

[研究論文] スペクトル法による非線形双曲型発展方程式の数値解法

岩田順敬¹・武井康浩²

1 関西大学、神奈川工科大学

2 みずほ情報総研

Numerical scheme based on the spectral method for calculating nonlinear hyperbolic evolution equations

Yoritaka IWATA¹, Yasuhiro TAKEI²

Abstract

Numerical scheme for nonlinear hyperbolic evolution equations is made based on the spectral method. The detail discretization processes are discussed in case of one-dimensional Klein-Gordon equations. In conclusion, a numerical scheme with the order of total calculation cost: $O(N \log_2 N)$ is proposed. As benchmark results, the relation between the numerical precision and the discretization unit size are demonstrated.

Keywords: Fourier spectral method, high-precision numerical scheme

1 一次元 Klein-Gordon 方程式

一次元半線形双曲型発展方程式（非線形 Klein-Gordon 方程式）の初期値境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta F(u) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u(0, t) = u(L, t), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L, t), \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 α, β は実数、 $f(x), g(x)$ は初期関数、 $F(u)$ は u の線形または非線形関数で、 $x \in \Omega = [0, L]$ とし、周期境界条件が課されている。

数値計算スキームを構成するにあたり、 $v = \partial u / \partial t$ として方程式を下記の通り、時間について一階の発展方程

式として表現する。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta F(u) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u(0, t) = u(L, t), \\ v(x, 0) = g(x), \\ v(0, t) = v(L, t). \end{cases} \quad (2)$$

本稿では、スペクトル法 [1] を基盤とした双曲型発展方程式に対する高精度計算スキームの構成法について解説する。実際、初期値境界値問題 (2) を対象にして、空間変数をスペクトル法、時間変数を θ 法で離散化することで数値計算スキームを構成する。

2 空間変数の離散化

空間変数の離散化にスペクトル法 [1] を用いる。方程式 (2) の解が高々 N 項のフーリエ級数として展開する

ことができるものと仮定する。

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = a_0(t) + \sum_{k=1}^N a_k(t) \cos\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) \\ \quad + \sum_{k=1}^N b_k(t) \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right), \\ v(x, t) = c_0(t) + \sum_{k=1}^N c_k(t) \cos\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) \\ \quad + \sum_{k=1}^N d_k(t) \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right), \end{array} \right. \quad (3)$$

その上で、(2) の第一式に (3) 式を代入するとともに、両辺に $\cos\left(\frac{2\pi}{L} lx\right)$ 、 $\sin\left(\frac{2\pi}{L} lx\right)$ をそれぞれ掛けて、 x に関して $\Omega = [0, L]$ で積分すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_0}{dt} = c_0, \\ \frac{da_l}{dt} = c_l, \quad (l=1, \dots, N), \\ \frac{db_l}{dt} = d_l, \quad (l=1, \dots, N) \end{array} \right. \quad (4)$$

が得られる。同様に、(2) の第二式に (3) 式を代入するとともに、両辺に $\cos\left(\frac{2\pi}{L} lx\right)$ 、 $\sin\left(\frac{2\pi}{L} lx\right)$ をそれぞれ掛けて、 x に関して $\Omega = [0, L]$ で積分することで

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{dc_0}{dt} + \beta \int_0^L F(u) dx = 0, \\ \frac{L}{2} \frac{dc_l}{dt} - (\alpha \frac{2\pi^2}{L}) l^2 a_l \\ \quad + \beta \int_0^L F(u) \cos(\frac{2\pi}{L} lx) dx = 0, \\ \quad (l=1, \dots, N), \\ \frac{L}{2} \frac{dd_l}{dt} - (\alpha \frac{2\pi^2}{L}) l^2 b_l \\ \quad + \beta \int_0^L F(u) \sin(\frac{2\pi}{L} lx) dx = 0, \\ \quad (l=1, \dots, N) \end{array} \right. \quad (5)$$

が得られる。(4) と (5) を解いて a_0 、 c_0 および a_l 、 b_l 、 c_l 、 d_l を求めることで、元の方方程式 (2) の解が得られる。ここで非線形項の取り扱いという点では、式 (5) に現れる積分値

$$\begin{aligned} & \bullet \int_0^L F(u) dx \\ & \bullet \int_0^L F(u) \cos\left(\frac{2\pi}{L} lx\right) dx \\ & \bullet \int_0^L F(u) \sin\left(\frac{2\pi}{L} lx\right) dx \end{aligned}$$

