

四次の楕円曲線の媒介変数表示と Landen 変換について

高橋 大介

[研究論文]

四次の楕円曲線の媒介変数表示と Landen 変換について

高橋大介

神奈川工科大学 物理非常勤講師
中央大学 理工学部物理学科 科研費研究員

Note on parametrization of fourth-order elliptic curves and Landen transformations

Daisuke A. TAKAHASHI

Abstract

Parametrization (Uniformization) of elliptic curves with fourth-order polynomials in the right-hand side, $Y^2 = X^4 - h_2X^2 - h_3X - h_4$, by elliptic functions is revisited. Various seemingly different but equivalent expressions for the parametrizing function are presented, and if possible, their derivations are provided in several ways. In particular, the proofs based on Weierstrass's and Jacobi's functions are constructed independently and hence closed in itself. The reduction to the birationally equivalent elliptic curves with the resolvent cubic in the right-hand side, the integration formulae, the reduction to the Legendre elliptic curves whose fourth-order polynomial is biquadratic, are also discussed. In derivation based on the Weierstrass theory, the starting point is the expression given by Akhiezer. To discuss the transformations specific to the Legendre case, we provide the first and second order transformation formulae for σ_1, σ_2 , and σ_3 functions, which reflect their triality. In derivation based on the Jacobi theory, we discuss S_4 symmetry and related formulae arising from permutation of the four roots and provide a simplified proof for the Landen transformation based on the coefficient matching of the differential equation.

Keywords: elliptic curves, uniformization, Weierstrass sigma functions, Jacobi elliptic functions, modular group, Landen transformation

1 序文

楕円曲線をトーラス上の変数によってパラメトライズすること (“一様化” [WW27, §20.7]) は、楕円関数論の様々な応用においてしばしば出発点になる。最も基本的な例は右辺が三次式の楕円曲線

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3, \quad g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0, \quad (1.1)$$

の Weierstrass \wp 関数による媒介変数表示

$$(X, Y) = (\wp(z), \wp'(z)) \quad (1.2)$$

である。本稿では、右辺が四次式の場合の楕円曲線

$$Y^2 = X^4 - h_2X^2 - h_3X - h_4 \quad (1.3)$$

に対して複数の媒介変数表示を与え、その相互関係を明らかにする。証明に必要な楕円関数の諸公式にも適宜言及する。

よく知られているように任意の楕円曲線は式 (1.1) の標準形に双有理同値で、それらは不変量 j の値で分類される。特に式 (1.3) の媒介変数表示は \wp の線形分数関数で書かれる [WW27, §20.7], [HC64, Kap. 5, §3]。基本理論の観点からはこれ以上新たに付け加える事実は無いが、この \wp の線形分数関数には一見では同値と思えぬ表示が多数存在し、しかもそれらの同値性は加法定理等の各種公式を駆使しても

さほど自明でないため、ここにまとめることにした。

本稿の背景には筆者が楕円関数を理論物理学に応用する過程で経験した試行錯誤悪戦苦闘がある。特に、最初 Mathematica を援用した力技で見つけた Jacobi の楕円関数による表式 (3.29)-(3.31) やその二乗の表式 (3.36) を、 sn^2 の線形分数関数 (3.27) (これは Weierstrass の理論に翻訳すれば先述の \wp の線形分数関数) からどう導くか当時は分からず引っかけが残ったことがきっかけになっている。今日では Akhiezer の用いた関数 (2.1) に任意の楕円関数を σ 関数の比で表す定理を適用した式 (2.12) へ帰着させる短い証明を得ており、一旦分かっしまえば楕円関数論の初歩的練習問題である。しかし、関数論を専門としない筆者が有用な先人の文献にたどり着きこれらをまとめるのに長い時間を要したことを顧みると、他の研究者とこの内容を共有することは無駄ではないと考える。その趣旨から、可能な場合には一つの関係式に複数の証明を与える。というのも、楕円関数の “ユーザー” が研究途上で出会う様々な関係式が、二重周期関数の一般論から出発し全てを導くスタイルの教科書の一体何章の議論に帰着するかは全く自明でないため、応用の観点からは異なる視点で証明を与えることが、それがたとえ論理的最短ではないにせよ示唆的であることがしばしばあるためである。そのような精神で書かれた戸田の教科書 [戸 01] の彼自身の手による様々な公式の別証は今読んでも得るものが多い。

本稿の残りは次のように構成される。2節では Weierstrass の楕円関数論に登場する関数を用いた公式・関係式とその証明を与える。3節では同様の問題を Jacobi の楕円関数論に登場する関数を用いて解く。2節の結果の翻訳によって直ちに分かる関係式にも独立した証明を与える。4節ではまとめと展望を述べる。

2 Weierstrass の関数による媒介変数表示

本節では、右辺が四次の楕円曲線 (1.3) の Weierstrass の楕円関数論に登場する関数による媒介変数表示とその様々な書き換えを与える。2-1 節では用いる記号について述べ、2-2 節では媒介変数表示の基本となる関数 $Q(z, y)$ を定義しその基本性質を述べる。2-3 節でこの関数 $Q(z, y)$ の多様な別表示を与えるが、これは本稿の主結果の一つである。2-4 節ではこの関数の累乗の積分公式を与える。2-5 節では四次多項式に対応する三次分解多項式を右辺に持つ楕円曲線との関係を議論する。2-6 節で右辺の四次式が特に複二次式である楕円曲線 (Legendre の楕円曲線) に特化した媒介変数表示を議論し、その書き換えに必要な 1 位及び 2 位の変換を 2-7 節で論じる。証明は 2-8 節でまとめて与える。

2-1 記号

Weierstrass の楕円関数論に現れる関数 $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\sigma(z)$ の定義は慣習に従う [WW27, AS65, Akh90, HC64, Law89]。 $\wp(z)$ の周期を $2\omega, 2\omega'$ と書き、半周期比は $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ とする。周期まであらわに引数に書く場合 $\wp(z; 2\omega, 2\omega')$ 等と書く。またシグマ関数の亜種 $\sigma_i(z)$, $i = 1, 2, 3$ の定義も慣習に従う [HC64, Kap. 2 §4, §6], [Akh90, §15 Eq. (2)], [Law89, (6.2.18)-(6.2.21)]。半周期を $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega, -\omega - \omega', \omega')$ と書き、それらの点における \wp と ζ の値を $e_i = \wp(\omega_i)$, $\eta_i = \zeta(\omega_i)$, $\eta = \eta_1$, $\eta' = \eta_3$ と書く^{*1}。

2-2 関数 $Q(z, y)$ とその微分方程式

次の関数を議論の出発点とする：

$$Q(z, y) := \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(y)}{\wp(z) - \wp(y)}. \quad (2.1)$$

しばしば第二変数 y をパラメータとみなし $Q'(z, y) = \frac{\partial}{\partial z} Q(z, y)$ と書く。文脈から明らかな時は変数を略し $Q(z, y) = Q$, $Q'(z, y) = Q'$ と書く。四次の楕円曲線の一様化は \wp の線形分数関数で達成される [WW27, §20.7], [HC64, Kap. 5 §3] が, Akhiezer は更にこれを変形し上記と等価な関数による表示を与えた [Akh90, Chap. 7, §41]。本稿の記号との関係は $[\wp(u, v)]_{\text{Akhiezer}} = Q(u - \frac{v}{2}, v)$ 。

$Q(z, y)$ は以下の加法定理を満たす [WW27, §20.3], [AS65, 18.4.1, 18.4.3], [HC64, Kap. 1 §9, §11], [Akh90, Chap. 3 §15], [Law89, Sec. 6.8], [笠 16, 8.4 節]：

$$Q(z, y) = \zeta(z + y) - \zeta(z) - \zeta(y), \quad (2.2)$$

$$Q(z, y)^2 = \wp(z + y) + \wp(z) + \wp(y). \quad (2.3)$$

式 (2.2) は任意の楕円関数の極における ζ 関数とその導関数の和による表示 [WW27, §20.52], [Akh90, §14], [HC64, Kap. 1 §12] の特殊な場合である。式 (2.2) から明らかに

$$\begin{aligned} Q(z, y) &= Q(y, z) = Q(-z - y, y) = Q(-z - y, z) \\ &= Q(y, -z - y) = Q(z, -z - y). \end{aligned} \quad (2.4)$$

また式 (2.2) の微分より

$$Q'(z, y) = \wp(z) - \wp(z + y). \quad (2.5)$$

Q は次の微分方程式を満足する：

$$Q'^2 = \prod_{i=0}^3 (Q - Q_i) = Q^4 - h_2 Q^2 - h_3 Q - h_4, \quad (2.6)$$

但し $Q_0 = Q_0(y)$, $Q_i = Q_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, は

$$Q_0(y) := Q(-\frac{y}{2}, y) = -\frac{1}{2} \frac{\wp''(\frac{y}{2})}{\wp'(\frac{y}{2})} = \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_j(y)}{\sigma(y)}, \quad (2.7)$$

$$Q_i(y) := Q(-\frac{y}{2} + \omega_i, y) = -\frac{1}{2} \frac{\wp''(\frac{y}{2} - \omega_i)}{\wp'(\frac{y}{2} - \omega_i)} = \sum_{j=1}^3 (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{\sigma_j(y)}{\sigma(y)}, \quad (2.8)$$

で定義され、 h_i たちは

$$\begin{aligned} h_2 &= 6\wp(y), \quad h_3 = -4\wp'(y), \\ h_4 &= 3\wp(y)^2 + 4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

と表される。この関数 Q を用いて楕円曲線 (1.3) は

$$(X, Y) = (Q(z, y), Q'(z, y)) \quad (2.10)$$

と媒介変数表示される。並進対称性により任意の複素数 c に対し $Q(z + c, y)$ も同じ微分方程式 (2.6) を満たす。

2-3 等価な表示たち

式 (2.1) または (2.2) の関数は以下の別表示を持つ：

$$\begin{aligned} Q(z, y) &= \frac{1}{2} \frac{\wp'(y) + \wp'(z + y)}{\wp(y) - \wp(z + y)} = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) + \wp'(z + y)}{\wp(z) - \wp(z + y)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$= Q(\beta, y) + \frac{\sigma(y)\sigma(z - y)\sigma(z + \beta + y)}{\sigma(\beta)\sigma(\beta + y)\sigma(z)\sigma(z + y)} \quad (\beta \neq 0, -y \pmod{2\omega, 2\omega'}) \quad (2.12)$$

$$= Q_0(y) - \frac{\sigma(y)\sigma(z + \frac{y}{2})^2}{\sigma(\frac{y}{2})^2\sigma(z)\sigma(z + y)} \quad (2.13)$$

$$= Q_i(y) - \frac{\sigma(y)\sigma_i(z + \frac{y}{2})^2}{\sigma_i(\frac{y}{2})^2\sigma(z)\sigma(z + y)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.14)$$

$$= Q_0(y) + \frac{\wp'(\frac{y}{2})}{\wp(\frac{y}{2}) - \wp(z + \frac{y}{2})} \quad (2.15)$$

$$= -\frac{\sigma_j(y)\sigma_k(y)}{\sigma_i(y)\sigma(y)} - \frac{\sigma(y)\sigma_i(z)\sigma_i(z + y)}{\sigma_i(y)\sigma(z)\sigma(z + y)} \quad ((i, j, k) \text{ は } (1, 2, 3) \text{ の任意の置換}). \quad (2.16)$$

