

[研究論文] 応答曲面法を用いたスマートヘルムホルツ共鳴器の  
共鳴振動数の最適化

小机わかえ<sup>1</sup>・宮地秀征<sup>1</sup>

1 機械工学科

Optimization of Resonance Frequency of Smart Helmholtz Resonator  
by Response Surface Method

Wakae KOZUKUE<sup>\*1</sup>, Hideyuki MIYAJI<sup>\*1</sup>

Abstract

In this paper we carried out the simulation for controlling the resonance frequency of a Helmholtz resonator, which is used for the reduction of noise. The resonance frequency is designed to the desired value by PID control of the acoustical boundary condition of the Helmholtz resonator. The resonator like this is called Smart Helmholtz Resonator. At first the gains of PID controller is changed to several values and it is confirmed that the resonance frequency is varied. In order to realize the desired resonance frequency the gains of PID controller are determined by the response surface method. By using the response surface method the determination of the optimal gains are possible for a lower frequency region quite accurately. It is shown that this method is effective for designing the resonance frequency of Smart Helmholtz Resonator..

Key Words : Smart Structure, Sound and Acoustics, Sound Field Control, Comtroller, Helmholtz Resonator

1. まえがき

音響システムを設計するとき、ヘルムホルツ共鳴器は特定の周波数の音の音圧レベルを低減できるという特徴から、しばしば用いられる。また、共鳴振動数以外の音も低減できるという特徴から、自動車の排気音の低減などにも用いられている。

本研究では、共鳴振動数を可変にできるヘルムホルツ共鳴器である“スマートヘルムホルツ共鳴器”の共鳴振動数の最適化を解析により行う。すなわち、共鳴器の境界条件を可変とすることで、共鳴器の共鳴振動数を制御し、望みの共鳴振動数を実現する。そのために境界条件を与える伝達関数をPID制御のものとし、そのゲインを応答曲面法により決定する。導出したゲインを用いて共鳴振動数を求め、最初に設定した設計周波数と一致するかどうかをシミュレーションにより調べる。

2. ヘルムホルツ共鳴器

ヘルムホルツ共鳴器の複素音響インピーダンス  $z$  は、空洞内の圧力  $P_{in}$  と空洞内に流れ込む音響速度  $u_a$  を次のように関係付ける<sup>(1)</sup>。

$$P_{in} = zu_a \tag{1}$$

ヘルムホルツ共鳴器に対する複素インピーダンスは以下のように与えられる。

$$z = R' + i\rho_0 \left( \frac{c_0^2 S}{V\omega} - \omega l_e \right) \tag{2}$$

ここで  $R'$  は放射損失による抵抗で、 $\rho_0$  は媒質の密度、 $c_0$  は媒質内の音速、 $S$  は空洞の喉部の断面積、 $l_e$  はのど部の長さ、 $V$  は空洞の体積である。散逸がきわめて小さいとき、共鳴は以下の周波数で起こる。

$$\omega = c_0 \sqrt{\frac{1}{C_a I_a}} \tag{3}$$

ここで、

$$I_a = \rho_0 l_e \tag{4}$$

$$C_a = \frac{V}{\rho_0 c_0^2 S} \quad (5)$$

である。

### 3. スマートヘルムホルツ共鳴器

ヘルムホルツ共鳴器の境界条件を可変として、共鳴振動数を能動的に制御する共鳴器をスマートヘルムホルツ共鳴器<sup>(3)</sup>と名付ける。境界条件は、音響インピーダンスの調整によって可変とすることができる。本研究では音響インピーダンス調整をPID制御により実現することを考える。境界条件が変化しないときの、ヘルムホルツ共鳴器の伝達関数は入力を音響圧力  $P_{in}$ 、出力を音響速度  $u_a$  とすると以下のような2次要素として与えられる。

$$\frac{u_a}{P_{in}} = \frac{1}{I_a} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{C_a I_a}} \quad (6)$$