が問題となる。非線形項を扱うために、作用素変換法 [1] を用いる。ここでは非線形項をフーリエ変換した後の係数空間で解くのではなく、敢えてフーリエ逆変換することで、非線形項をもとの空間で解くことが要点となる。この処置によって計算量を有意に減らすことができる。実際に台形公式に基づいて次のように近似する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L F(u) \cos(\frac{2\pi}{L} lx) dx \\ \quad \simeq \frac{L}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j) \cos(\frac{2\pi}{L} lx_j), \\ \int_0^L F(u) \sin(\frac{2\pi}{L} lx) dx \\ \quad \simeq \frac{L}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j) \sin(\frac{2\pi}{L} lx_j), \\ \int_0^L F(u) dx \simeq \frac{L}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j). \end{array} \right. \quad (6)$$

ここでは、台形公式で得られた表式とフーリエ変換の類似性によって、非線形項の計算が簡明になる。周期境界条件が課されたもとで、 Ω を等間隔に J 分割した分点を x_j ($j = 0, \dots, J$) とし、それぞれの点での時刻 t での関数 u の値を $u_j = u(x_j, t)$ と表記している。積分値 (6) を数値的に計算する際には、 $a_0(t)$ および $a_l(t)$ 、 $b_l(t)$ 、($l = 1, \dots, N$) から離散フーリエ変換により u_j を求め、式 (6) の右辺を算出する。

ここで、 $F(u)$ が u の M 次多項式の場合、 $J \geq (M + 1)N + 1$ とすると左辺と右辺の値は一致する [1]。さらに、上記の離散フーリエ変換、および式 (6) の右辺の算出に高速フーリエ変換 (FFT) を用いることで、積分値 (6) の計算量は $O(N \log_2 N)$ となる。以上から、スペクトル法

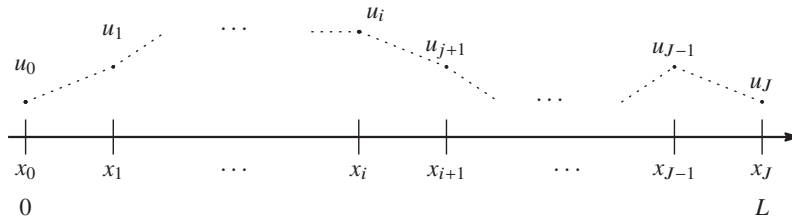


図 1 Ω を J 個に等間隔に分割した分点

により空間変数を離散化した方程式は

$$\begin{cases} \frac{da_0}{dt} = c_0, \\ \frac{da_l}{dt} = c_l, \\ \frac{db_l}{dt} = d_l, \\ L \frac{dc_0}{dt} + \beta \frac{L}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j) = 0, \\ \frac{L}{2} \frac{dc_l}{dt} - (\alpha \frac{2\pi^2}{L}) l^2 a_l \\ + \beta \frac{L}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j) \cos(\frac{2\pi}{L} l x_j) = 0, \\ \frac{L}{2} \frac{dd_l}{dt} - (\alpha \frac{2\pi^2}{L}) l^2 b_l \\ + \beta \frac{L}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j) \sin(\frac{2\pi}{L} l x_j) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

となる。

3 時間変数の離散化

時間変数の離散化に θ 法 [2] を用いる。まず十分に小さな正の値 Δt を用いて $t_n = n\Delta t$, $n \in N$ とし、 $a_l^n = a_l(t_n)$, $c_l^n = c_l(t_n)$ と表した上で、方程式 (7) の第 1 式および第 2 式に θ 法を適用すると

$$\frac{a_l^{n+1} - a_l^n}{\Delta t} = \theta c_l^{n+1} + (1 - \theta) c_l^n$$

となる。ここで、 θ は $0 \leq \theta \leq 1$ を満たす実数とする。さらにこの式を変形すると次式となる。

$$a_l^{n+1} = a_l^n + \Delta t[(1 - \theta) c_l^n + \theta c_l^{n+1}], \quad (8)$$

同様に、 $b_l^n = b_l(t_n)$, $d_l^n = d_l(t_n)$ と表した上で、方程式 (7) の第 3 式についても θ 法を適用し、式変形を加えると

$$b_l^{n+1} = b_l^n + \Delta t[(1 - \theta) d_l^n + \theta d_l^{n+1}] \quad (9)$$