式 (2.12) は最も一般的な σ 関数による表示で、 β を極でない任意の値にとれる。特に β を $Q'(z, y)$ の零点に選べば (2.13), (2.14) を、 ω_i に選べば (2.16) を得る。Weierstrass から Jacobi の記号に移った時、式 (2.1), (2.11), (2.15), (2.16) は Jacobi 楕円関数による表示を許す (3-8 節)。式 (2.2) は Jacobi

^{*1} ここで記号の衝突について注記しておく。ここでの $e_{1,2,3}, \omega, \omega', \eta, \eta'$ の定義は [HC64, Akh90, Law89, AS65] と、 $\sigma_{1,2,3}$ は [HC64, Akh90, Law89] と、 $\omega_{1,2,3}, \eta_{1,2,3}$ は [Akh90, Law89] と一致する。[AS65] では $\omega_{1,3}$ は一致するが ω_2 の符号が逆 (しかし \wp は偶関数なので殆どの公式は流用可)。[WW27] は二重周期を $2\omega_1, 2\omega_2$ と記す。 $\sigma_{1,2,3}$ の定義は §20.421 にあるが深入りはしていない。[HC64] では ω_1, ω_2 が単位二重周期 $2\omega, 2\omega'$ の意味で、 η_1, η_2 が $2\eta, 2\eta'$ の意味で用いられ、また節によっては単に ω が一般の二重周期の記号にも使われる。本稿の記号は [Akh90] に近いが、証明の参考にした箇所が多いのは [HC64] である。

ゼータ関数, 式 (2.12)-(2.14) はテータ関数で書かれる. 式 (2.15) の \wp の線形分数関数は [WW27, §20.7], [HC64, Kap. 5, §3] に対応する.

2-4 積分公式

不定積分 $I_n = \int Q(z, y)^n dz$ は一般に閉じた形で実行できる. まず I_1, I_2 は加法公式 (2.2), (2.3) より直ちに

$$I_1 = \ln \frac{\sigma(z+y)}{\sigma(z)\sigma(y)} - \zeta(y)z, \quad (2.17)$$

$$I_2 = -\zeta(z+y) - \zeta(z) + \wp(y)z. \quad (2.18)$$

I_1 は第 3 種楕円積分の標準形と呼ばれている [HC64, Kap. 6, §3]. I_3, I_4, \dots は以下の漸化式より帰納的に求められる. 但し $I_0 = z$ で $n = 0$ の時一番右の項は無い.

$$I_{n+3} = \frac{1}{n+2} \left(Q^n Q' + (n+1)h_2 I_{n+1} + \left(n + \frac{1}{2}\right) h_3 I_n + n h_4 I_{n-1} \right). \quad (2.19)$$

I_1 は可換な微分作用素の対の同時固有関数 (リーマン面上で真性特異点を持つ Baker-Akhiezer 関数) を方程式の階数を逐次的に下げて求める時に用いる [Kri77]. (Lamé ポテンシャルに対しては [For02, Chap. IX], [Kri80] 等.)

2-5 三次分解多項式

四次方程式の冪根による解法では一旦三次分解方程式を経由することはよく知られている. 今右辺が四次式の楕円曲線

$$Y^2 = X^4 - h_2 X^2 - h_3 X - h_4 \quad (2.20)$$

と, その三次分解多項式を右辺に持つ楕円曲線

$$\frac{1}{4}\tilde{Y}^2 = \tilde{X}^3 + \frac{1}{2}h_2\tilde{X}^2 + \frac{1}{16}(h_2^2 + 4h_4)\tilde{X} + \frac{1}{64}h_3^2 \quad (2.21)$$

の媒介変数表示の関係を与える. 式 (2.20) 右辺の根を $a+b+c, a-b-c, -a+b-c, -a-b+c$ とすると式 (2.21) のそれは $-a^2, -b^2, -c^2$ である. これら二つの曲線は双有理同値である. 実際 X_0 を (2.20) の右辺の根の一つ, 即ち $X_0^4 - h_2 X_0^2 - h_3 X_0 - h_4 = 0$ を満たす複素数として以下の双有理変換によって両者は互いに移り合う:

$$(X, Y) = \left(X_0 + \frac{p}{4(\tilde{X} - \tilde{X}_0)}, -\frac{p\tilde{Y}}{4(\tilde{X} - \tilde{X}_0)^2} \right) \\ \leftrightarrow (\tilde{X}, \tilde{Y}) = \left(\tilde{X}_0 + \frac{p}{4(X - X_0)}, -\frac{pY}{4(X - X_0)^2} \right), \quad (2.22)$$

$$p = 4X_0^3 - 2h_2X_0 - h_3, \quad \tilde{X}_0 = \frac{1}{4}(2X_0^2 - h_2). \quad (2.23)$$

2-2 節のように係数 h_i たちを式 (2.9) で表し楕円曲線 (2.20) を式 (2.10) でパラメトライズする. すると対応する三次曲線 (2.21) は

$$(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \left(\wp(z + \frac{y}{2}) - \wp(y), \wp'(z + \frac{y}{2}) \right) \quad (2.24)$$

と媒介変数で表される.

2-6 Legendre の楕円曲線

[HC64, Kap. 5 §4] に倣い, 右辺が複二次 (biquadratic, 奇数次項の係数が消える) であるような楕円曲線

$$Y^2 = X^4 - h_2 X^2 - h_4 \quad (2.25)$$

を Legendre の楕円曲線と呼ぼう. このケースに特有の媒介変数表示をここで考える. これは $h_3 = \wp'(y) = 0$, つまり $y = \omega_i$ ($i = 1, 2, 3$) の時に起こる. 今 (i, j, k) を $(1, 2, 3)$ の任意の置換とする. すると楕円曲線は式 (2.9) で $y = \omega_i$ として

$$Y^2 = X^4 - 6e_i X^2 + e_i^2 - 4e_j e_k. \quad (2.26)$$

そしてその媒介変数表示 $(X, Y) = (Q(z, \omega_i), Q'(z, \omega_i))$ は

$$Q(z, \omega_i) = -\frac{\sigma_j(z)\sigma_k(z)}{\sigma(z)\sigma_i(z)}, \quad (2.27)$$

$$Q'(z, \omega_i) = \frac{\sigma_i(z)^2}{\sigma(z)^2} - \frac{\sigma(z)^2}{\sigma_i(z)^2} (e_i - e_j)(e_i - e_k). \quad (2.28)$$

Legendre の楕円曲線は単独の Jacobi 楕円関数でパラメトライズされる (3-7 節) が, Weierstrass の理論におけるその対応物は $\frac{\sigma_i}{\sigma}$ (式 (3.59)-(3.61)) である. 上記の $Q(z, \omega_i)$ をその形に帰着させる 2 位の変換 (Landen 変換) を次節で導くが, それは式 (2.37)-(2.39) で与えられる.

2-7 1 位の変換, 2 位の変換

一般に Weierstrass の関数 \wp, ζ, σ は二重周期に対する 1 位の変換に対し不変である [HC64, Akh90]. この不変性 — それ自体は定義から自明 — が多くの数論的帰結をもたらすのはよく知られている. σ 関数の派生物 $\sigma_{1,2,3}$ は単独ではこの変換のもとで不変でないが, 互いに移り変わる triality がある. 以下それを論ずる.

まず 1 位の変換を表す $GL(2, \mathbb{Z})$ の行列

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = \pm 1, \quad (2.29)$$

から, 次の三次元可約表現 $\bar{L} = U^{-1}(1 \oplus L)U$ を作る:

$$\bar{L} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1-c+2d & 1-c-d & 1+2c-d \\ 1+a-2b+c-2d & 1+a+b+c+d & 1-2a+b-2c+d \\ 1-a+2b & 1-a-b & 1+2a-b \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

但し $U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. この表現は群の積を保ち半周期 $(\omega_3, \omega_1)^T$ に対する 1 位の変換を次のように $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ のそれに書き換える:

$$\begin{pmatrix} \omega'_3 \\ \omega'_1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = \bar{L} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

但し $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ を満たすよう ω_2 を定義したのを思い出すこと. $3\bar{L} \bmod 2$ で得られる六種の行列は置換群 S_3 の置換行列による表現を与える^{*2}. 表 1 を参照. この S_3 はモジュラー群 $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ とその $P = e$ の元からなる主合同部分群 $\Gamma(2)$ の商群である: $S_3 = \Gamma/\Gamma(2)$.

表 1 の置換 P が $\sigma_{1,2,3}$ 関数の相互の変換則を与える. すなわち式 (2.31) の 1 位の変換に対し, 新しい基底での σ_i

^{*2} $\omega_{1,2,3}$ についての対称性が完璧でなくて良いならば, 次の整数成分の表現行列も作れる. $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} 1-c & 1-c-d & 1-d \\ -1+a+c & -1+a+b+c+d & -1+b+d \\ 1-a & 1-a-b & 1-b \end{pmatrix}.$$

この表現では固有値 1 の右固有ベクトルが $(1, -1, 1)^T$ なので $\omega_{1,2,3}$ に関して対称的でないが性質 (2.31) は保つ. 置換は $\bar{L} \bmod 2$ で作る.

表 1: $GL(2, \mathbb{Z})$ と付随する置換群 S_3 の関係. $L \in GL(2, \mathbb{Z})$ は 1 位の変換, \bar{L} は式 (2.30) の三次元表現, P は $3\bar{L} \bmod 2$ に対応する置換. σ_i 関数の相互変換則はこの P で書かれる (式 (2.32)). 破線より右の項目は特に L がモジュラー群の元 $L \in PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/(\pm 1_2)$ かつ半周期比 $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ の虚部が正の場合に意味を持つ. モジュラー変換を記号の流用で $\tau' = L(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ と記す. $m(\tau) = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\wp(\frac{1+\tau}{2}; 1, \tau) - \wp(\frac{\tau}{2}; 1, \tau)}{\wp(\frac{1}{2}; 1, \tau) - \wp(\frac{\tau}{2}; 1, \tau)} = \frac{\theta_2(0, e^{i\pi\tau})^4}{\theta_3(0, e^{i\pi\tau})^4}$ はモジュラーラムダ関数で, $m' = m(\tau')$ を $m = m(\tau)$ で表した式を表に記す. 一番右の項目では, 成分 $0, \pm 1$ のみを持つ $PSL(2, \mathbb{Z})$ の十個の元を全て列挙する. $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は生成元. [笠 16, 8.8 節] も参照.

