

三次制御系のステップ応答

安 田 文 彦

Step Response of 3rd. Order Control System

Fumihiko YASUDA

電子計算機によって三次系のステップ応答を計算するプログラムを作成し、これによって

1. 三次振動系
 - a. 減衰比が一定で、実根と固有周波数との比が変わる場合
 - b. 実根と固有周波数の比が一定で、減衰比が変わる場合
2. 三次減衰系
 - a. 絶対値の大きい重根をもつ場合
 - b. 絶対値の小さい重根をもつ場合
 - c. 三根の絶対値が等差である場合

このおのおのについて、実根の比が変わった場合

について、ステップ応答を図示することによって、三次系のステップ応答の全貌を明らかにした。

1. ま え が き

ステップ応答によって、制御系の過渡特性を表わす場合、制御系を、ステップ応答が既によくわかっている、それに近似した一次系また二次系として取扱うことがよく行われるが、それでは十分でないときは、近似した三次系として取扱うことが必要となる。

本校に導入された電子計算機を使って、三次系のステップ応答を計算し、結果を図示して、その全貌を明らかにしたので、その概要を報告する。

2. 一次系および二次系のステップ応答

既によくわかっている一次系および二次系のステップ応答を図1に示した。

一次系については、特性根の絶対値を p として、 $\tau = pt$ (t は時間)を横軸にとり、二次系については、固有周波数を ω_n として、 $\tau = \omega_n t$ を横軸にとって、基準化してあるので、一次系のステップ応答は決まり、二次系のステップ応答

は、減衰比 ζ をパラメータとして決まる。それは図1に示す通りである。

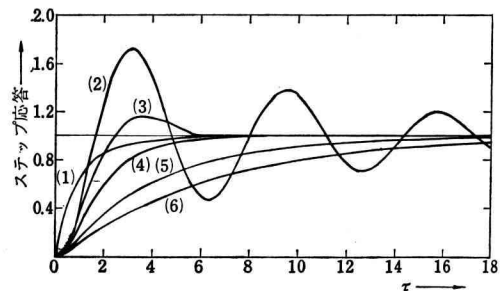


図1 一次系および二次系のステップ応答

- (1) 一次系 $\tau = pt$
(2)~(6) 二次系 $\tau = \omega_n t$
(2) $\zeta = 0.1$ (3) $\zeta = 0.5$ (4) $\zeta = 1$
(5) $\zeta = 2$ (6) $\zeta = 3$

3. 三次系のステップ応答の計算式

3.1 振動系の場合

三次振動系の特性根を $-p$ および $-a \pm j\beta$ とすれば、閉ループ伝達関数はつぎの(1)式のようなになる。

$$X(s) = \frac{p(a^2 + \beta^2)}{(s+p)\{(s+a)^2 + \beta^2\}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

またステップ応答 $f(t) = L^{-1}\{X(s)/s\}$ より
つぎの (2) 式が得られる。

$$f(t) = 1 - A e^{-pt} - \varepsilon^{-\alpha t} (B \cos \beta t + C \sin \beta t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、

$$A = \frac{a^2 + \beta^2}{(a-p)^2 + \beta^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$B = \frac{p(p-2a)}{(a-p)^2 + \beta^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$C = \frac{p(\beta^2 - a^2 - a\beta)}{\beta\{(a-p)^2 + \beta^2\}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。

(2), (3), (4) および (5) 式を、固有周波数 $\omega_n = \sqrt{a^2 + \beta^2}$, 減衰比 $\zeta = a/\omega_n$, $\xi = \sqrt{1 - \zeta^2} = \beta/\omega_n$, $\eta = \phi/\omega_n$ および $\tau = \omega_n t$ (t は時間) を用いて基準化すれば、次の (6), (7), (8) および (9) 式が得られる。

$$f(t) = 1 - A e^{-\zeta \tau} - \varepsilon^{-\zeta \tau} (B \cos \xi \tau + C \sin \xi \tau) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$A = \frac{1}{1 - 2\eta \zeta + \eta^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$B = \frac{\eta^2 - 2\eta \zeta}{1 - 2\eta \zeta + \eta^2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$C = \frac{1 - 2\zeta^2 + \eta \zeta}{\xi (1 - 2\eta \zeta + \eta^2)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

3.2 減衰系の場合

三次減衰系の特性根を $-a$, $-b$, $-c$, 但し $a > b > c$ とすれば、閉ループ伝達関数はつぎの (10) 式ようになる。

$$X(s) = \frac{a b c}{(s+a)(s+b)(s+c)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ステップ応答 $f(t) = L^{-1}\{X(s)/s\}$ からつぎの (11) 式が得られる。

$$f(t) = 1 - A e^{-at} - B e^{-bt} - C e^{-ct} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $D = (a-b)ab + (b-c)bc$