となる。

次に $u_j^n = u(x_j, t_n)$ とした上で、 $\hat{F}_l^n = \frac{2}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j^n) \cos(\frac{2\pi}{L} l x_j)$ と表すと、方程式 (7) の第 5 式に θ 法を適用した式は下式となる。

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \frac{(c_l^{n+1} - c_l^n)}{\Delta t} - \frac{2\alpha\pi^2}{L} l^2 \theta a_l^{n+1} - \frac{2\alpha\pi^2}{L} l^2 (1 - \theta) a_l^n \\ + \beta \frac{L}{2} \theta \hat{F}_l^{n+1} + \beta \frac{L}{2} (1 - \theta) \hat{F}_l^n = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

となる。さらに上式を変形すると下式となる。

$$\begin{aligned} c_l^{n+1} = c_l^n + \alpha \left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2 (1 - \theta) \Delta t a_l^n \\ - \beta (1 - \theta) \Delta t \hat{F}_l^n \\ + \alpha \left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2 \theta \Delta t a_l^{n+1} - \beta \theta \Delta t \hat{F}_l^{n+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

同様に、 $\hat{G}_l^n = \frac{2}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j^n) \sin(\frac{2\pi}{L} l x_j)$ と表し、方程式 (7) の第 6 式に対し θ 法を適用すると下式となる。

$$\begin{aligned} d_l^{n+1} = d_l^n + \alpha \left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2 (1 - \theta) \Delta t b_l^n \\ - \beta (1 - \theta) \Delta t \hat{G}_l^n \\ + \alpha \left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2 \theta \Delta t b_l^{n+1} - \beta \theta \Delta t \hat{G}_l^{n+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

最後に、方程式 (7) の第 4 式に対し θ 法を適用すると

$$c_0^{n+1} = c_0^n - \beta \Delta t[(1 - \theta) \hat{F}_0^n + \theta \hat{F}_0^{n+1}] \quad (13)$$

が得られる。

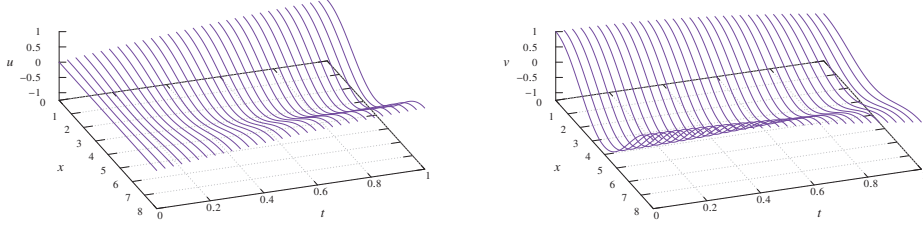
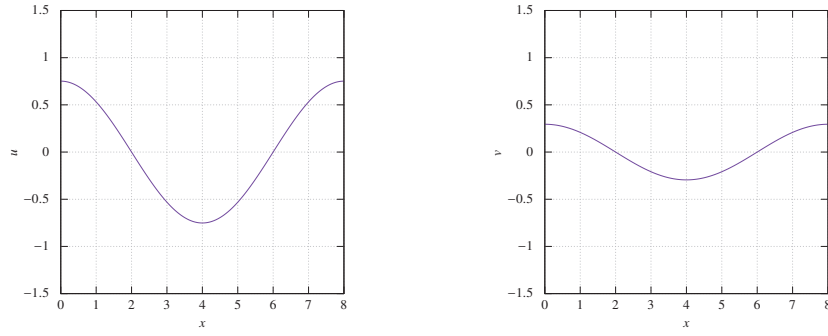
以上をまとめて、時間変数を離散化して得られた式 (8), (9), (11), (12), (13) より、数値計算で解くべき問題として、

$$\begin{cases} a_l^{n+1} = a_l^n + \Delta t(1 - \theta) c_l^n + \Delta t \theta c_l^{n+1}, \\ b_l^{n+1} = b_l^n + \Delta t(1 - \theta) d_l^n + \Delta t \theta d_l^{n+1}, \\ c_l^{n+1} = c_l^n \\ + \alpha \left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2 (1 - \theta) \Delta t a_l^n - \beta (1 - \theta) \Delta t \hat{F}_l^n \\ + \alpha \left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2 \theta \Delta t a_l^{n+1} - \beta \theta \Delta t \hat{F}_l^{n+1}, \\ d_l^{n+1} = d_l^n \\ + \alpha \left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2 (1 - \theta) \Delta t b_l^n - \beta (1 - \theta) \Delta t \hat{G}_l^n \\ + \alpha \left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2 \theta \Delta t b_l^{n+1} - \beta \theta \Delta t \hat{G}_l^{n+1}, \\ c_0^{n+1} = c_0^n - \beta (1 - \theta) \Delta t \hat{F}_0^n - \beta \theta \Delta t \hat{F}_0^{n+1} \end{cases} \quad (14)$$