$L \in GL(2, \mathbb{Z})$			$L \in PSL(2, \mathbb{Z}) \text{ \& } \text{Im } \tau > 0$	
$L \bmod 2$	$3\bar{L} \bmod 2$	P	$m' = m(\tau')$	成分 $0, \pm 1$ からなる $PSL(2, \mathbb{Z})$ の全ての元.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	e	m	$\text{Id}(\tau) = \tau.$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	(13)	$1 - m$	$S(\tau) = -\frac{1}{\tau}.$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	(23)	$\frac{m}{m-1}$	$T(\tau) = \tau + 1, T^{-1}(\tau) = \tau - 1.$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	(12)	$\frac{1}{m}$	$TST(\tau) = \frac{\tau}{1+\tau}, (TST)^{-1}(\tau) = \frac{\tau}{1-\tau}.$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	(123)	$\frac{1}{1-m}$	$ST(\tau) = \frac{-1}{1+\tau}, (TS)^{-1}(\tau) = \frac{1}{1-\tau}.$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	(132)	$1 - \frac{1}{m}$	$TS(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau}, (ST)^{-1}(\tau) = -1 - \frac{1}{\tau}.$

と古い基底のそれは

$$\sigma_i(u; 2\omega'_1, 2\omega'_3) = \sigma_{P(i)}(u; 2\omega_1, 2\omega_3) \quad (2.32)$$

で関係付く. 両辺を σ で割った式も勿論成り立つ:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma}(u; 2\omega'_1, 2\omega'_3) = \frac{\sigma_{P(i)}}{\sigma}(u; 2\omega_1, 2\omega_3). \quad (2.33)$$

但し, 以降は同じ引数を持つ $\sigma, \sigma_{1,2,3}$ 関数たちの積・商の引数を後ろにまとめて一つだけ書く.

次に 2 位の変換を述べる. それは次のように書ける:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma}(u; 2\omega''_1, 2\omega''_3) = \frac{\sigma_{P(i)}\sigma_{P(k)}}{\sigma\sigma_{P(j)}}(u; 2\omega_1, 2\omega_3). \quad (2.34)$$

但し ω''_i を次のように定義する:

$$\begin{pmatrix} \omega''_3 \\ \omega''_1 \end{pmatrix} := X_{ij}^{(1/2)} \begin{pmatrix} \omega'_3 \\ \omega'_1 \end{pmatrix} = X_{ij}^{(1/2)} L \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_1 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

ここで $\det X_{ij}^{(1/2)} = \frac{1}{2}$ なる 2 位の変換を (i, j, k) を $(1, 2, 3)$ の任意の置換として

$$X_{ij}^{(1/2)}: (\omega_i, \omega_j, \omega_k) \rightarrow (\omega_i, \frac{1}{2}\omega_j, -\omega_i - \frac{1}{2}\omega_j) \quad (2.36)$$

と変える 2×2 行列として定義する. 例えば $X_{31}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_{21}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 等. 参照の便のため (2.34) が含む六つの式を全て陽に書く:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma}(u; \omega'_1, 2\omega'_3) = \frac{\sigma_2}{\sigma}(u; \omega'_1, \omega'_1 + 2\omega'_3) = \frac{\sigma_{P(2)}\sigma_{P(3)}}{\sigma\sigma_{P(1)}}(u; 2\omega_1, 2\omega_3), \quad (2.37)$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}(u; 2\omega'_1, \omega'_3 - \omega'_1) = \frac{\sigma_3}{\sigma}(u; \omega'_1 - \omega'_3, 2\omega'_3) = \frac{\sigma_{P(1)}\sigma_{P(3)}}{\sigma\sigma_{P(2)}}(u; 2\omega_1, 2\omega_3), \quad (2.38)$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma}(u; 2\omega'_1 + \omega'_3, \omega'_3) = \frac{\sigma_1}{\sigma}(u; 2\omega'_1, \omega'_3) = \frac{\sigma_{P(1)}\sigma_{P(2)}}{\sigma\sigma_{P(3)}}(u; 2\omega_1, 2\omega_3). \quad (2.39)$$

特に $\omega'_i = \omega_i$ の場合 $\frac{\sigma_3}{\sigma}(u; \omega_1, 2\omega_3)$ 及び $\frac{\sigma_1}{\sigma}(u; 2\omega_1, \omega_3)$ の公式がそれぞれ上昇 Landen (または単に Landen) 変換, 下降 Landen (Gauss) 変換を与える. 高位の変換は [Akh90, Law89] で論じられている.

2-8 証明

2-2 節から 2-7 節で与えた公式の証明を与える.

まず証明に便利な補助的公式をまとめて列挙及び証明する. 但し以下の数式において和を取ってない添字 i, j, k が出現した場合それは $1, 2, 3$ の任意の置換を表す. また $\sum_{(i,j,k)} = \sum_{(i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)}$ と略記する.

$$\frac{\sigma_i(y)}{\sigma(y)} = \sqrt{\wp(y) - e_i} = \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k) - (\wp(\frac{y}{2}) - e_i)^2}{\wp'(\frac{y}{2})}, \quad (2.40)$$

$$\frac{2}{\wp'(\frac{y}{2})} = \sum_{(i,j,k)} \frac{1}{(e_i - e_j)(e_i - e_k)} \frac{\sigma_i(y)}{\sigma(y)}, \quad (2.41)$$

$$\frac{2}{\wp'(\frac{y}{2} - \omega_l)} = \sum_{(i,j,k)} \frac{(-1)^{1-\delta_{il}}}{(e_i - e_j)(e_i - e_k)} \frac{\sigma_i(y)}{\sigma(y)}. \quad (2.42)$$

さらに $a_i = \frac{\sigma_i(y)}{\sigma(y)}$, $i = 1, 2, 3$ と置くと

$$a_i^2 = \wp(y) - e_i, \quad e_i - e_j = a_j^2 - a_i^2, \quad (2.43)$$

$$\wp(y) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}, \quad (2.44)$$

$$\wp'(y) = -2a_1a_2a_3, \quad (2.45)$$

$$\wp'(\frac{y}{2}) = -2(a_1 + a_2)(a_1 + a_2)(a_2 + a_3), \quad (2.46)$$

$$\wp'(\frac{y}{2} - \omega_l) = 2(a_i - a_j)(a_i - a_k)(a_j + a_k), \quad (2.47)$$

$$\wp(\frac{y}{2}) - e_i = (a_i + a_j)(a_i + a_k), \quad (2.48)$$

$$\wp(\frac{y}{2}) = \wp(y) + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1, \quad (2.49)$$

$$\frac{\sigma_i(\frac{y}{2})^4}{\sigma(y)} = \frac{(a_i + a_j)(a_i + a_k)}{2(a_j + a_k)}. \quad (2.50)$$

経験上これら a_i を用いた書き換えを行うと雑多な公式を使い分ける必要がなくなり証明が straightforward な計算に帰着することが多い. この記号で式 (2.7), (2.8) は

$$\begin{aligned} Q_0 &= a_1 + a_2 + a_3, & Q_1 &= a_1 - a_2 - a_3, \\ Q_2 &= -a_1 + a_2 - a_3, & Q_3 &= -a_1 - a_2 + a_3, \end{aligned} \quad (2.51)$$

である.

式 (2.40)-(2.50) の導出.

- 式 (2.40): 左の等式は σ_i の基本性質 [HC64, Kap. 2 §4, §6],

[Akh90, §15 Eq. (3)], [Law89, (6.7.10)-(6.7.12)]. 右の等式は \wp の倍角公式 [HC64, Kap.1 §9], [AS65, 18.4.5] を使って両辺の二乗の差を計算することで示せる. $\pm\sqrt{\wp(y)-e_i}$ のどちらを取るかは $y=0$ の展開から決まる.

- 式 (2.41),(2.42) : [Law89, (6.8.11)-(6.8.13)] より

$$\wp(u+\omega_i) = e_i + \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{\wp(u) - e_i}. \quad (2.52)$$

この式の導関数から

$$\frac{1}{\wp'(u+\omega_i)} = -\frac{1}{(e_i - e_j)(e_i - e_k)} \frac{(\wp(u) - e_i)^2}{\wp'(u)}, \quad (2.53)$$

式 (2.53) を $i = 1, 2, 3$ について和をとることで

$$\frac{1}{\wp'(u)} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\wp'(u+\omega_i)} = 0. \quad (2.54)$$

式 (2.53) 及びこの式で添字を $(i, j, k) \rightarrow (j, k, i)$ と入れ替えた式の和と差をとったものは

$$\frac{1}{\wp'(u+\omega_i)} \pm \frac{1}{\wp'(u+\omega_j)} = \begin{cases} \frac{(\wp(u)-e_k)^2 - (e_k-e_j)(e_k-e_i)}{(e_i-e_j)(e_j-e_k)\wp'(u)} \\ \frac{(\wp(u)-e_j)^2 - (e_j-e_i)(e_j-e_k)}{(e_j-e_i)(e_i-e_k)\wp'(u)} - \frac{(\wp(u)-e_i)^2 - (e_i-e_j)(e_i-e_k)}{(e_i-e_j)(e_j-e_k)\wp'(u)} \end{cases} \quad (2.55)$$

であるから式 (2.54), (2.55) の和・差をとり $u = -\frac{y}{2}$ と置き式 (2.40) を使えば欲する式を得る.

- 式 (2.43)-(2.47) : 式 (2.43)-(2.45) は σ 関数の基本性質 (例えば [HC64, §4]) . 式 (2.46) は式 (2.41) を a_i で書き直した式 $\frac{2}{\wp'(\frac{y}{2})} = \sum_{(i,j,k)} \frac{a_i}{(a_j^2 - a_i^2)(a_k^2 - a_i^2)}$ から従う. 同様に式 (2.42) から式 (2.47) を得る.
- 式 (2.48) : 式 (2.40) に式 (2.43),(2.46) を適用すれば $(\wp(\frac{y}{2}) - e_i)^2$ を $a_{1,2,3}$ で表した式を得るので, 根号を取り $y=0$ の展開が一致する符号を選ぶ.
- 式 (2.49) : 式 (2.48) の $i = 1, 2, 3$ の和を取り式 (2.44) を使う.
- 式 (2.50) : 式 (2.53) を σ 関数の倍角公式 $\wp'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma(u)^4}$ と $\wp(u) - e_i = \frac{\sigma_i(u)^2}{\sigma(u)^2}$ で書き換え, $u = \frac{y}{2}$ を入れると

$$\frac{\sigma_i(\frac{y}{2})^4}{\sigma(y)} = \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{\wp'(\frac{y}{2} - e_i)} \quad (2.56)$$

であるからこれを a_i たちで書き換える. ■

以上で補助的公式の証明を終え, 以降はこれまでに掲げた関係式を証明する.