境界条件を変更しないときのヘルムホルツ共鳴器の概念図を図1に示す。

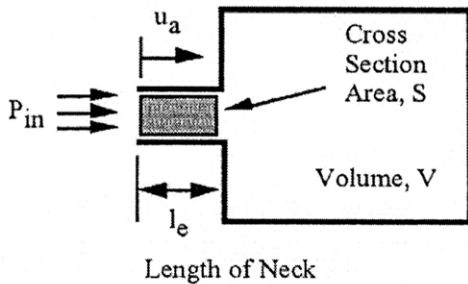


Fig.1 Schematic Diagram of a Helmholtz Resonator

また、制御を行うために境界条件を図2に示すように伝達関数  $G(s)$  で表したときのスマートヘルムホルツ共鳴器の伝達関数は以下ようになる。

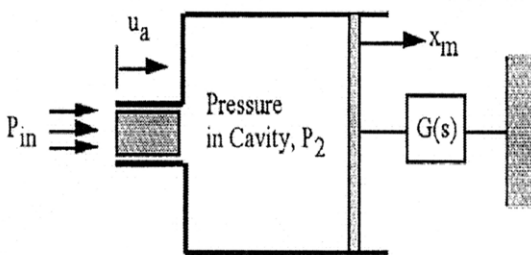


Fig.2 Schematic Diagram of a Smart Helmholtz Resonator

$$\frac{u_a}{P_{in}} = \frac{1}{I_a} \frac{s + \frac{G(s)}{C_a}}{s^2 + \frac{G(s)s}{C_a} + \frac{1}{C_a I_a}} \quad (7)$$

この境界条件  $G(s)$  をPID制御で実現することを考えると、 $G(s)$  は以下のように与えられる。

$$G(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (8)$$

これを式(7)に代入すると、PID制御されるスマートヘルムホルツ共鳴器の伝達関数は以下ようになる。

$$\frac{u_a}{P_{in}} = \frac{1}{I_a} \left[ \frac{(K_D + C_a)s^2 + K_p s + K_I}{(K_D + C_a)s^3 + K_p s^2 + (K_I + 1/I_a)s} \right] \quad (9)$$

Table 1 Parameters of Resonator

Volume	V	0.00742m <sup>3</sup>
Length of Throat	$l_e$	0.055m
Cross Section of Throat	S	0.000113m <sup>2</sup>
Density of Medium	$\rho_0$	1.18kg/m <sup>3</sup>

以上で述べたスマートヘルムホルツ共鳴器を対象に簡単なシミュレーションを行った。その際に用いた各種パラメータを表1に示す。スマートヘルムホルツ共鳴器のPID制御におけるゲイン  $K_p$ 、 $K_I$ 、 $K_D$  をそれぞれ変化させると、一例として図3に示すようなボード線図が得られた。ピークを与える周波数が共鳴振動数に対応する。これらより、 $K_p$  はピークの位置を変化させない、 $K_I$  は増加させるとピークの周波数を増加させ、 $K_D$  は増加させるとピークの周波数を減少させることがわかった。これはシステムの動的応答を変化させることができるという、スマートヘルムホルツ共鳴器の可能性を示している。

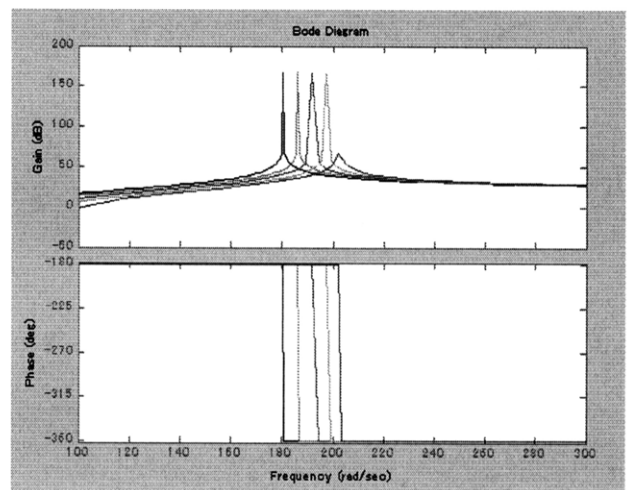


Fig.3 Bode diagram of a Smart Helmholtz Resonator for  $K_p=0$ ,  $K_D=0$  and various values of  $K_I$