が得られる。ここで方程式 (14) を解くとは、 $l = 1, \dots, N$ とした上で、既知の値である a_0^n , c_0^n および a_l^n , b_l^n , c_l^n , d_l^n を用いて、未知の値 a_0^{n+1} , c_0^{n+1} および a_l^{n+1} , b_l^{n+1} , c_l^{n+1} , d_l^{n+1} を求めることを指す。なお、 θ 法を適用したことから、各式の右辺に未知の値 a_0^{n+1} , c_0^{n+1} および a_l^{n+1} , b_l^{n+1} , c_l^{n+1} , d_l^{n+1} が存在することに留意が必要である。そこで式 (14) を解くために、次節で説明する反復法を構成する。

4 反復法による数値解の計算

方程式 (14) を満たす未知の値 a_0^{n+1} , c_0^{n+1} および a_l^{n+1} , b_l^{n+1} , c_l^{n+1} , d_l^{n+1} を求めるために、連立方程式を直接解くのではなく反復法を用いる。具体的には、反復のために新たな変数 v を導入し、式 (15) のように、 a_0^{n+1} , c_0^{n+1} , a_l^{n+1} , b_l^{n+1} , c_l^{n+1} , d_l^{n+1} を $a_0^{n+1,v}$, $c_0^{n+1,v}$, $a_l^{n+1,v}$, $b_l^{n+1,v}$, $c_l^{n+1,v}$, $d_l^{n+1,v}$ と $a_0^{n+1,v}$, $c_0^{n+1,v}$, $a_l^{n+1,v}$, $b_l^{n+1,v}$, $c_l^{n+1,v}$, $d_l^{n+1,v}$ と

図2 線形 Klein-Gordon 方程式 : u と v の時間発展図3 線形 Klein-Gordon 方程式 : $t = 1$ における u と v

$d_l^{n+1,\nu}$ に分けた漸化式を考える。

$$\begin{cases} a_l^{n+1,\nu+1} = a_l^n + \Delta t(1-\theta)c_l^n + \Delta t\theta c_l^{n+1,\nu}, \\ b_l^{n+1,\nu+1} = b_l^n + \Delta t(1-\theta)d_l^n + \Delta t\theta d_l^{n+1,\nu}, \\ c_l^{n+1,\nu+1} = c_l^n \\ \quad + \alpha\left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2(1-\theta)\Delta t a_l^n - \beta(1-\theta)\Delta t \hat{F}_l^n \\ \quad + \alpha\left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2\theta\Delta t d_l^{n+1,\nu} - \beta\theta\Delta t \hat{F}_l^{n+1,\nu}, \\ d_l^{n+1,\nu+1} = d_l^n \\ \quad + \alpha\left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2(1-\theta)\Delta t b_l^n - \beta(1-\theta)\Delta t \hat{G}_l^n \\ \quad + \alpha\left(\frac{2\pi l}{L}\right)^2\theta\Delta t b_l^{n+1,\nu} - \beta\theta\Delta t \hat{G}_l^{n+1,\nu}, \\ c_0^{n+1,\nu+1} = c_0^n \\ \quad - \beta(1-\theta)\Delta t \hat{F}_0^n - \beta\theta\Delta t \hat{F}_0^{n+1,\nu} \end{cases} \quad (15)$$

ここで $\hat{F}_l^{n+1,\nu}$ 、 $\hat{G}_l^{n+1,\nu}$ はそれぞれ式 (16) で表される。とくに $u_j^{n+1,\nu}$ は離散フーリエ変換により $a_l^{n+1,\nu}$ 、 $b_l^{n+1,\nu}$ 、 $c_l^{n+1,\nu}$ 、 $d_l^{n+1,\nu}$ を用いて求められる。

$$\begin{cases} \hat{F}_0^{n+1,\nu} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j^{n+1,\nu}), \\ \hat{F}_l^{n+1,\nu} = \frac{2}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j^{n+1,\nu}) \cos\left(\frac{2\pi}{L} l x_j\right), \\ \hat{G}_l^{n+1,\nu} = \frac{2}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F(u_j^{n+1,\nu}) \sin\left(\frac{2\pi}{L} l x_j\right). \end{cases} \quad (16)$$