微分方程式 (2.6) の証明. $Q'(z, y)$ は式 (2.5) より $z = 0, -y$ に 2 位の極を, $z = -\frac{y}{2}, -\frac{y}{2} + \omega_i, i = 1, 2, 3$ に 1 位の零点を持つ 4 位の楕円関数である. ゆえ, $Q'(z, y)^2$ と $\prod_{i=1}^3 (Q(z, y) - Q_i(y))$ は極と零点を共有する 8 位の楕円関数であるから Liouville の定理より定数倍の違いを除き一致する. その定数は $z = 0$ の展開 $Q(z, y) = -z^{-1} + \dots$ より決まる. ■

式 (2.7), (2.8) の導出. まず中辺の $\frac{1}{2} \frac{\wp''}{\wp'}$ の形は式 (2.4) より $Q_i(-\frac{y}{2} + \alpha, y) = Q_i(-\frac{y}{2} + \alpha, -\frac{y}{2} - \alpha)$ なので $\alpha \rightarrow 0, \omega_i$ の極限を取ることで得る. 次に式 (2.40) を $i = 1, 2, 3$ について足し, \wp'' が満たす微分方程式 [Akh90, §6], [HC64, §7] を使うと式 (2.7) 最右辺を得る:

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_i(y)}{\sigma(y)} = \frac{3\wp(\frac{y}{2})^2 + e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1}{\wp'(\frac{y}{2})} = \frac{1}{2} \frac{\wp''(\frac{y}{2})}{\wp'(\frac{y}{2})}. \quad (2.57)$$

([Akh90, §15 Exercise 2] の証明も参照.) 更に σ 関数の擬周期性 [HC64, Kap. 1, §13 Satz 3], [Akh90, §13 Eq. (4)], [Law89, (6.2.10)-(6.2.17)]

$$\sigma(u + 2m_1\omega + 2m_2\omega') = (-1)^{m_1+m_2+m_1m_2} e^{2(m_1\eta+m_2\eta')(u+m_1\omega+m_2\omega')} \sigma(u), \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \quad (2.58)$$

を σ_i たちにも拡張することで $(\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)} = \frac{\sigma_i}{\sigma}(u)$ と略記)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}(u + 2m_1\omega + 2m_2\omega') = (-1)^{m_2} \frac{\sigma_1}{\sigma}(u), \quad (2.59)$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma}(u + 2m_1\omega + 2m_2\omega') = (-1)^{m_1+m_2} \frac{\sigma_2}{\sigma}(u), \quad (2.60)$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma}(u + 2m_1\omega + 2m_2\omega') = (-1)^{m_1} \frac{\sigma_3}{\sigma}(u), \quad (2.61)$$

を得る (これらが dn, cn, sn と同じ周期性を持つのは対応関係 (3.59)-(3.61) と表 2 で引数を iK' でシフトしたものを併せれば分かる) のでこれらより

$$\frac{\sigma_i}{\sigma}(u \pm 2\omega_j) = (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{\sigma_i}{\sigma}(u). \quad (2.62)$$

よって式 (2.57) で $y \rightarrow y - 2\omega_j$ として式 (2.8) を得る. ■

式 (2.9) の導出. 式 (2.7),(2.8) を簡潔に書いた式 (2.51) を用いる. Q^3 の係数が消えることは $\sum_{i=0}^3 Q_i = 0$ から明らか. 根と係数の関係より

$$h_2 = -\sum_{i < j} Q_i Q_j = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2), h_3 = \sum_{i < j < k} Q_i Q_j Q_k = 8a_1 a_2 a_3, \quad (2.63)$$

$$h_4 = -Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 = 2a_1^2 a_2^2 + 2a_2^2 a_3^2 + 2a_3^2 a_1^2 - a_1^4 - a_2^4 - a_3^4. \quad (2.64)$$

これを式 (2.43)-(2.45) で書き換える. ■

式 (2.11)-(2.16) の証明.

- 式 (2.11) : 定義 (2.1) と対称性 (2.4) に帰着.
- 式 (2.12) : β が極でなければ $Q(z, y) - Q(\beta, y)$ は $z = 0, -y$ に 1 位の極を, $z = \beta, -\beta - y$ に 1 位の零点を持つ 2 位の楕円関数である. よって σ 関数による表示の一般論 [Akh90, §14], [HC64, §14] より $Q(z, y) - Q(\beta, y) = c(y) \frac{\sigma(z-\beta)\sigma(z+\beta+y)}{\sigma(z)\sigma(z+y)}$ である. 両辺 z 倍し $z \rightarrow 0$ の極限を取れば $c(y)$ が決まる.
- 式 (2.13),(2.14) : 式 (2.12) で $\alpha = -\frac{y}{2}, -\frac{y}{2} + \omega_i, i = 1, 2, 3$ と置く.
- 式 (2.15) : 式 (2.13) において σ 関数の倍角・加法公式 [HC64, Kap. 1 §14] $\sigma(2u) = -\wp'(u)\sigma(u)^4$, $\wp(u) - \wp(v) = \frac{\sigma(u+v)\sigma(v-u)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}$ で $u = \frac{y}{2}, v = z + \frac{y}{2}$ とした式を使う. (式 (2.14) から出発しても $\sigma(u+v)\sigma(u-v) = \sigma(u)^2\sigma_i(v)^2 - \sigma(v)^2\sigma_i(u)^2$ [Law89, Eq. (6.4.1)] 及び $Q_0 = Q_i - \frac{\wp'(\frac{y}{2})}{\wp(\frac{y}{2}) - e_i}$ を用いれば同じ式にたどり着く. 後者の式は, 式 (2.52) の二階導関数から得る式 $\frac{\wp''(u+\omega_i)}{\wp'(u+\omega_i)} = \frac{\wp''(y)}{\wp'(y)} - 2 \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - e_i}$ または式 (2.46),(2.48),(2.51) より示せる.)
- 式 (2.16) : 式 (2.12) で $\alpha = \omega_i$ と置く. そして $Q(\omega_i, y) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(y)}{\wp(y) - e_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{-2\sigma_i(y)\sigma_j(y)\sigma_k(y)}{\sigma(y)^3} \right) / \left(\frac{\sigma_i(y)^2}{\sigma(y)^2} \right) = -\frac{\sigma_j(y)\sigma_k(y)}{\sigma(y)\sigma_i(y)}$ である.
- 式 (2.16) の別証 : 式 (2.14) から直接計算でも示せる. まず i, j, k を $1, 2, 3$ の任意の置換として [Law89, Eq. (6.4.2)] から

$$\sigma_i(u+v)\sigma_i(u-v)(e_j - e_k) + \sigma_j(u)^2\sigma_j(v)^2(e_k - e_i) + \sigma_k(u)^2\sigma_k(v)^2(e_i - e_j) = 0. \quad (2.65)$$

続いて式 (2.14) の右辺において $i = j$ とおいた式を $\sigma_j(\frac{y}{2})^4(e_k - e_i)$ 倍したものと $i = k$ とおいた式を $\sigma_k(\frac{y}{2})^4(e_i - e_j)$ 倍したものの和を取り式 (2.65) を利用すると

$$Q(z, y) = A(y) + B(y) \frac{\sigma_i(z)\sigma_i(z+y)}{\sigma(z)\sigma(z+y)}, \quad (2.66)$$

$$A(y) = \frac{-\frac{1}{2} \frac{\wp''(\frac{y}{2}-\omega_j)}{\wp'(\frac{y}{2}-\omega_j)} \sigma_j(\frac{y}{2})^4(e_k - e_i) - \frac{1}{2} \frac{\wp''(\frac{y}{2}-\omega_k)}{\wp'(\frac{y}{2}-\omega_k)} \sigma_k(\frac{y}{2})^4(e_i - e_j)}{\sigma_j(\frac{y}{2})^4(e_k - e_i) + \sigma_k(\frac{y}{2})^4(e_i - e_j)}, \quad (2.67)$$

$$B(y) = \frac{\sigma(y)(e_j - e_k)}{\sigma_j(\frac{y}{2})^4(e_k - e_i) + \sigma_k(\frac{y}{2})^4(e_i - e_j)}. \quad (2.68)$$

式 (2.8),(2.42),(2.50) を用いて $A(y) = -\frac{\sigma_j(y)\sigma_k(y)}{\sigma(y)\sigma_i(y)}, B(y) = -\frac{\sigma(y)}{\sigma_i(y)}$ を得る. ■

式 (2.19) の導出. $(Q^n Q')' = Q^n Q'' + nQ^{n-1} Q'^2$ であり, また式 (2.6) より

$$Q'' = 2Q^3 - h_2 Q - \frac{1}{2} h_3 \quad (2.69)$$

なので Q^n (式 (2.69)) + nQ^{n-1} (式 (2.6)) から求める式を得る. ■

式 (2.24) の証明. 根 X_0 として $X_0 = Q_0 = a_1 + a_2 + a_3$ を取る. また $X = Q(z, y)$ の表示としては式 (2.15) を用いる. 導関数は式 (2.5) より $Y = Q'(z, y) = \wp(z) - \wp(z+y)$ である. すると式 (2.23) の p, \tilde{X}_0 は式 (2.63) と式 (2.46), (2.49) を利用して $p = 8(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_1) = -4\wp'(\frac{y}{2})$, $\tilde{X}_0 = \wp(\frac{y}{2}) - \wp(y)$ である. 以上より式 (2.22) の \tilde{X} は $\tilde{X} = \tilde{X}_0 + \frac{p}{4(\tilde{X} - \tilde{X}_0)} = \wp(z + \frac{y}{2}) - \wp(y)$ と整理される. 同様に $\tilde{Y} = -\frac{pY}{4(\tilde{X} - \tilde{X}_0)^2} = \frac{1}{\wp'(\frac{y}{2})}(\wp(z) - \wp(z + \frac{y}{2}))^2(\wp(z) - \wp(z+y))$ であるが³, $\wp(z) - \wp(z+y) = \wp([z + \frac{y}{2}] - \frac{y}{2}) - \wp([z + \frac{y}{2}] + \frac{y}{2})$ と書いて加法定理で展開し整理すると $Y = \wp'(z + \frac{y}{2})$ を得る. ■

式 (2.27), (2.28) の証明. 式 (2.27): 既に書いた式 (2.16) の証明において z, y の役割を入れ替える. 式 (2.28): 式 (2.5) で $y = \omega_i$ と置き式 (2.52) で書き換える. ■

式 (2.32)-(2.34) の証明. 式 (2.32): まずこの式の二乗を証明する方が \wp 関数の性質を利用できるため易しい. 例えば $i = 3$ の場合を考える. \wp 関数の 1 位の変換に対する不変性から

$$\begin{aligned} & \wp(u; 2\omega'_1, 2\omega'_3) - \wp(\omega'_3; 2\omega'_1, 2\omega'_3) \\ &= \wp(u; 2\omega_1, 2\omega_3) - \wp(a\omega_3 + b\omega_1; 2\omega_1, 2\omega_3). \end{aligned} \quad (2.70)$$

ここで可能な a, b の値について表 1 にある六つの場合を全て調べれば $a\omega_3 + b\omega_1 \equiv \omega_{P(3)} \pmod{2\omega_1, 2\omega_3}$ が確かめられる. $i = 1, 2$ の場合も同じである. よって

$$\begin{aligned} & \wp(u; 2\omega'_1, 2\omega'_3) - \wp(\omega'_i; 2\omega'_1, 2\omega'_3) \\ &= \wp(u; 2\omega_1, 2\omega_3) - \wp(\omega_{P(i)}; 2\omega_1, 2\omega_3). \end{aligned} \quad (2.71)$$

両辺の平方根をとり, $u = 0$ での展開が合うように符号を決めれば式 (2.33) を得る. σ 関数は 1 位の変換に対し不変なので, 分母を払えば式 (2.32) も得る.

