Ⅲ型制御系の根軌跡について

高　畠　信　也

On the Root Locus of the Third Type Control System

Shinya TAKABATAKE

電子計算機によって，特性根を計算し，それによって描いた根軌跡から減衰比-減衰定数の関係を求めることによって，系の最良過渡特性を得ることができた。この方法は，一般に線形制御系の最適調整を求めるのに有効な手段であると考えられる。

1. 緒　　言

線形フィードバック自動制御系の過渡特性は，減衰定数（系の速応度）と減衰比（系の安定度）の両面から判定することができる。この判定には根軌跡法[1]などが用いられている。特性根の軌跡を求めるのが根軌跡法の基礎であるが，普通には，特性根は求めずに根軌跡を得る簡便法が用いられている。しかしこれは，開ループ極，零点，軌跡の漸近線等から図式的に求めるので，開ループ極，零点が多くなると複雑になったり，軌跡を精密に求められない欠点がある。そこでここでは，基礎に帰って特性根を電子計算機で求め，それより求めた根軌跡より減衰比 (ζ)-減衰定数 (σ) の関係（以下 $\zeta-\sigma$ 曲線という）を求めることにより，最適ゲインの決定ができると考え，開ループ伝達関数が，Ⅲ型である制御系について判定を試みた。

計算機を用いるこの方法は，計算の結果をグラフにプロットせねばならないが，精度よく制御系の特性を知ることができたので概要を報告する。

2. 計算方法

制御系への基準入力信号が，パラボラ的に変化する系に対しては，Ⅲ型制御系の設定が必要となる。

ここでは，開ループ伝達関数を $G(S)$ として，開ループ極が0に3個，および -4, -6, $-5\pm j5$ の合計7個，開ループ零点は，$-X$, $-Y$, $-Z$ の3個を与え，

$$G(S)=\frac{K(S+X)(S+Y)(S+Z)}{S^3(S+4)(S+6)\{(S+5)^2+25\}} \quad \cdots\cdots (1)$$

K: ゲイン

を設定し，$-X$, $-Y$, $-Z$ の値を種々変化させてそれぞれの根軌跡を得た。

特性方程式は

$$G(S)+1=0 \quad \cdots\cdots (2)$$

で与えられ，式 (1) を式 (2) に代入して整理すると，

$$\begin{aligned} &S^7+16S^6+174S^5+740S^4 \\ &\quad +(1200+K)S^3+(X+Y+Z)KS^2 \\ &\quad +(XY+YZ+ZX)KS+XYZ=0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots (3)$$

の式が得られる。これが，式 (1) の特性方程式であり，式 (3) の K を0から $+\infty$ まで変化させたとき，式 (3) を満足する S の値の軌跡が，根軌跡として得られる。

根軌跡が実軸から離れる点，すなわち分岐式 (3) の根が，重根となり，計算機では，値が正確に求まらない欠点がある。

根軌跡法では，分岐点は式 (2) において，次式を満足する S の値である。

$$\frac{dK}{dS}=0 \quad \cdots\cdots (4)$$

式 (3) について計算を行い，根軌跡を求めるのであるが，分岐点は，前述の理由により式 (3) で，係数決定を行って求めた。

根の計算は，特性方程式が2次式のときには，根の公式を用いて簡単に求めることができる。3次以上になると，一般には簡単に求められないが，近似解は求めることができる。その一つとして Bairstow 法[2] とよばれている解法がある。これは高次代数方程式を2次式の積の形に変換して，すべての根を求める方法である。したがって，次数が偶数でなければならぬが，奇数次のときには，根として0を一つ加えれば，一般性は失なわれない。

ここでは，係数の計算をメインプログラムで行い，Bairstow 法を用いて根の計算をするプログラムを，サブプログラムとした。サブプログラムは，国井ら[2] のプログラムに，減衰比の計算等を加えて用いた。

3. 結果と考察

種々の開ループ零点について求めた根軌跡の代表的なものを図1に示した。ただし，軌跡は実軸に対して対称のため，虚軸の負側は省略してある。図において，開ループ零点は，-1.1，-1.2，-1.3 ① は安定度最良，② は軌跡の漸近線である。a, b における K の値は，それぞれ 1000.0，1258.9 である。漸近線は，根軌跡法の公式を用いて求めたものであり，ゲイン K が半端な値なのは，根軌跡を求める上で K の値を広範囲に変化させるため，対数的に変化させたからである。

この開ループ零点の安定度最良は，ゲイン $K \simeq 1060$ のときで，この場合の減衰比 $\zeta \simeq 0.390$,

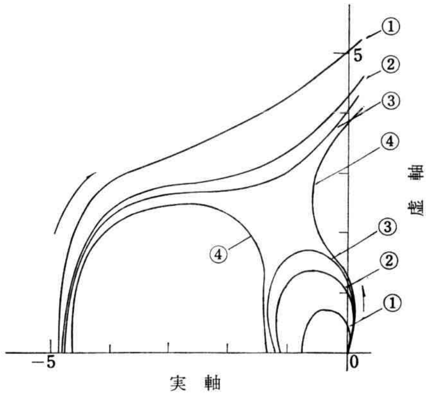

図2 開ループ零点の変化による根血跡
開ループ極，0に3個，-4，-6，$-5\pm j5$ の計7個
実軸上，虚軸の負側および $-5\pm j5$ よりの軌跡は省略