### 4. 応答曲面法

応答曲面法<sup>[8]</sup>とは、製品プロセスの最適化やばらつき  
減少などの品質工学の分野において実用化されている手  
法で、設計変数と目的関数の関係を効率よく近似し、工程  
を最適化する方法である。応答曲面とは  $n$  個 ( $n>1$ ) の予測  
変数  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) から予測される応答  $y$  の関係式を近  
似したものである。

$$y = f(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon, \quad (10)$$

ここで、 $\varepsilon$  は誤差とする。

本研究では未知パラメータとしてPID制御におけるゲ  
インを対象とし、応答をスマートヘルムホルツ共鳴器の共  
鳴振動数とした。未知パラメータが2つのときと、3つの  
ときで、以下の2種類の多項式を用いた。

決定すべきゲインが2つのとき

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2 \quad (11)$$

決定すべきゲインが3つのとき

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2 + \beta_6 x_3^2 + \beta_7 x_1 x_2 + \beta_8 x_2 x_3 + \beta_9 x_1 x_3 \quad (12)$$

これらの式で、 $x_1, x_2$  等は決定すべきPID制御のゲイン、  
 $\beta_1, \beta_2$  等は以下の手順にしたがって決定すべきパラメー  
タである。

以上のように応答曲面の式をから、最小二乗法で容易  
にパラメータベクトル  $\beta$  を求めることができる。

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (13)$$

$$\beta = \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$y = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\beta$  の推定値  $b$  を以下のようにして求める。

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (17)$$

この  $b$  の値を応答曲面の式(11)あるいは(12)に代入し、最  
適化解析を援用して、望みの共鳴振動数を与えるPID制御  
のゲインを求める。求めたゲインを用いて、スマートヘル  
ムホルツ共鳴器のボード線図を描いて、設定通りに共鳴振  
動数が得られるかどうかをチェックする。

## 5. 解析結果

以下の条件で、応答曲面を作成した。

(a) 式(11)に示すように微分ゲイン、積分ゲインを変数と  
し、共鳴振動数として20個を用いた場合。

$$f = \beta_0 + \beta_1 K_D + \beta_2 K_I + \beta_3 K_D^2 + \beta_4 K_I^2 + \beta_5 K_D K_I$$

(b) 式(12)に示すように、比例ゲイン、微分ゲイン、積分  
ゲインを変数とし、共鳴振動数として20個を用いた場合。

$$f = \beta_0 + \beta_1 K_P + \beta_2 K_D + \beta_3 K_I + \beta_4 K_P^2 + \beta_5 K_D^2 + \beta_6 K_I^2 + \beta_7 K_P K_D + \beta_8 K_D K_I + \beta_9 K_P K_I$$

(c) 式(12)に示すように、比例ゲイン、微分ゲイン、積分  
ゲインを変数とし、共鳴振動数として30個を用いた場合。

$$f = \beta_0 + \beta_1 K_P + \beta_2 K_D + \beta_3 K_I + \beta_4 K_P^2 + \beta_5 K_D^2 + \beta_6 K_I^2 + \beta_7 K_P K_D + \beta_8 K_D K_I + \beta_9 K_P K_I$$