式 (2.34): 上と同様, まず証明すべき式の二乗を示す. \wp 関数の 1 位の変換に対する不変性から

$$\begin{aligned} & \wp(u; 2\omega'_1, 2\omega'_3) - \wp(\omega'_i; 2\omega'_1, 2\omega'_3) \\ &= \wp(u; 2\omega'_j, 2\omega'_i) - \wp(\omega'_i; 2\omega'_j, 2\omega'_i) \\ &= \wp(u; \omega'_j, 2\omega'_i) - \wp(\omega'_i; \omega'_j, 2\omega'_i) = \frac{\sigma_3}{\sigma}(u; \omega'_j, 2\omega'_i)^2. \end{aligned} \quad (2.72)$$

この関数は周期 $(\omega'_j, 2\omega'_i)$ の 2 位の楕円関数と見ると 2 位の極が $u = 0$ に, 2 位の零点が $u = \omega'_i$ にある. 一方, 周期 $(2\omega'_j, 2\omega'_i)$ の 4 位の楕円関数とみなすと 2 位の極を $u = 0, \omega'_j$ に, 2 位の零点を $u = \omega'_i, \omega'_k$ に持つ. よって Liouville の定理より

$$\begin{aligned} & \text{式 (2.72)} \propto (\wp(u; 2\omega'_j, 2\omega'_i) - \wp(\omega'_i; 2\omega'_j, 2\omega'_i)) \\ & \times (\wp(u + \omega'_j; 2\omega'_j, 2\omega'_i) - \wp(\omega'_i; 2\omega'_j, 2\omega'_i)). \end{aligned} \quad (2.73)$$

ところで式 (2.52) から $\frac{\wp(u+\omega_1)-e_3}{e_1-e_3} = \frac{\wp(u)-e_2}{\wp(u)-e_1}$ が示せるので, これを用いて式 (2.73) 右辺の後ろの項を書き直すと式 (2.73) $\propto \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma \sigma_1}(u; 2\omega'_j, 2\omega'_i)^2$ を得る. 平方根を取り $u = 0$ における展開係数を合わせれば

$$\frac{\sigma_3}{\sigma}(u; \omega'_j, 2\omega'_i) = \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma \sigma_1}(u; 2\omega'_j, 2\omega'_i). \quad (2.74)$$

あとは (i, j, k) として $(1, 2, 3)$ の置換を六通り全て考え, 1 位の変換公式 (2.32), (2.33) を使えば証明が終わる. ■

3 Jacobi の関数による媒介変数表示

本節では, Jacobi の理論に登場する関数で同じ問題を解く. 前節とはやり方を変え証明は各節ごとに与える. 証明には楕円積分の逆としての Jacobi の楕円関数の定義から出る微積分公式や加法公式を主に用い, Liouville の定理 (極と零点を与えると楕円関数は定数倍の違いを除き一意) は禁じ手とする. 一方, Weierstrass の関数を Jacobi のそれに翻訳し 2 節の結果をそのまま転写する証明は全て 3-8 節にまとめる.

3-1 記号

Jacobi 楕円関数, 楕円積分, Jacobi ゼータ関数の記号は [AS65] に従う. 他書もほぼ同じ記号である. 次の補助的記号も用いる.

$$\text{scd}(z) := \text{sn}(z) \text{cn}(z) \text{dn}(z), \quad (3.1)$$

$$\text{cdn}(z) := \text{cs}(z) \text{ds}(z) \text{ns}(z) = -m \text{scd}(z \pm iK'). \quad (3.2)$$

テータ関数は実方向の周期が 2 となる $\vartheta_i(z+2, q) = \vartheta_i(z, q)$ という引数の取り方 [Akh90, HC64] を採用する. 一方 [WW27, AS65, Law89] 及び Mathematica は $\vartheta_i(z+2\pi, q) = \vartheta_i(z, q)$ なる定義であるから n 階の導関数に π^n 倍の違いが出ることに注意. $\vartheta_1(z), \vartheta_2(z), \vartheta_3(z), \vartheta_4(z) = \vartheta_0(z)$ の定義は各文献に倣う. 加えて, Jacobi のオリジナルの記号と衝突するが $\Theta_i(z|m) := \vartheta_i(\frac{z}{2K(m)}, q)$, $q = e^{-K'/K}$ なる関数も用いる. 初期の Jacobi の記法 [AS65, 16.31], [WW27, §21.62], 及び [Akh90, §25] の記号と本稿の関係は

$$\begin{aligned} (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4)_{\text{本稿}} &= (H, H_1, \Theta_1, \Theta)_{\text{Jacobi}} \\ &= (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_0)_{\text{Akhiezer}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3-2 微分方程式

次の微分方程式を議論の出発点とする:^{*3}

$$\dot{\lambda}(z)^2 = \prod_{i=0}^3 (\lambda(z) - \lambda_i) = \lambda^4 - \beta_1 \lambda^3 - \beta_2 \lambda^2 - \beta_3 \lambda - \beta_4. \quad (3.4)$$

但しドットは z -微分であり, 四つの複素数 $\lambda_{0,1,2,3}$ に重複は無い. その一般解は

$$\lambda(z) = \lambda_0 - \frac{\lambda_0 - \lambda_3}{1 - \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_0 - \lambda_2} \text{sn}^2(\kappa z|m)}, \quad (3.5)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}}{2}, \quad m = \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \quad (3.6)$$

である.

微分方程式 (3.4) の解が (3.5), (3.6) であること. $\text{sn}' = \text{cn} \text{dn}$ より sn^2 が満たす微分方程式 $(\text{sn}^2)'^2 = 4 \text{sn}^2 = 4 \text{sn}^2(1 - \text{sn}^2)(1 - m \text{sn}^2)$ を得る. これを用い sn^2 の線形分数関数 (3.5), (3.6) が満たす微分方程式を作れば式 (3.4) になる. ■

3-3 二十四の解と m の六つ組

微分方程式 (3.4) は四つの根 $\lambda_{0,1,2,3}$ に関して対称のため, 解 (3.5), (3.6) において λ_i たちを $4! = 24$ 通りの方法で入れ替えたものも全て解である. ところが微分方程式 (3.4) は一階の自励系なので, 変数 z を並進する自由度を除き解は一

^{*3}記号 λ を用いているがモジュラーラムダ関数ではない (本稿ではこれを $m(\tau)$ と書いている).

表2: 上の表: 引数シフトの公式, $k = \sqrt{m}$, $k' = \sqrt{1-m}$ として $-2 \leq l, n \leq 2$ の範囲を記す. 点線は周期平行四辺形の選び方の一例. 中心に置いた sn, cn, dn 以外の Jacobi 楕円関数の引数シフト表もここからすぐ作れる. 例えば sn の表全体を k 倍し ns を中心にシフトすれば ns の表を得る. 類似の情報は [AS65, 16.8] 等. 下の三式: m の六つ組の変換公式, [AS65] に名前付きで記載があるものは式番号と共に併記. ([16.10] は m の符号を負から正に変える変換とされているが式自体は複素の m にも有効.) この表に掲げた変換公式のうち独立な等式は $\text{ns}(u) = \sqrt{m} \text{sn}(u + iK') = -\text{dc}(u + K)$ 及び $\text{ns}(u|m) = \text{ics}(iu|1-m) = \sqrt{1-m} \text{ds}(\sqrt{1-m}u|\frac{m}{m-1})$ だけで, 他はこの四式から導かれる. m の変換公式で独立なものが二つなのは $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ の生成元が二つ $\tau \mapsto -\tau^{-1}$, $\tau \mapsto \tau + 1$ であるため [Akh90, §36, §37].

$\text{sn}(u + lK + niK')$	$\text{cn}(u + lK + niK')$	$\text{dn}(u + lK + niK')$
$-\text{sn}$ $-\text{cd}$ sn cd $-\text{sn}$ $-\frac{1}{k}\text{ns}$ $-\frac{1}{k}\text{dc}$ $\frac{1}{k}\text{ns}$ $\frac{1}{k}\text{dc}$ $-\frac{1}{k}\text{ns}$ $-\text{sn}$ $-\text{cd}$ sn cd $-\text{sn}$ $-\frac{1}{k}\text{ns}$ $-\frac{1}{k}\text{dc}$ $\frac{1}{k}\text{ns}$ $\frac{1}{k}\text{dc}$ $-\frac{1}{k}\text{ns}$ $-\text{sn}$ $-\text{cd}$ sn cd $-\text{sn}$	cn $-k'\text{sd}$ $-\text{cn}$ $k'\text{sd}$ cn $\frac{i}{k}\text{ds}$ $\frac{ik'}{k}\text{ne}$ $-\frac{i}{k}\text{ds}$ $-\frac{ik'}{k}\text{nc}$ $\frac{i}{k}\text{ds}$ $-\text{cn}$ $k'\text{sd}$ cn $-k'\text{sd}$ $-\text{cn}$ $-\frac{i}{k}\text{ds}$ $-\frac{ik'}{k}\text{nc}$ $\frac{i}{k}\text{ds}$ $\frac{ik'}{k}\text{ne}$ $-\frac{i}{k}\text{ds}$ cn $-k'\text{sd}$ $-\text{cn}$ $k'\text{sd}$ cn	$-\text{dn}$ $-k'\text{nd}$ $-\text{dn}$ $-k'\text{nd}$ $-\text{dn}$ $-i\text{cs}$ $ik'\text{sc}$ $-i\text{cs}$ $ik'\text{sc}$ $-i\text{cs}$ dn $k'\text{nd}$ dn $k'\text{nd}$ dn $i\text{cs}$ $-ik'\text{sc}$ $i\text{cs}$ $-ik'\text{sc}$ $i\text{cs}$ $-\text{dn}$ $-k'\text{nd}$ $-\text{dn}$ $-k'\text{nd}$ $-\text{dn}$