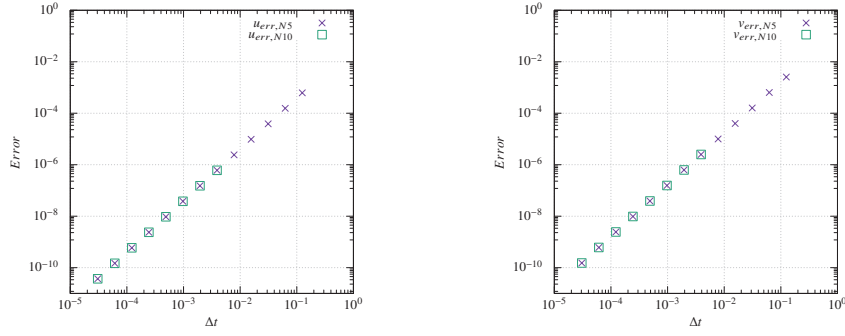
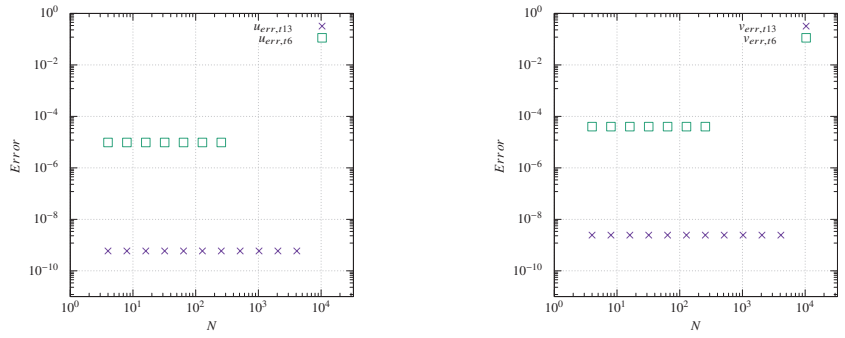
上記の漸化式 (15) により、 $a_0^{n+1,\nu}$ 、 $c_0^{n+1,\nu}$ 、 $a_l^{n+1,\nu}$ 、 $b_l^{n+1,\nu}$ 、 $c_l^{n+1,\nu}$ 、 $d_l^{n+1,\nu}$ を用いて、 $a_0^{n+1,\nu+1}$ 、 $c_0^{n+1,\nu+1}$ 、 $a_l^{n+1,\nu+1}$ 、 $b_l^{n+1,\nu+1}$ 、 $c_l^{n+1,\nu+1}$ 、 $d_l^{n+1,\nu+1}$ を算出する。そして、漸化式の値が収束するまでこの計算を繰り返す。収束した $a_0^{n+1,\nu}$ 、 $c_0^{n+1,\nu}$ 、 $a_l^{n+1,\nu}$ 、 $b_l^{n+1,\nu}$ 、 $c_l^{n+1,\nu}$ 、 $d_l^{n+1,\nu}$ は式 (14) を満たすことから a_0^{n+1} 、 c_0^{n+1} 、 a_l^{n+1} 、 b_l^{n+1} 、 c_l^{n+1} 、 d_l^{n+1} とする。

結果として、(16) の数値積分を行う際に最も多くの計算量 $O(N \log_2 N)$ を要する。これが根拠となり、本数値計算スキーム全体の計算量が $O(N \log_2 N)$ と見積もられる。

5 スペクトル法による数値計算例

5.1 $F(u)$ が線形の場合

初期値境界値問題 (2) で $F(u) = u$ 、 $\alpha = -1$ 、 $\beta = 1$ 、 $\Omega = [0, L]$ とした場合について、数値計算を行う。


 図4 u と v に関する誤差と Δt の関係

 図5 u と v に関する相対誤差と N の関係

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = v, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(L, t), \\ v(x, 0) = \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \\ v(0, t) = v(L, t). \end{cases} \quad (17)$$

とくにこの問題の厳密解は式 (18) で与えられる。

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2}} \sin\left(\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \\ v(x, t) = \cos\left(\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right). \end{cases} \quad (18)$$