Table 2 Gains Obtained by Optimization Analysis and Resonance Frequency

Desired Frequency [rad/s]	Desired Frequency [Hz]	Gain KP	Gain KD	Gain KI	Resonance Frequency [Hz]	Error [Hz]
100	15.9236	7.90E-05	1.6000E-03	5.78E-08	13.72	-2.2036
150	23.8854	5.74E-06	8.0174E-05	-1.00E-21	26.04	2.1546
200	31.8471	5.61E-05	9.9931E-20	8.2616	35.60	3.7529
250	39.8089	2.55E-04	4.2470E-07	18.3611	42.51	2.7011
300	47.7707	5.87E-04	1.0119E-19	29.2920	48.93	1.1593
350	55.7325	1.10E-03	3.1095E-06	41.0748	54.82	-0.9125
400	63.6943	1.70E-03	2.3624E-09	53.5614	60.78	-2.9143
450	71.6561	2.40E-03	1.5275E-08	66.8602	66.38	-5.2761
500	79.6178	3.40E-03	4.6372E-05	81.1570	68.62	-10.9978
550	87.5796	4.10E-03	1.3946E-07	95.4764	77.04	-10.5396
600	95.5414	5.20E-03	3.3733E-07	110.7146	82.15	-13.3914
650	103.5032	7.00E-03	1.6009E-04	126.9522	75.72	-27.7832
700	111.4650	8.40E-03	2.2066E-04	143.1038	76.07	-35.3950
750	119.4268	8.80E-03	2.7296E-06	159.6442	96.52	-22.9068
800	127.3885	1.18E-02	4.4399E-04	175.9859	72.70	-54.6885
850	135.3503	1.37E-02	6.2561E-04	192.1956	69.18	-66.1703
900	143.3121	1.32E-02	1.1446E-05	213.9361	111.56	-31.7521
950	151.2739	1.79E-02	1.2000E-03	221.8760	59.92	-91.3539
1000	159.2357	2.02E-02	1.7000E-03	233.2173	53.82	-105.4157
1050	167.1975	2.27E-02	2.6000E-03	237.6676	45.67	-121.5275
1100	175.1592	2.49E-02	4.2000E-03	223.0704	35.94	-139.2192
1150	183.1210	2.40E-02	8.5390E-04	312.6796	80.68	-102.4410
1200	191.0828	2.78E-02	4.8000E-03	248.0928	35.58	-155.5028
1250	199.0446	2.92E-02	2.7000E-03	315.3629	51.39	-147.6546
1300	207.0064	3.13E-02	3.5000E-03	321.6135	46.35	-160.6564

$\beta$  を応答曲面の式に代入し、設計周波数を与えるゲインの値を最適化解析より求めた。最適化解析の設計変数はゲイン、目的関数は望みの共鳴振動数と応答曲面法から求められる共鳴振動数の差とし、非線形制約付き最適化法を用いた。さらに求めたゲインを用いてボード線図を描き、ピークを与える周波数を求めた。結果を表 2 に示す。

これらの表を見ると、比較的低周波数の 70Hz 付近までは、応答曲面法により得られた共鳴振動数は、実際の共鳴振動数に近い値を示している。

## 7. 結語

共鳴振動数を可変にできるスマートヘルムホルツ共鳴器の共鳴周波数を設計する方法を示した。共鳴振動数を変化させるために PID 制御のゲインを変えて共鳴振動数を求め、その関係を応答曲面法により表現し、それを用いて任意の共鳴振動数に対する PID 制御のゲインを求める。得られたゲインに対し、再び共鳴振動数を求めて、精度を比較した。その結果、比較的低周波数では精度が良いことがわかった。より精度を上げるためには、応答曲面を作成するとき周波数範囲をブロックに分割し、各ブロックに対しての応答曲面を構成することなどが考えられる。音響システムの PID 制御を物理的にどのようにハードウェアで実現させるかを検討することも課題として残る。さらに、解析だけではなく実際に共鳴器を用いた実験を行って本手法が妥当かどうかを検証することも課題として残されている。

## 参考文献

- [1]Temkin: "Elements of Acoustics", Wiley & Sons, Inc. (1936)
- [2]Radcliffe,C.J.,Gogate,S.D.,andHall,G.:Development of an Active Acoustic Sink(AAS) for Noise Control Applications, Active Control of Vibration and Noise, ASME(1994)
- [3]Birdsong, C. B., and Radcliffe,C.J.: A Smart Helmholtz Resonator, ASME Forum on Active Noise Control, IMECHE, (1997)
- [4] Inoue,K., et al.Control Engineering Using MATLAB/Simulink, Morikita Publishing (2001) (in Japanese)
- [5]Suda,N., et. Al: "PID Control", Asakura Publishing, (2007) pp. 13-14.(in Japanese)
- [6]小机わかえ、宮地秀征:スマートヘルムホルツ共鳴器の固有振動数の解析と制御、日本機械学会、機力・制御部門講演会、D&D2010,CD-ROM(2010)
- [7]Kozukue,W. and Miyaji,H.:PID Control of Eigenfrequency for Smart Helmholtz Resonator, Proceedings of the 10-th International Conference on MOTION AND VIBRATION CONTROL, CD-ROM(2010)
- [8] <http://todoroki.arrow.jp/response/sec1.pdf>