* ここの周期平行四辺形の選択は文献でよく見る慣習とは違うので、その意図を説明する。この表は半周期比 $\tau = \frac{K'}{K}$ が純虚数の場合と視覚的によく合う書き方になっているが、今 $\tau = e^{2\pi i/3}$ ($m = e^{-\pi i/3}$) の場合を考え、表を $\text{田} \rightarrow \text{罍}$ と斜めに歪め三角格子にする。すると、この点線の周期平行四辺形は sn, cn, dn の三者の対称性が最良になる選び方になっている。この時三つの平行四辺形は全て縦横比 $1:\sqrt{3}$ の長方形になる。長方形になるということは Landen 変換で半周期比が純虚数の楕円関数に帰着されることを意味する。実際 $\tau' = 2\tau + 1 = \sqrt{3}i$, $m' = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{12}$ がそれである。表 3 中段の変換がこれに対応する ($m = \sin^2 \frac{\pi}{12}$ とすれば $\bar{m} = e^{\pm \pi i/3}$ を得る)。この Landen 変換は [IBF71, 240, 242, 244, 246] において $\sqrt{\pm 1} \pm 1$ を含む積分を“実引数の”楕円積分で表すのに暗黙に使われている。

Jacobi の 虚変換 [16.20]	負パラメータ の変換 [16.10]	Jacobi の 実変換 [16.11]
----------------------------	--------------------------	----------------------------

$$\text{ns}(u|m) = i \text{cs}(iu|1-m) = \sqrt{1-m} \text{ds}(\sqrt{1-m}u|\frac{m}{m-1}) = \sqrt{m} \text{ns}(\sqrt{m}u|\frac{1}{m}) = i\sqrt{m} \text{cs}(i\sqrt{m}u|1-\frac{1}{m}) = i\sqrt{1-m} \text{ds}(i\sqrt{1-m}u|\frac{1}{1-m}) \quad (3.7)$$

$$\text{cs}(u|m) = i \text{ns}(iu|1-m) = \sqrt{1-m} \text{cs}(\sqrt{1-m}u|\frac{m}{m-1}) = \sqrt{m} \text{ds}(\sqrt{mu}|\frac{1}{m}) = i\sqrt{m} \text{ds}(i\sqrt{mu}|1-\frac{1}{m}) = i\sqrt{1-m} \text{ns}(i\sqrt{1-m}u|\frac{1}{1-m}) \quad (3.8)$$

$$\mathrm{ds}(u|m) = i \mathrm{ds}(iu|1-m) = \sqrt{1-m} \mathrm{ns}(\sqrt{1-m}u|\frac{m}{m-1}) = \sqrt{m} \mathrm{cs}(\sqrt{mu}|\frac{1}{m}) = i\sqrt{m} \mathrm{ns}(i\sqrt{mu}|1-\frac{1}{m}) = i\sqrt{1-m} \mathrm{cs}(i\sqrt{1-m}u|\frac{1}{1-m}) \quad (3.9)$$

つしか無い. よってこの 24 個の解を互いに関係付ける変換公式がある.

まず、可能な m の値は六通り存在し、ある一つを m とするとそれは $\{m, 1-m, \frac{m}{m-1}, \frac{1}{1-m}, \frac{1}{m}, 1-\frac{1}{m}\}$ と書かれる。六種類手っ取り早く得るには λ_0 を固定し $\lambda_{1,2,3}$ を入れ替えれば良い。この六つ組の入れ替えの公式が表 2 下部に掲げた式 (3.7)-(3.9) である。この六つ組は表 1 に与えたものと一致していることにも注意。この変換により m の値はいつでも $\text{Re } m = \frac{1}{2}$, $|m-1| = 1$ で挟まれる弓形領域 (の狭い方) に帰着させられる^{*4}。(そのように選んでおくのが常に便利とは限らない。)

次に, 同じ m の値を与える四組は, ある一つを $(0123) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ と略記すると, 残りは $(3210), (1032), (2301)$ である. これら四組に対応する解は, どれか一つ解を用意し sn^2 の引数を $0, K, iK', K + iK'$ だけシフトすると互いに入れ替わる. 表 2 の上部にこの引数シフトに必要な公式をまとめた. この四組を入れ替える置換は Klein の四元群 (S_4 の正規部分群) をなし, 四次の対称群 S_4 をこれで割ったものが m の六つ組を入れ替える三次の対称群 S_3 になっている^{*5}. 両者の積で $6 \times 4 = 24$ 通りの解が尽くされ

る. 表 2 から 12 個の Jacobi の楕円関数は適当な変換で互に行き来可能であり本質的には一種類しか無いことが分かる.

式 (3.7)-(3.9) の略証. 公式集から引用している結果なので改めて証明しなくても良いのだが、3-7節で Landen 変換を類似の方法で証明するので、その準備として m の六つ組の相互変換 (3.7)-(3.9) はここに証明を書く。なお、引数シフトの公式は加法定理を認め二つの変数のうち一つに K, iK' を代入することで導ける (例えば [戸 01, 10 章] 等)。

cs, ds, ns 関数の導関数は $cs' = -ds \, ns$, $ds' = -cs \, ns$, $ns' = -cs \, ds$, であり, また $ns^2 = 1 + cs^2 = m + ds^2$ であるから, これより三者の満たす微分方程式はすぐ作れて

$$\lambda = \kappa \text{cs}(\kappa z|\tilde{m}) : \quad \dot{\lambda}^2 = (\lambda^2 + \kappa^2)(\lambda^2 + \kappa^2(1 - \tilde{m})), \quad (3.10)$$

$$\lambda = \kappa \, \mathrm{d}s(\kappa_Z|\tilde{m}) : \quad \dot{\lambda}^2 = (\lambda^2 + \kappa^2 \tilde{m})(\lambda^2 + \kappa^2(\tilde{m} - 1)), \quad (3.11)$$

$$\lambda = \kappa \text{ns}(\kappa \zeta | \tilde{m}) : \quad \dot{\lambda}^2 = (\lambda^2 - \kappa^2)(\lambda^2 - \kappa^2 \tilde{m}). \quad (3.12)$$

例えば κ, \tilde{m} を適切に選び $\kappa \text{cs}(\kappa z | \tilde{m}) = \text{ns}(z | m)$ とすることを考えると、ありうる可能性は上の微分方程式の右辺を比較して $(\kappa^2, \kappa^2(1 - \tilde{m})) = (-1, -m)$ or $(-m, -1)$ である。これより $(\kappa, \tilde{m}) = (i, 1 - m)$, $(i\sqrt{m}, 1 - \frac{1}{m})$ を得る。同一の一階の自励的な微分方程式の解、かつ発散点が同じ ($z = 0$) でしかもその点で Laurent 展開の主要項が一致するので両者は一致する。こうして式 (3.7) のうち ns を cs に変換する二式が導かれた。他の式も同様に示せる。 ■

*4 これは六つの m の間の初等変換のみでも示せるが、モジュラーラムダ関数 $m(\tau) = \frac{\theta_2(0, \text{e}^{i\pi\tau})^4}{\theta_3(0, \text{e}^{i\pi\tau})^4}$ とその逆関数 $\tau(m) = \frac{i\kappa(1-m)}{K(m)}$ による $\Gamma(2)$ の基本領域と $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ との間の等角写像において、特に $j(\tau)$ の基本領域が写される領域とも解釈される [河 86, §10, p.126]. ([笠 16, 7.3 節, 8.8 節] も参照.)

*5 これは正八面体を用いた幾何学的解釈が可能 [浅 65, 2章 §4].

3-4 三次分解多項式

三次分解多項式を右辺に持つ微分方程式には以下のように帰着される.

$$\rho(z) = \frac{\prod_{i=1}^3 (\lambda_0 - \lambda_i)}{\lambda(z) - \lambda_0} + \frac{1}{16} \sum_{(i,j,k)} ((\lambda_0 - \lambda_i)^2 - (\lambda_j - \lambda_k)^2) \\ = \kappa^2 m \operatorname{sn}^2(\kappa z|m) + \rho_3, \quad (3.13)$$

$$\rho_i = \frac{-1}{16} (\lambda_0 + \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k)^2, \quad (3.14)$$

と定義すれば $\rho(z)$ は次の微分方程式を満足する:

$$\frac{\dot{\rho}(z)^2}{4} = \prod_{i=1}^3 (\rho(z) - \rho_i). \quad (3.15)$$

但し $\sum_{(i,j,k)} = \sum_{(i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)}$ の略記で, $\rho_{1,2,3}$ の定義式 (3.14) において (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の置換である. 式 (3.6) の κ, m は ρ_i を用いて $\kappa = \sqrt{\rho_1 - \rho_3}$, $m = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_1}$ と表される. 式 (3.15) 右辺の展開で現れる ρ_i の対称多項式は全て β_i で書ける. 特に $\beta_1 = 0$ であれば式 (2.21) で $\tilde{X} \rightarrow \rho$, $h_i \rightarrow \beta_i$ と置き換えたものに等しい.

この $\rho(z)$ の定義では四つの根のうち λ_0 だけ特別扱いなので, 3-3節で論じた根の置換操作のうち λ_0 を固定する六つのみが適用でき, 六種の m が同様に生じる.

3-5 等価な書き換え

微分方程式 (3.4) はスケール変換と定数シフト $\lambda(z) = \frac{1}{\kappa} \tilde{\lambda}(\frac{z}{\kappa}) + \alpha$, $\lambda_i = \frac{1}{\kappa} \tilde{\lambda}_i + \alpha$ によって形を変えない. ゆえ, 以降はこの自由度を用いて

$$\sum_{i=0}^3 \lambda_i = 0, \quad \kappa = 1, \quad (3.16)$$

と規格化したケースのみを考察する. そして

$$\lambda_0 = \lambda(iK') = c + d + n, \quad (3.17)$$

$$\lambda_1 = \lambda(iK' + K) = c - d - n, \quad (3.18)$$

$$\lambda_2 = \lambda(K) = -c + d - n, \quad (3.19)$$

$$\lambda_3 = \lambda(0) = -c - d + n, \quad (3.20)$$

で c, d, n を導入すると式 (3.6) は $1 = n^2 - c^2$, $m = \frac{d^2 - n^2}{c^2 - n^2}$ に帰着し

$$c = \operatorname{cs}(2z_0|m), \quad d = \operatorname{ds}(2z_0|m), \quad n = \operatorname{ns}(2z_0|m), \quad (3.21)$$

とパラメトライズできる. m, z_0 は一般には複素数である. もし両者共に実かつ $0 < m < 1$, $0 < z_0 < K$ なる範囲にあれば λ_i たちも全て実で $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_0$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_0$ という大小関係が成り立つ. 以後引数 m はしばしば省略する. この規格化とパラメトリゼーションにおいて式 (3.4) 中の展開係数 β_i たちは

$$\beta_1 = 0, \quad (3.22)$$

$$\beta_2 = 2(3 \operatorname{ns}^2(2z_0) - 1 - m), \quad (3.23)$$

$$\beta_3 = 8 \operatorname{cdn}(2z_0), \quad (3.24)$$

$$\beta_4 = 3 \operatorname{ns}^4(2z_0) - 2(1 + m) \operatorname{ns}^2(2z_0) - (1 - m)^2, \quad (3.25)$$

と表される.