方程式 (17) について、本稿で紹介した数値計算スキーム (ただし、 $\theta = \frac{1}{2}$, $J \geq 2N + 1$, $L = 8$ とする) により求めた数値解の時間発展および時刻 $t = 1$ の数値解を図2及び図3に示す。

ここで厳密解は式 (18) で表せることから、数値解と厳密解の誤差を求めた結果を図4及び図5に示す。具体的には、時刻 $t = 1$ の数値解 (ただし、 $N = 2^5$ または $N = 2^{10}$ と固定し、 $\Delta t = 2^{-2}, 2^{-3}, \dots, 2^{-15}$ と変化させた

場合) について、 x 軸上の分点 x_j ($j = 0, \dots, J$) の数値解の値と厳密解の値の誤差 (相対誤差と絶対誤差のうち小さいもの) を求め、その最大値を各 Δt でプロットした。

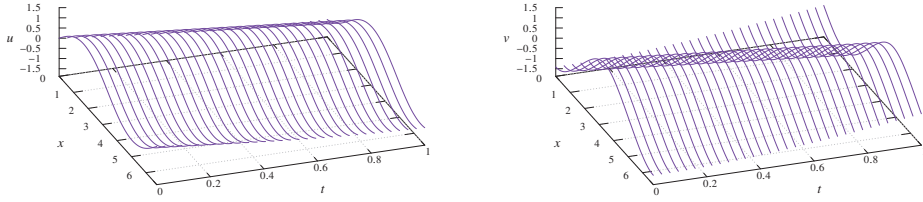
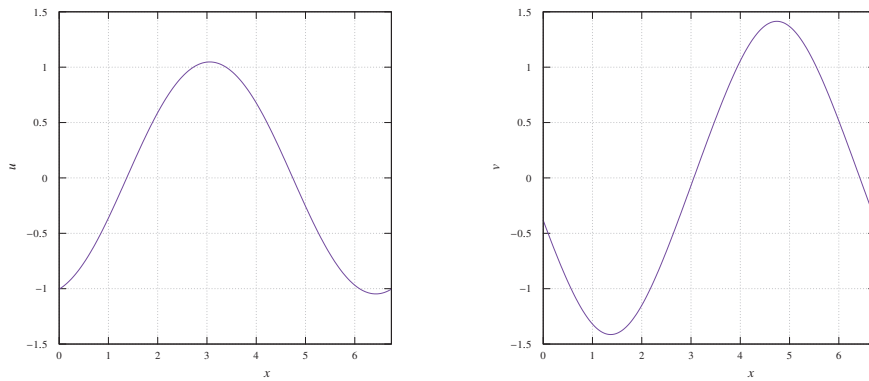
時間変数に関する離散化の精度

まず図4を見ると分かるとおり、 Δt を $\frac{1}{2}$ 倍すると、誤差は $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ 倍になる。つまり、本数値計算スキームでは、時間変数に関して2次の精度の数値計算スキームとなっていることが、数値計算結果からも確認できる。言い換えれば、 Δt を十分に小さくすることで、誤差を小さくすることができるということになる。

空間変数に関する離散化の精度

また、 $N = 2^5$ と $N = 2^{10}$ の場合の誤差を比較すると、 Δt の大きさが同じであれば、誤差はほぼ同じとなる様子が分かる (なお、 $N = 2^{10}$ の場合、 Δt が大きいと反復法による数値計算が収束せず、数値解は得られない)。これはスペクトル法の利点でもあり、誤差が Δt の大きさのみ依存し、 N の大きさによらないことを示している。

このことは、次の図5の結果からも分かる。このグラフは、時刻 $t = 1$ の数値解 (ただし、 $\Delta t = 2^{-6}$ または $\Delta t = 2^{-13}$ と固定し、 $N = 2^2, 2^3, \dots, 2^{15}$ と変化させた場合) について、 x 軸上の分点 x_j ($j = 0, \dots, J$) の数値解