+ $(c-a)ca$ として、

$$A = (b-c)bc/D \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$B = (c-a)ca/D \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$C = (a-b)ab/D \quad \dots\dots\dots (14)$$

(11), (12), (13) および (14) 式を、 $\kappa = a/c$, $\lambda = b/c$, および $\tau = ct$ を用いて基準化すれば、次の (15), (16), (17), (18) および (19) 式が得られる。

$$f(t) = 1 - A e^{-\kappa \tau} - B e^{-\lambda \tau} - C e^{-\tau} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$D = (\kappa - \lambda)\kappa\lambda + (\lambda - 1)\lambda + (1 - \kappa)\kappa \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$A = (\lambda - 1)\lambda/D \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$B = (1 - \kappa)\kappa/D \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$C = (\kappa - \lambda)\kappa\lambda/D \quad \dots\dots\dots (19)$$

4. 三次振動系のステップ応答

3.1 節で示した計算式によって、電子計算機によって計算した結果を、次に図示する。

4.1 減衰比 ζ 一定の場合

図2, 図3, 図4および図5はそれぞれ減衰比 ζ が 0.1, 0.3, 0.6 および 0.9 で一定である場

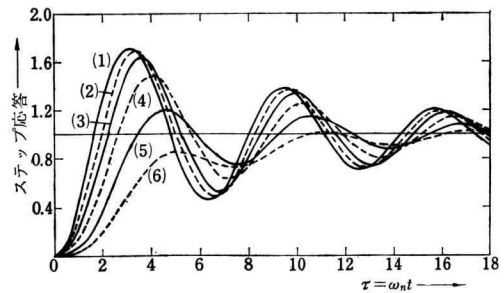


図2 $\zeta = 0.1$ の場合のステップ応答

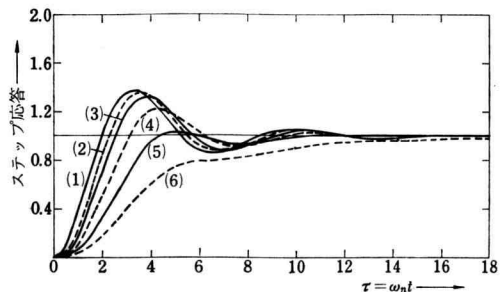


図3 $\zeta = 0.3$ の場合のステップ応答

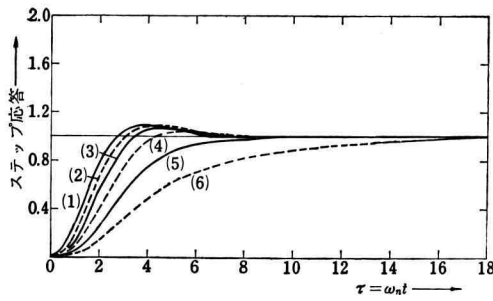


図 4 $\zeta = 0.6$ の場合のステップ応答

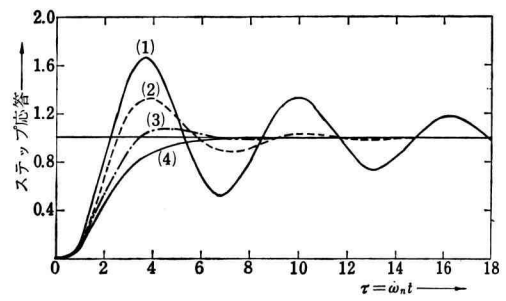


図 7 $\eta = 2$ の場合のステップ応答

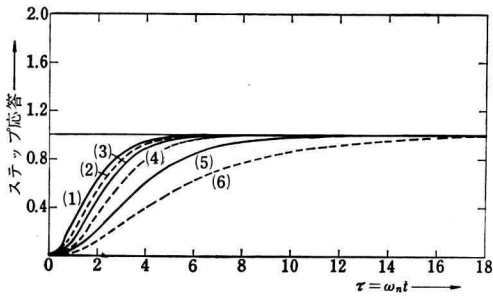


図 5 $\zeta = 0.9$ の場合のステップ応答

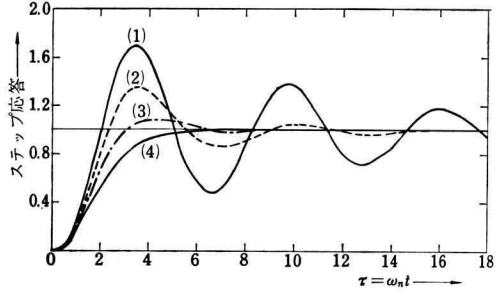


図 8 $\eta = 1$ の場合のステップ応答

合の図である。それぞれの図中の番号 (1)～(6) は、 $\eta = p/\omega_n$ をパラメーターとして、(1) は $\eta = \infty$ 即ち二次系のときであり、(2) は $\eta = 4$ 、(3) は $\eta = 2$ 、(4) は $\eta = 1$ 、(5) は $\eta = 0.5$ 、(6) は $\eta = 0.25$ のときである。