以上の準備のもとで本題に入る. 式 (3.17)-(3.25) でパラメトライズされた λ_i, β_i を持つ微分方程式 (3.4) の解

$\lambda(z) = \lambda(z, z_0)$ は以下の同値な書き換えを持つ:

$$\lambda(z, z_0) = \lambda(-z, z_0) = -\lambda(z, -z_0) \quad (3.26)$$

$$= \lambda_0 - \frac{\lambda_0 - \lambda_3}{1 - \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_0 - \lambda_2} \operatorname{sn}^2 z} \quad (3.27)$$

$$= Z(z + z_0) - Z(z - z_0) - Z(2z_0) - \frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}(2z_0) \quad (3.28)$$

$$= -m \operatorname{sn}(2z_0) \operatorname{sn}(z + z_0) \operatorname{sn}(z - z_0) - \frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}(2z_0) \quad (3.29)$$

$$= m \operatorname{sd}(2z_0) \operatorname{cn}(z + z_0) \operatorname{cn}(z - z_0) - \frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn} \operatorname{dn}}(2z_0) \quad (3.30)$$

$$= \operatorname{sc}(2z_0) \operatorname{dn}(z + z_0) \operatorname{dn}(z - z_0) - \frac{\operatorname{dn}}{\operatorname{sn} \operatorname{cn}}(2z_0) \quad (3.31)$$

$$= \frac{\operatorname{scd}(z - z_0) + \operatorname{scd}(z + z_0)}{\operatorname{sn}^2(z - z_0) - \operatorname{sn}^2(z + z_0)} \quad (3.32)$$

$$= \frac{\operatorname{scd}(z - z_0) + \operatorname{scd}(iK' - 2z_0)}{\operatorname{sn}^2(z - z_0) - \operatorname{sn}^2(iK' - 2z_0)} \quad (3.33)$$

$$= \frac{\operatorname{scd}(iK' + 2z_0) + \operatorname{scd}(z + z_0)}{\operatorname{sn}^2(iK' + 2z_0) - \operatorname{sn}^2(z + z_0)}. \quad (3.34)$$

但し $\frac{\operatorname{cn}(z) \operatorname{dn}(z)}{\operatorname{sn}(z)} = \frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}(z)$ 等と略記している. 導関数, 二乗, 及びその導関数は

$$\dot{\lambda}(z) = \operatorname{dn}^2(z + z_0) - \operatorname{dn}^2(z - z_0), \quad (3.35)$$

$$\lambda(z)^2 = -\operatorname{dn}^2(z + z_0) - \operatorname{dn}^2(z - z_0) + \operatorname{ds}^2(2z_0) + 1, \quad (3.36)$$

$$(\lambda(z)^2) = 2m (\operatorname{scd}(z + z_0) + \operatorname{scd}(z - z_0)). \quad (3.37)$$

また三次分解多項式に関連する量は

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (-\operatorname{cs}^2(2z_0), -\operatorname{ds}^2(2z_0), -\operatorname{ns}^2(2z_0)), \quad (3.38)$$

$$\rho(z) = m \operatorname{sn}^2 z - \operatorname{ns}^2(2z_0). \quad (3.39)$$

コメント. λ_i や ρ_i のパラメトライズに用いる c, d, n を $\operatorname{cs}, \operatorname{ds}, \operatorname{ns}$ 関数ではなくより身近な $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ 関数で書きたければ $z_0 \rightarrow z_0 \pm \frac{iK'}{2}$ とシフトする (表 2 参照). その際 z の定義も適当にシフトし λ を使いやすい形にしておくが良い. 他には筆者が昔 [arXiv:1304.7567] で採用した表示があり, 本節の式をこの論文の表示に還元するには $m = 1 - \tilde{m}$, $z = \tilde{z} + \frac{K(1-\tilde{m})}{2} - iK(\tilde{m})$, $z_0 = \tilde{z}_0 + \frac{K(1-\tilde{m})}{2}$ と置き換えした後 Jacobi の虚変換を行う. ■

式 (3.28)-式 (3.39) の証明.

- 式 (3.35): まず半角公式 [AS65, 16.19], [BF71, 124.02] より

$$\frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{\operatorname{dn} + \operatorname{cn}}{\operatorname{sn}}(v) = \frac{(1 - m) \operatorname{sn}}{\operatorname{dn} - \operatorname{cn}}(v), \quad (3.40)$$

$$\frac{\operatorname{sn} \operatorname{dn}}{\operatorname{cn}}\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{cn}}{\operatorname{sn}}(v) = \frac{\operatorname{sn}}{1 + \operatorname{cn}}(v), \quad (3.41)$$

$$\frac{\operatorname{sn} \operatorname{cn}}{\operatorname{dn}}\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{dn}}{m \operatorname{sn}}(v) = \frac{\operatorname{sn}}{1 + \operatorname{dn}}(v). \quad (3.42)$$

が証明できるので, $\lambda_0 - \lambda_2 = \frac{2 \operatorname{cn}}{\operatorname{sn} \operatorname{dn}}(z_0)$, $\lambda_0 - \lambda_3 = 2 \frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}(z_0)$, $\lambda_3 - \lambda_2 = 2m \frac{\operatorname{sn} \operatorname{cn}}{\operatorname{dn}}(z_0)$ である. ゆえ式 (3.27) の導関数は

$$\dot{\lambda} = \frac{-2(\lambda_0 - \lambda_3) \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_0 - \lambda_2} \operatorname{scd} z}{(1 - \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_0 - \lambda_2} \operatorname{sn}^2 z)^2} = \frac{-4m \operatorname{scd} z_0 \operatorname{scd} z}{(1 - m \operatorname{sn}^2 z_0 \operatorname{sn}^2 z)^2}. \quad (3.43)$$

これを $\operatorname{sn}^2(z + z_0) - \operatorname{sn}^2(z - z_0)$ を加法公式で展開した式と比較し (3.35) を得る.

- 式 (3.28), (3.29): 式 (3.35) を Jacobi ゼータ関数の積分公式 [BF71, 140.01] で z_0 から z まで積分すれば $\lambda(z) = Z(z + z_0) - Z(z - z_0) - Z(2z_0) + \lambda(z_0)$ であるが

$$\lambda(z_0) = -\frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}(2z_0) \quad (3.44)$$

であるから式 (3.28) を得る. 更にこれを加法公式 [戸 01, 付録 III, p. 201], [AS65, 17.4.35], [BF71, 142.02], [Akh90, §17] で書き換えると式 (3.29) を得る.

表3: Landen 変換. 同じ行及び同じ列にある六つの公式はそれぞれ変数 \tilde{m} 及び m について式 (3.7)-(3.9) を用いて六つ組の入替えを行えば導けるため独立な公式は一つだけである. 各文献で上昇 Landen 変換 (または単に Landen 変換) と呼ばれるのは右上の一つ目の式 [AS65, 16.14.2] で, 下降 Landen 変換 (または Gauss 変換) と呼ばれるのは左下の一つ目の式 [AS65, 16.12.2 と 16.12.3 の比] である. それぞれの項目には, Weierstrass の理論における対応物 (引数を適当に規格化すると帰着するシグマ関数) も参考に書いている (チルダで繋いだ式).

	$\kappa \operatorname{cs}(\kappa z \tilde{m}) \sim \frac{\sigma_1}{\sigma}$	$\kappa \operatorname{ds}(\kappa z \tilde{m}) \sim \frac{\sigma_2}{\sigma}$	$\kappa \operatorname{ns}(\kappa z \tilde{m}) \sim \frac{\sigma_3}{\sigma}$
$2z_0 = K, \quad (y = \omega_1)$ $\frac{\operatorname{ds} \operatorname{ns}}{\operatorname{cs}}(z m) = \frac{\operatorname{dn}}{\operatorname{sn} \operatorname{cn}}(z m) \sim \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma \sigma_1}$	<ul style="list-style-type: none"> $\tilde{m} = \frac{4\sqrt{1-m}}{(1+\sqrt{1-m})^2}, \kappa^2 = -(1+\sqrt{1-m})^2.$ $\tilde{m} = -\frac{4\sqrt{1-m}}{(1-\sqrt{1-m})^2}, \kappa^2 = -(1-\sqrt{1-m})^2.$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\tilde{m} = \frac{(1+\sqrt{1-m})^2}{4\sqrt{1-m}}, \kappa^2 = -4\sqrt{1-m}.$ $\tilde{m} = -\frac{(1-\sqrt{1-m})^2}{4\sqrt{1-m}}, \kappa^2 = 4\sqrt{1-m}.$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\tilde{m} = \left(\frac{1-\sqrt{1-m}}{1+\sqrt{1-m}}\right)^2, \kappa^2 = (1+\sqrt{1-m})^2.$ $\tilde{m} = \left(\frac{1+\sqrt{1-m}}{1-\sqrt{1-m}}\right)^2, \kappa^2 = (1-\sqrt{1-m})^2.$
$2z_0 = -K - iK', \quad (y = \omega_2)$ $\frac{\operatorname{cs} \operatorname{ns}}{\operatorname{ds}}(z m) = \frac{\operatorname{cn}}{\operatorname{sn} \operatorname{dn}}(z m) \sim \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma \sigma_2}$	<ul style="list-style-type: none"> $\tilde{m} = 1 - (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^4, \kappa^2 = -(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^2.$ $\tilde{m} = 1 - (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^4, \kappa^2 = -(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^2.$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\tilde{m} = \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^2}{4\sqrt{m}\sqrt{m-1}}, \kappa^2 = -4\sqrt{m}\sqrt{m-1}.$ $\tilde{m} = -\frac{(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^2}{4\sqrt{m}\sqrt{m-1}}, \kappa^2 = 4\sqrt{m}\sqrt{m-1}.$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\tilde{m} = (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^4, \kappa^2 = (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^2.$ $\tilde{m} = (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^4, \kappa^2 = (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^2.$
$2z_0 = iK', \quad (y = \omega_3)$ $\frac{\operatorname{cs} \operatorname{ds}}{\operatorname{ns}}(z m) = \frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}(z m) \sim \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma \sigma_3}$	<ul style="list-style-type: none"> $\tilde{m} = \frac{4\sqrt{m}}{(1+\sqrt{m})^2}, \kappa^2 = (1+\sqrt{m})^2.$ $\tilde{m} = -\frac{4\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})^2}, \kappa^2 = (1-\sqrt{m})^2.$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\tilde{m} = -\frac{(1-\sqrt{m})^2}{4\sqrt{m}}, \kappa^2 = -4\sqrt{m}.$ $\tilde{m} = \frac{(1+\sqrt{m})^2}{4\sqrt{m}}, \kappa^2 = 4\sqrt{m}.$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\tilde{m} = \left(\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}\right)^2, \kappa^2 = -(1+\sqrt{m})^2.$ $\tilde{m} = \left(\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}\right)^2, \kappa^2 = -(1-\sqrt{m})^2.$

- 式 (3.30), (3.31) : $\operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ の加法公式よりすぐ示せる式

$$\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{cn}(u+v)}{\operatorname{dn}(u+v)} = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - \operatorname{dn}(u+v)}{m \operatorname{cn}(u+v)} \quad (3.45)$$

において $u = z_0 + z, v = z_0 - z$ とし式 (3.29) に適用する.