図6 Sine-Gordon 方程式: u と v の時間発展図7 $t = 1$ における v

の値と厳密解の値の誤差を求め、その最大値を各 Δt でプロットしたものである。

この結果を見ると、 N を変化させたとしても誤差は変わらない。これは本数値計算スキームでは $F(u)$ の計算に式 (6) を用いているが、 $F(u)$ が u の M 次多項式の場合、 $J \geq (M+1)N+1$ とするとその左辺と右辺の値は一致すること [1]、また N をある程度大きくすれば、解は式 (3) で厳密に表現できることが要因である。したがって、空間変数の離散化に伴う計算誤差は非常に小さくなり、 N による誤差に大きな違いはなくなる。この点が数値計算結果からも確認できる。さらに言えば、この数値計算例の計算誤差の大半は、時間変数に関する離散化 Δt に伴う計算誤差となることが結論される。

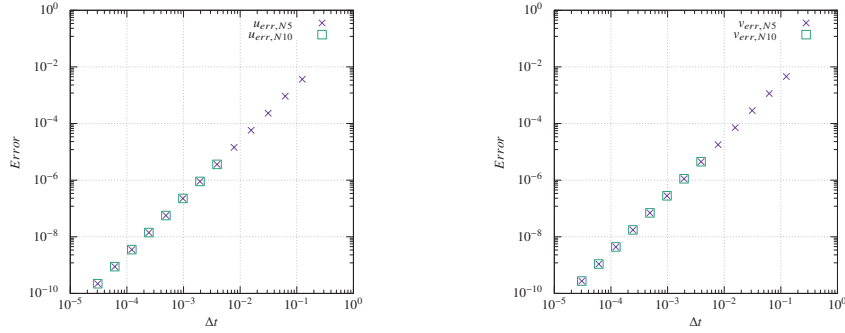
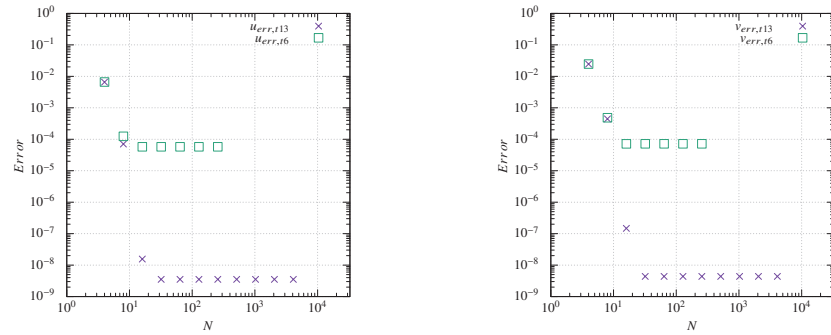
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = v, \\ v(x, 0) = -\sqrt{2} \frac{\text{cn}(x, \frac{1}{2}) \text{dn}(x, \frac{1}{2})}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \text{sn}^2(x, \frac{1}{2})}}, \\ v(0, t) = v(L, t), \\ u(x, 0) = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{2} \text{sn}(x, \frac{1}{2}) \right], \\ u(0, t) = u(L, t). \end{cases} \quad (19)$$

なお、上式の厳密解は式 (20) となる。

5.2 $F(u)$ が非線形の場合

初期値境界値問題 (2) で $F(u) = \sin u$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\Omega = [0, L]$ とした場合について、数値計算を行う。この場合の支配方程式は、Sine-Gordon 方程式として知られて

$$\begin{cases} u(x, t) = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{2} \text{sn}(x - \sqrt{2}t, \frac{1}{2}) \right], \\ v(x, t) = -\sqrt{2} \frac{\text{cn}(x - \sqrt{2}t, \frac{1}{2}) \text{dn}(x - \sqrt{2}t, \frac{1}{2})}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \text{sn}^2(x - \sqrt{2}t, \frac{1}{2})}} \end{cases} \quad (20)$$


 図8 u と v に関する誤差と Δt の関係

 図9 u と v に関する誤差と N の関係

ここで $\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}$ はヤコビの楕円関数である [3]。また L は第一種完全楕円積分より下記と表せる [3]。

$$\left\{ \begin{aligned} L &= 4F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= 6.743001419250385098 \cdots \end{aligned} \right. \quad (21)$$

方程式 (19) について、本稿で紹介した数値計算スキーム（ただし、 $\theta = \frac{1}{2}, J \geq 2N + 1$ とする）により求めた数値解の時間発展および時刻 $t = 1$ の数値解を図 6 及び図 7 に示す。

