に飛ばせばよい。虚部を無限大にする前の段階では

$$\begin{aligned}&D_t\ \tau(pz) \cdot \tau(z)\\ &= \varepsilon \tau(pq^{-1}z)\tau(qz) - \eta_0 \tau(pz)\tau(z)\end{aligned} \qquad (8)$$

となる。これは [3] において periodic ILW equation with discrete Laplacian と呼ばれている方程式である。ただし差分間隔については $\exp\{2\pi i(a_3 - a_2)\} = p, \exp(2\pi i a_3) = q$ とおいている。ここで $\mathrm{Im}\, p \to \infty$ の極限を考えると (5) が得られる。

双線形形式 (5) の特殊解を，ソリトン方程式の場合のように $\tau_\pm$ を z の多項式であると仮定して探してみる。$\eta_\pm$ が正則である領域に注意すると，1 次式の解としては次をみつけることができる。

$$\begin{cases} \tau_+ = 1 + ze^{(1-q)at}, \\ \tau_- = 1 + \dfrac{\varepsilon - a}{\varepsilon - qa} z^{-1} e^{-(1-q)at}, \end{cases} \qquad (9)$$

2 次式の解としては次をみつけることができる。

$$\begin{cases} \tau_+ = 1 + ze^{(1-q)a_1 t} + ze^{(1-q)a_2 t} \\ \qquad + \dfrac{(a_1 - a_2)^2}{(a_1 - qa_2)(a_1 - q^{-1}a_2)} \\ \qquad \cdot z^2 e^{(1-q)(a_1 + a_2)t}, \\ \tau_- = 1 + c_1 z^{-1} e^{-(1-q)a_1 t} \\ \qquad + c_2 z^{-1} e^{-(1-q)a_2 t} \\ \qquad + \dfrac{(a_1 - a_2)^2}{(a_1 - qa_2)(a_1 - q^{-1}a_2)} \\ \qquad \cdot c_1 c_2 z^{-2} e^{-(1-q)(a_1 + a_2)t}, \end{cases} \qquad (10)$$

$$c_j = \frac{\varepsilon - qa_j}{\varepsilon - q^2 a_j} \frac{(a_1 - qa_2)(a_1 - q^{-1}a_2)}{(a_1 - a_2)^2}$$

また，天下りであるが方程式 (1) の独立な保存量として次が知られている [3, 4, 5]。

命題

(1) 式の解 η に対して，

$$\begin{aligned} I_n &= \int_S \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\eta(z_j) dz_j}{2\pi i z_j} \right) \left(\prod_{j<k} \frac{z_j - z_k}{z_j - qz_k} \right) \\ &\quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \qquad (11)$$

は時間によらない。特に $I_1 = \eta_0$ である。

特殊解 (9) に対して保存量 (11) の低次を計算してみると次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon q + (1-q)a \\ &= (1-q)e_1(a, \varepsilon q, \varepsilon q^2, \cdots), \\ I_2 &= \varepsilon^2 q^2 + (1-q^2)a\varepsilon \\ &= \frac{(1-q)(1-q^2)}{q} e_2(a, \varepsilon q, \varepsilon q^2, \cdots) \end{aligned} \qquad (12)$$

また特殊解 (10) に対しては次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon q^2 + (1-q)a_1 + (1-q)a_2 \\ &= (1-q)e_1(a_1, a_2, \varepsilon q^2, \varepsilon q^3, \cdots), \\ I_2 &= \frac{(1-q)(1-q^2)}{q} a_1 a_2 + \varepsilon q(1-q)a_1 \\ &\quad + \varepsilon q(1-q)a_2 + \varepsilon^2 q^2 \\ &= \frac{(1-q)(1-q^2)}{q} e_2(a_1, a_2, \varepsilon q^2, \cdots) \end{aligned} \qquad (13)$$

これらの保存量と Macdonald 作用素の固有値 [6]

$$\begin{aligned} &q^{-n(n-1)/2} \prod_{k=1}^{n} (1 - q^k) \\ &\quad \cdot e_n(\varepsilon t^{-\lambda_1}, \varepsilon q t^{-\lambda_2}, \varepsilon q^2 t^{-\lambda_3}, \cdots) \end{aligned} \qquad (14)$$

は明らかに類似している。すなわち (12)(13) は $\lim \varepsilon q^{i-1} t^{-\lambda_i}$ が有限な値 a_i になるように $t \to 1$, $\lambda_i \to \infty$ という極限をとったものと解釈できる。

3. テータ関数解

前節で紹介した $\tau_\pm$ はパラメトリゼーションに工夫がある。単純に計算機に代入して求めようとしても2次の解は2次方程式の, 3次の解は3次方程式の解がパラメータに入って来て, パソコンの性能によっては3次の解を求めることも困難になる。このようなパラメトリゼーションがとれることは, 実はこれらの $\tau_\pm$ が (8) のテータ関数解の退化であることに由来する。極めて手短かではあるが, そのことを説明するのが本稿の狙いである。一般種数で述べることも可能であるが, 一般の場合の様子が分かる最も簡単なケースである種数2の場合に限って述べることにする。