η の値が大きいくほど二次系に近似するが、 η の値が余り大きくないと二次系近似は無理なことは図 2～5 から明白である。

4.2 $\eta = p/\omega_n$ 一定の場合

図 2～5 を今度は $\eta = p/\omega_n$ を一定として、減衰比 ζ をパラメーターとしたのが、図 6～10 である。図中の番号 (1)～(4) は、(1) は $\zeta =$

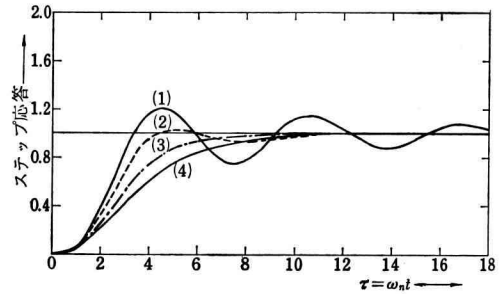


図 9 $\eta = 0.5$ の場合のステップ応答

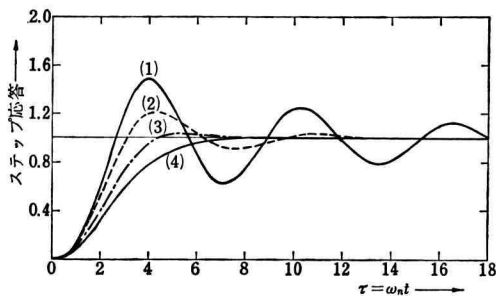


図 6 $\eta = 4$ の場合のステップ応答

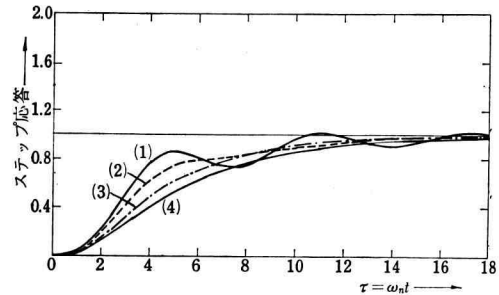


図 10 $\eta = 0.25$ の場合のステップ応答

0.1, (2) は $\zeta = 0.3$, (3) は $\zeta = 0.6$, (4) は $\zeta = 0.9$ のときである。

5. 三次減衰系のステップ応答

3.2節で示した計算式によって、電子計算機で計算した結果を次に図示する。

5.1 絶対値の大きい根が重根の場合

$\kappa = a/c$ と $\lambda = b/c$ とが等しく、これらが ∞ , 5, 3 および 1 である場合のステップ応答を図 11 に示した。 $\kappa = \lambda = \infty$ は一次系に相当し、 $\kappa = \lambda = 1$ は三重根の場合に相当する。

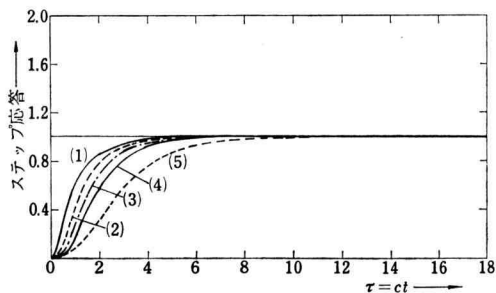


図 11 絶対値の大きい根が重根の場合

- (1) $\kappa = \lambda = \infty$ (一次系) (2) $\kappa = \lambda = 5$
(3) $\kappa = \lambda = 3$ (4) $\kappa = \lambda = 2$
(5) $\kappa = \lambda = 1$ (三重根)

5.2 絶対値の小さい根が重根の場合

$\lambda = b/c = 1$ で、 $\kappa = a/c$ が ∞ , 5, 3, 2, および 1 のときを、図 12 に示した。 $\kappa = \infty$ は二次系の限界点 (減衰比 $\zeta = 1$) に相当し、 $\kappa = 1$ は三重根の場合に相当する。

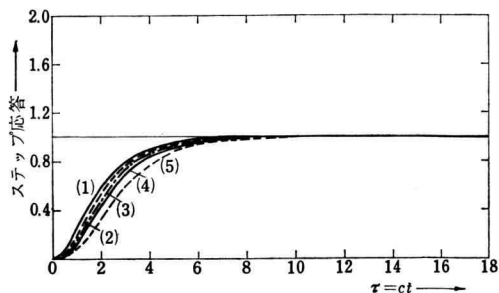


図 12 絶対値の小さい根が重根の場合

- (1) $\kappa = \infty$, $\lambda = 1$ (二次系, 限界点)
(2) $\kappa = 5$, $\lambda = 1$ (3) $\kappa = 3$, $\lambda = 1$
(4) $\kappa = 2$, $\lambda = 1$ (5) $\kappa = \lambda = 1$ (三重根)