ここで厳密解は式 (20) で表せることから、数値解と厳密解の誤差を求めた結果を図 8 に示す。具体的には、時刻 $t = 1$ の数値解（ただし、 $N = 2^5$ または $N = 2^{10}$ と固定し、 $\Delta t = 2^{-2}, 2^{-3}, \dots, 2^{-15}$ と変化させた場合）について、 x 軸上の分点 x_j ($j = 0, \dots, J$) の数値解の値と厳密解の値の誤差（相対誤差と絶対誤差のうち小さいもの）を求め、その最大値を各 Δt でプロットした。

時間変数に関する離散化の精度

図 8 を見ると分かるとおり、 Δt を $\frac{1}{2}$ 倍すると、誤差は $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ 倍となり、時間変数に関して 2 次の精度の数値

計算スキームとなっていることが確認できる。

空間変数に関する離散化の精度

また、 $N = 2^5$ と $N = 2^{10}$ の場合の誤差を比較すると、 Δt の大きさが同じであれば、誤差はほぼ同じとなる様子が分かる（なお、 $N = 2^{10}$ の場合、 Δt が大きいと反復法による数値計算が収束せず、数値解は得られない）。この点は、 $F(u)$ が線形の場合の数値計算例と同様であり、誤差が Δt の大きさのみ依存し、 N の大きさによらないことを示している。

この点を検証するために時刻 $t = 1$ の数値解（ただし、 $\Delta t = 2^{-6}$ または $\Delta t = 2^{-13}$ と固定し、 $N = 2^2, 2^3, \dots, 2^{15}$ と変化させた場合）について、 x 軸上の分点 x_j ($j = 0, \dots, J$) の数値解の値と厳密解の値の誤差を求め、その最大値を各 Δt で図 9 にプロットした。

この結果から、 N を大きくしていくと、一旦、数値解と厳密解の誤差は小さくなる。しかし、さらに N を大きくしていくと、誤差はほぼ一定の大きさとなる様子が見て取れる。これは式 (3) を見ると分かる通り、 N が小さい場合、 N の値による打ち切り誤差が大きくなるためである。そのため N を大きくすることで、打ち切り誤差が減少する。実際、 $N = 2^2$ から $N = 2^4$ へと変えた場合、誤差が減少する様子が確認できる。

一方、 N が 2^5 より大きい場合、誤差はほぼ一定の大きさとなる。この結果は、 N を十分に大きくすることで式 (3) で解を十分に表現でき、空間変数の離散化に伴う計算誤差が非常に小さくなることを示している。言い換えれば、 N が 2^5 より大きい場合には、非線形性を扱った今回の数値計算例においても、計算誤差の大半は Δt に伴う計算誤差となることが結論される。

6 まとめ

本稿では、一次元の非線形 Klein-Gordon 方程式を取り上げ、スペクトル法を用いた数値計算スキームを構成した。また具体的に、線形 Klein-Gordon 方程式と非線形 Sine-Gordon 方程式について、既知の厳密解との比較を通じて、本数値計算スキームによる誤差の出方を定量的に示した。その結果、本稿で構成した数値計算スキームは、時間変数に関して 2 次の精度であり、空間変数に関しては、 N を十分に大きくすることで、時間変数の離散化に伴う計算誤差と比べて非常に小さい計算誤差となることが確認できた。これによって、どの程度の時間刻み Δt に対して、どの程度の空間刻み N が適しているかについての目安が得られた。この性質は、今後、厳密解の存在しないような未知の双曲型発展方程式に対して計算スキームの誤差を推し量るためのベンチマークとなる。今後の展開として、誤差評価のための不等式を得て、精密な数理解析と連動した計算スキームへと仕上げていくこ

とが考えらえる。

一般に、非線形 Klein-Gordon 方程式のような非線形双曲型方程式では、数値計算を通じ、解の時間発展の様子を把握することが有用なアプローチとなる。しかし、差分法等による空間変数の離散化では、離散化に伴う誤差が大きく影響し、適切な数値計算が実現できないことも多い。

本稿で紹介した数値計算スキームは、計算量 $O(N \log_2 N)$ で計算でき、かつ空間変数の離散化に伴う誤差の影響を出来るだけ抑えられる計算方法である。このことから本数値計算スキームは、今後、解の時間発展の様子を詳細に把握するために活用されることが期待される。

参考文献

- [1] 石岡圭一 (2004) 「スペクトル法による数値計算入門」 東京大学出版会.
- [2] R. Dautray and J.-L. Lions, “Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 5: Evolution Problems I (English Edition)”, Springer-Verlag, 2000.
- [3] 大宮真弓 (2008) 「非線形波動の古典解析」 森北出版.