①開ループ零点 -0.6，-0.7，-0.8
② 同 上 -1.0，-1.1，-1.2
③ 同 上 -1.1，-1.2，-1.3
④ 同 上 -1.2，-1.3，-1.4

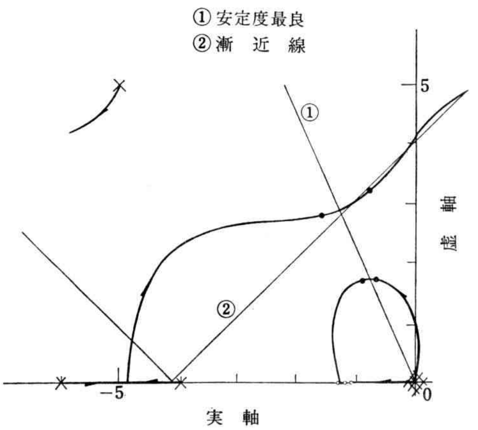

図1 根軌跡（開ループ零点 -1.1，-1.2，-1.3）
安定度最良で $K \simeq 1060$，$\zeta \simeq 0.39$，$\sigma \simeq 0.629$
a における $K=1000.0$，b における $K=1258.9$
× 開ループ極，○ 開ループ零点

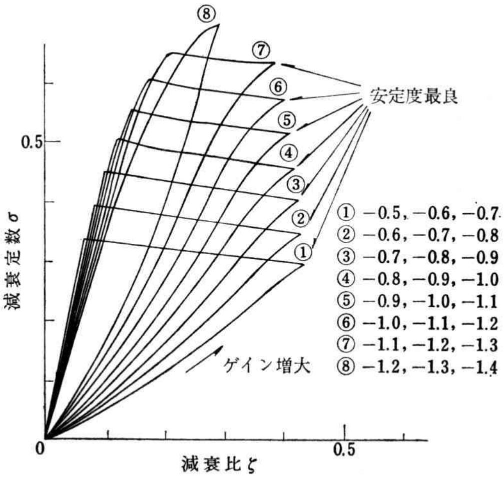

図3 $\zeta-\sigma$ 曲線
①～⑧の数字は，それぞれ開ループ零点を示す

表 1　安定度最良のときの各値

開ループ零点	ゲイン	減衰比	減衰定数
−0.5　−0.6　−0.7	950	0.450	0.290
−0.6　−0.7　−0.8	960	0.445	0.340
−0.7　−0.8　−0.9	980	0.443	0.400
−0.8　−0.9　−1.0	990	0.433	0.453
−0.9　−1.0　−1.1	1020	0.425	0.510
−1.0　−1.1　−1.2	1040	0.413	0.568
−1.1　−1.2　−1.3	1060	0.390	0.629
−1.2　−1.3　−1.4	1070	0.290	0.695

減衰定数 $\sigma \simeq 0.629$ であった。

図 2 は，開ループ零点を変えたときの，軌跡の状態を示す。ただし，開ループ極，零点や実軸上にある軌跡は，グラフが煩雑になるので省略してある。また開ループ極 $-5 \pm j5$ より出発する軌跡は，制御系において虚軸から遠いものは，特性にほとんど影響を与えないため省略した。

図 3 は，$\zeta - \sigma$ 曲線を示す。横軸に減衰比，縦軸に減衰定数をとり，グラフ中の数字はそれぞれの開ループ零点の値を示す。

表 1 は，種々の開ループ零点における，安定度最良のときのゲイン，減衰比および減衰定数を示し，この中で最良の制御系は，開ループ零点が，−1.1，−1.2，−1.3 であることが判る。(開ループ零点が，−1.2，−1.3，−1.4 では，特性が急に悪くなる。)

図 1 は，軌跡は安定度最良をすぎてから，漸近線を中心として振動しながら収束することを示している。このことは根軌跡法の漸近線が，正しいことを表わしている。普通に行なわれる根軌跡法では，この振動状態をはっきりと知ることはできないが，特性方程式の特性根を解いて根軌跡を得る方法によれば，根軌跡の形状を精密に知ることができる。図 2 によれば，④では制御性能が悪く，③では制御性能が良いことが判る。したがって，この間の開ループ零点をもっとくわしくとると，制御性能が最良の零点が判ると思われる。図 2 において，曲線の変化をみると，開ループ極 0 より出発した軌跡と，−4 または −6 より出発した軌跡は，ある開ループ零点に対して接することが考えられ，この状態が，制御性能が最も良い状態と考えられる。

4. 結　　語

特性根を計算して根軌跡を得る方法は，制御特性が精密に判り，$\zeta - \sigma$ 曲線を図示することにより，減衰定数および最適ゲインの把握が正確にできると考えられる。

この計算を進めるにあたり，多くの助言を与えてくださった電気工学科　安田教授　およびよきアドバイスを与えてくださった　大矢助手に深く感謝いたします。

文　　献

1) 計測自動制御学会：自動制御便覧，昭和 43 年，コロナ社
2) 国井，中村，伊藤：数値計算とプログラミング，昭和 46 年　共立出版