まずコンパクトリーマン面 X とその上の標準ホモロジーサイクル a_1, a_2, b_1, b_2 をとり, これに関して正規化された第一種正則微分を ω_1, ω_2 とする。ただし, 正規化されたとは次の意味である。

$$\int_{a_j} \omega_k = 2\pi i \delta_{jk}$$

また, 行列 B を

$$(B)_{ij} = \int_{b_i} \omega_j$$

で定義し, これを用いてテータ関数を次のように書く。

$$\Theta(\vec{z}; B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^m} \exp\left\{\frac{1}{2}\vec{m}^t\ B\ \vec{m} + \vec{m}^t\ \vec{z}\right\}$$

さらに Abel-Jacobi 写像を

$$\vec{A}(P) = (\cdots, \int_{P_\infty}^{P} \omega_j,\ \cdots)^t,$$

と, 定義する。

続いて, X 上に3点 P_1, P_2, P_∞ をとる。局所座標 z として, $z(P_\infty) = 0$ となるものを一つ選び, 固定する。X 上 P_α で留数 $+1$ の, P_∞ で留数 -1 の1位極を持ち, それ以外の点では正則な正規化された第3種微分を $d\Omega_\alpha$ と書く。(この"正規化された"は a_j 周期が全て0であることを意味する。) また, X 上 P_∞ で2位の極を持ち他では全て正則な, 正規化された (=a_j 周期が全て0な) 第2種微分であり, P_∞ で $-z^{-2} + o(1)$ と Laurent 展開されるものを $d\Omega_*$ と書く。以上の微分の b_j 周期を並べたベクトルを

$$\begin{aligned} \vec{U}_\alpha &= (\cdots, \int_{b_j} d\Omega_\alpha,\ \cdots)^t, \\ \vec{U}_* &= (\cdots, \int_{b_j} d\Omega_*,\ \cdots)^t \end{aligned} \tag{15}$$

と表記することにする。

命題
テータ関数 $\Theta(\vec{A}(P) + \vec{U}_1\frac{s}{\gamma} + \vec{U}_2\frac{r}{\delta} + \vec{U}_* t + \vec{Z})$ は, differential Fay identity

$$D_t\bar{\Theta}\cdot\tilde{\Theta} + \varepsilon\bar{\tilde{\Theta}}\Theta - \eta_0\bar{\Theta}\tilde{\Theta} = 0$$

を満たす。ただし $\vec{Z} \in \mathbb{C}^g$ は任意であり, $\tilde{f}(r,s,t) = f(r+\delta, s, t), \bar{f}(r,s,t) = f(r, s+\gamma, t)$ である。また,

$$\varepsilon = \exp\left(\int_{Q_2}^{P_1} d\Omega_2\right), \tag{16}$$

$$\eta_0 = \left(\partial_z \int_{Q_2}^{P} d\Omega_2 - \partial_z \int_{Q_1}^{P} d\Omega_1\right)\Bigg|_{z=0}$$

である。ただし Q_1, Q_2 は

$$\int_{Q_\alpha}^{P} d\Omega_\alpha = -\log z + o(z^1) \tag{17}$$

となるようにとる。

命題
複素平面から a_1, a_2, b_1, b_2 の4点を抜き一次分数変換

$$\begin{aligned} &\sigma_n z = \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n}, \\ &(a_n - b_n)\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n\sqrt{\mu_n} - \frac{b_n}{\sqrt{\mu_n}} & a_n b_n(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}} - \sqrt{\mu_n}) \\ \sqrt{\mu_n} - \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} & \frac{a_n}{\sqrt{\mu_n}} - b_n\sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}, \\ &|\mu_n| < 1, (n = 1, 2) \end{aligned}$$

が生成する Schottky 群で割って X の Schottky uniformization を考える。基本領域の局所座標をそのまま複素平面の座標 z とし, 前節で考えた X 上の点達については $z(P_\infty) = 0$ とし, また $z(P_\alpha) = p_\alpha, z(Q_\alpha) = q_\alpha$ のように小文字を対応させることにする。このとき, $p_2 = \sigma_1^{-1}c$ 及び $z_n = -(\log\mu_n)/2$ とおいて $\mu \to 0$ の極限をとり, $a_i : b_i = 1 : q$ とすると $\tilde{\Theta}, \Theta$ はそれぞれ (10) の τ_-, τ_+ となる。

量子系の情報 (Macdonald 作用素の固有値) は古典極限の後もテータ関数解 (の運動の積分の値) に生き残っているということになるのだろうか。可積分系に特有の事情があるには違いないが興味深いことである。

参考文献

[1] Y.Tutiya, J. Shiraishi: On some special solutions to periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian, Mathematics and Computers in Simulation, 2010 (in press. online available.)

[2] M. Adler, P. van Morebeke: A matrix integral solution to two-dimensional W_p-gravity, Commun. Math. Phys. 147 (1992) 25-56.

[3] J. Shiraishi, Y.Tutiya: Periodic ILW equation with discrete Laplacian, J. Phys. A. 42 No.40 (2009) 404018.

[4] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida: A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials, J. Math. Phys. 50 (2009) 095215.

[5] J. Shiraishi: A Family of Integral Transformations and Basic Hypergeometric Series, Commun. Math. Phys. 263 (2006) 439-460.

[6] I.G. Macdonald: Symmetric Functions and Hall Polynomials, second ed., Oxford University Press, New York, 1995.