5.3 三実根が等距離にある場合

$\kappa = 5$, $\lambda = 3$; $\kappa = 3$, $\lambda = 2$; $\kappa = 2$, $\lambda =$

1.5; $\kappa = 1.5$, $\lambda = 1.25$ のときを、図 13 に示した。

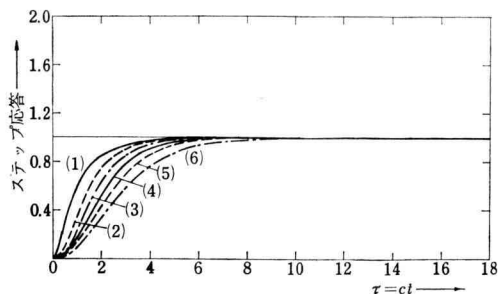


図 13 三実根が等距離にある場合

- (1) $\kappa = \lambda = \infty$ (即ち一次系)
(2) $\kappa = 5$, $\lambda = 3$ (3) $\kappa = 3$, $\lambda = 2$
(4) $\kappa = 2$, $\lambda = 1.5$ (5) $\kappa = 1.5$, $\lambda = 1.25$
(6) $\kappa = \lambda = 1$ (三重根)

6. 基準化の問題点

基準化して取扱うと計算の手数や、図表の数を何分の一かに節約できて、全貌を把握するためには都合がよいが、制御系のステップ応答は、結局は、時間 t を横軸にとって考察せねばならない。例えば三次振動系の減衰比 $\zeta = 0.6$ の場合、横軸に $\omega_n t$ をとったものが、図 4 であるが、これを仮に横軸に pt をとって書き直してみれば、図 14 の様になる。両図は著るしく相違しているように見えるが、何れも横軸を t に書き直すことは容易であり、それによって両者は完全に一致する。

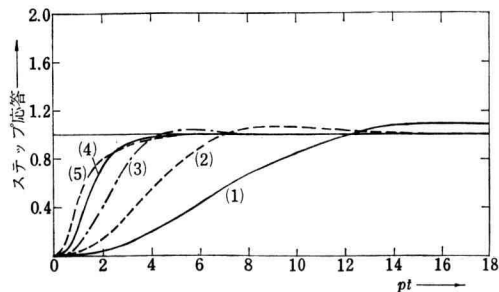


図 14 横軸に pt をとったときの、減衰比 $\zeta = 0.6$ の場合のステップ応答

- (1) $\eta = 5$ (2) $\eta = 2$ (3) $\eta = 1$
(4) $\eta = 0.5$ (5) $\eta = 0.25$

7. 計算式の検討

三次系の実根の一つの絶対値が大きくなつて、振動系の場合は $\eta = p/\omega_n$ が、また減衰系の場合は $\kappa = a/c$ が大きくなると、二次系に近づくことは、図 2~6 および図 12 に見る通りであり、それから、二つの実根かまたは二つの虚根の実数部の絶対値が大きくなって、振動系の場合は $1/\eta = \omega_n/p$ が、また減衰系の場合は $\kappa = a/c$ も $\lambda = b/c$ もともに大きくなると、図 11 および図 13 に見るように、一次系に近づくことによって、計算式の正しいことがわかる。

次に振動系で $\xi = 0.99$, $\eta = 1$ の場合と、減衰系で $\kappa = 1.02$, $\lambda = 1.01$ の場合とは、ともに三重根の場合と殆ど同じであるから、これらを計算してみた。その結果を表 1 に示してある。 κ , λ および ξ をさらに 1 に近づければ、完全に一致するであろうことが推察できる。

8. む す び

以上のように三次系のステップ応答を明らかにしたが、三次系ではパラメーターが二元であるから、結果は繁雑になり過ぎぬように概要の

表 1 両計算式の比較

ct または ωnt	$\kappa=1.02$ $\lambda=1.01$ の 場 合	$\xi=0.99$ $\eta=1$ の 場 合
0.2	0.003	0.001
0.6	0.023	0.023
1.0	0.082	0.081
1.4	0.171	0.167
1.8	0.275	0.271
2.2	0.384	0.379
2.6	0.488	0.484
3.0	0.584	0.580
3.4	0.667	0.664
3.8	0.737	0.735
4.2	0.795	0.794
4.6	0.842	0.841
5.0	0.880	0.879
6.0	0.941	0.941
7.0	0.972	0.972
8.0	0.987	0.987
9.0	0.994	0.994
10.0	0.997	0.998

みを示した。プログラムができているのでどのような三次系であってもそのステップ応答を電子計算機によって立ち所に求めることが可能なわけである。