- 式 (3.36), (3.37) : $\frac{\partial}{\partial z} [\text{式 (3.29)}]^2 - \operatorname{cn}^2(2z_0) \frac{\partial}{\partial z} [\text{式 (3.31)}]^2 = (1 - \operatorname{cn}^2(2z_0))(\dot{\lambda}^2) = 2m \operatorname{sn}^2(2z_0) (\operatorname{scd}(z - z_0) + \operatorname{scd}(z + z_0)) + (\text{残り})$ となるが, 残りの項は式 (3.45) で整理すると消え, 式 (3.37) を得る. これを z_0 から z まで積分し式 (3.44) を使うと式 (3.36) を得る.
- 式 (3.32) : $\lambda = \frac{(\dot{\lambda}^2)}{2\dot{\lambda}}$ に式 (3.35), (3.37) を代入.
- 式 (3.33), (3.34) : $\lambda(z, z_0)$ は自明な対称性 (3.26) に加え, 次の対称性も持つ:

$$\lambda(z, z_0) = \lambda\left(\frac{z + iK' \pm 3z_0}{2}, \frac{-z_0 \pm (z - iK')}{2}\right). \quad (3.46)$$

これは式 (3.28) を [BF71, 141.01] で

$$\lambda(z, z_0) = Z(z + z_0) - Z(z - z_0) + Z(\pm iK' - 2z_0) \pm \frac{i\pi}{2K} \quad (3.47)$$

と書き換えると分かる. この対称性によって式 (3.32) の引数を入れ替えると式 (3.33), (3.34) を得る.

- 式 (3.38), (3.39) : 定義式 (3.13), (3.14) に式 (3.17)-(3.20) を代入する. ■

3-6 不定積分

不定積分 $I_n = \int \lambda^n dz$ を与える. I_1, I_2 は

$$I_1 = \log \frac{\Theta_4(z + z_0)}{\Theta_4(z - z_0)} - z \left(Z(2z_0) + \frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}(2z_0) \right), \quad (3.48)$$

$$I_2 = -Z(z + z_0) - Z(z - z_0) + z \left(1 - \frac{2E}{K} + \operatorname{ds}^2(2z_0) \right). \quad (3.49)$$

そして $I_{n \geq 3}$ に対する漸化式は

$$I_{n+3} = \frac{1}{n+2} \left(\lambda^n \dot{\lambda} + (n+1) \beta_2 I_{n+1} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta_3 I_n + n \beta_4 I_{n-1} \right), \quad n \geq 0. \quad (3.50)$$

但し $I_0 = z$ で, $n = 0$ の時は右辺の最後の項は無い.

証明. 式 (3.48) 及び式 (3.49) : Jacobi ゼータ関数の微分及び積分が $Z'(u) = \operatorname{dn}^2 u - \frac{E}{K}$, $\int Z(u) du = \log \Theta_4(u)$ である [BF71, 140.01, 144.01], [AS65, 17.4.37] を用いて式 (3.28) と式 (3.36) を積分する. 式 (3.50) : 微分方程式 (3.4) から, 式 (2.19) の証明と同様の方法で示せる. ■

3-7 Legendre の楕円曲線と Landen 変換

$2z_0 = K, iK', -(K + iK')$ とすると $\beta_3 = 8 \operatorname{cdn}(2z_0) = 0$ なので Legendre の楕円曲線になる. この時の微分方程式 (3.4)

と $\lambda(z, z_0)$ は (式 (3.33), (3.34) を使う)

$$(i) \quad 2z_0 = K, \lambda(z, \frac{K}{2}) = m \frac{\operatorname{sn} \operatorname{cn}}{\operatorname{dn}}(z + \frac{K}{2}):$$

$$\dot{\lambda}^2 = \lambda^4 - 2(2-m)\lambda^2 + m^2. \quad (3.51)$$

$$(ii) \quad 2z_0 = -K - iK', \lambda(z, -\frac{K+iK'}{2}) = \frac{\operatorname{sn} \operatorname{dn}}{\operatorname{cn}}(z - \frac{K+iK'}{2}):$$

$$\dot{\lambda}^2 = \lambda^4 - 2(2m-1)\lambda^2 + 1. \quad (3.52)$$

$$(iii) \quad 2z_0 = iK', \lambda(z, \frac{iK'}{2}) = \frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}(z - \frac{iK'}{2}):$$

$$\dot{\lambda}^2 = \lambda^4 + 2(1+m)\lambda^2 + (1-m)^2. \quad (3.53)$$

一方で, 一般に右边が複二次式の楕円曲線 $\dot{\lambda}^2 = \lambda^4 - \beta_2 \lambda^2 - \beta_4$ は単独の Jacobi 楕円関数でパラメライズされる. 上の式をそれに帰着させるには Landen 変換を行う. それを導くには 3-3 節の証明と同様に式 (3.10)-(3.12) の κ, \tilde{m} をうまく選び, 上記の微分方程式 (3.51)-(3.53) に一致させる. 但し極を $z = 0$ に揃える方が比較が楽なので表 2 を使い引数 z を移動し, それぞれ (i) $\lambda(z - iK' - \frac{K}{2}, \frac{K}{2}) = \frac{\operatorname{ds} \operatorname{ns}}{\operatorname{cs}}(z|m)$, (ii) $\lambda(z + \frac{K-iK'}{2}, -\frac{K+iK'}{2}) = \frac{\operatorname{cs} \operatorname{ns}}{\operatorname{ds}}(z|m)$, (iii) $\lambda(z + \frac{iK'}{2}, iK') = \frac{\operatorname{cs} \operatorname{ds}}{\operatorname{ns}}(z|m)$ を代わりに考える. 結果を表 3 にまとめた *6.

3-8 Weierstrass から Jacobi への翻訳による証明

これまで, この 3 節では Jacobi の関数のみで閉じた証明を行ってきた. 最後に, 2 節の結果の直接翻訳という形で別証を与える. 式 (2.1) の $Q(z, y)$ を用いて $\lambda(z, z_0)$ を

$$\lambda(z, z_0) := \frac{1}{2K} Q\left(\frac{z - z_0 - iK'}{2K}, \frac{2z_0}{2K}\right). \quad (3.54)$$

と定義する. すると $\lambda_i = \frac{1}{2K} Q_i(\frac{2z_0}{2K})$ としてこの $\lambda(z, z_0)$ は微分方程式 (3.4) を満たし, 3-5 節に与えたものと同じになる. 以下, 個々の公式の対応関係を詳細に記述する.

2 節の公式と 3 節の公式の対応関係. まず Weierstrass の関数と Jacobi の関数の間の翻訳を与える. 二重周期を $(2\omega, 2\omega')$ = $(1, \tau)$, $\operatorname{Im} \tau > 0$ と置き $\tau = \frac{iK'(1-m)}{K} = \frac{iK'(1-m)}{K(m)}$, $q = e^{i\pi\tau}$ とすれば

$$e_1 = \frac{4K^2}{3}(2-m), e_2 = \frac{4K^2}{3}(2m-1), e_3 = -\frac{4K^2}{3}(1+m), \quad (3.55)$$

$$\wp(z; 1, \tau) = 4K^2 \left(\operatorname{ns}^2(2Kz|m) - \frac{1+m}{3} \right), \quad (3.56)$$

$$\wp'(z; 1, \tau) = -16K^3 \operatorname{cdn}(2Kz|m), \quad (3.57)$$

$$\zeta(z; 1, \tau) = -4K^2 z \left(\frac{2-m}{3} - \frac{E}{K} \right) + 2K \left(Z(2Kz|m) + \frac{\operatorname{cn} \operatorname{dn}}{\operatorname{sn}}(2Kz|m) \right), \quad (3.58)$$

*6 なお, Landen 変換は KdV 階層と実関数の NLS 階層 (“MKdV 階層”) とも呼んでも良いかもしれない) との間を Miura 変換で行き来する時の式の整理にも用いることをここに付記しておく.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}(z; 1, \tau) = 2K \operatorname{cs}(2Kz|m), \quad (3.59)$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma}(z; 1, \tau) = 2K \operatorname{ds}(2Kz|m), \quad (3.60)$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma}(z; 1, \tau) = 2K \operatorname{ns}(2Kz|m). \quad (3.61)$$

e_i, \wp 関数については [AS65, 18.9.1-18.9.3, 18.9.11] から従う。 ζ 関数については、まず [AS65, 16.34.2-16.34.4]^{*7} の導関数を求め $Z'(0) = 1 - \frac{E}{K}$ を用いると $\frac{\theta_2''}{\theta_2} = -4KE, \frac{\theta_3''}{\theta_3} = 4K^2(1 - \frac{E}{K} - m), \frac{\theta_4''}{\theta_4} = 4K^2(1 - \frac{E}{K})$ なので [WW27, §21.41], [Law89, Chap. 1 Exer.] より

$$\frac{\theta_1'''}{\theta_1'} = \sum_{a=2,3,4} \frac{\theta_a''}{\theta_a} = 4K^2 \left(2 - m - \frac{3E}{K} \right). \quad (3.62)$$

これを [AS65, 18.10.7, 18.10.18] に適用し、[AS65, 16.34.1] を用い $(2\omega, 2\omega') = (1, \tau)$ と置けば (3.58) を得る。 σ_i 関数と Jacobi 楕円関数の関係 (3.59)-(3.61) は [HC64, Kap. 2 §6] より $\frac{\theta_1' \theta_{k+1}(v)}{\theta_{k+1}' \theta_1(v)} = \frac{\sigma_i}{\sigma}(v; 1, \tau)$ であることから従う。

以上の準備のもとで対応関係は以下の通り。

- 式 (3.17)-(3.21) : 式 (2.7), (2.8), $\lambda_i = \frac{1}{2K} Q_i(\frac{2z_0}{2K})$.
- 式 (3.25) : 式 (2.9), $\beta_i = \frac{1}{(2K)^i} h_i$.
- 式 (3.26), (3.46) : 式 (2.4) と周期の引数シフト。
- 式 (3.27) : 式 (2.15).
- 式 (3.28), (3.47) : 式 (2.2).
- 式 (3.29), (3.30), (3.31) : それぞれ式 (2.16) の $i = 3, 2, 1$.
- 式 (3.32), (3.34) : それぞれ式 (2.11) の右辺, 左辺。
- 式 (3.33) : 式 (2.1).
- 式 (3.35) : 式 (2.5).
- 式 (3.36) : 式 (2.3). この式を認めれば導関数 (3.37) も自明。
- 式 (3.38), (3.39) : 式 (2.24). $\rho = \frac{1}{4K^2} [\wp(\frac{z-iK'}{2K}) - \wp(\frac{2z_0}{2K})]$, $\rho_i = \frac{1}{4K^2} [e_i - \wp(\frac{2z_0}{2K})]$.

※ 2-3 節に載せた式のうちテータ関数で書き直される式は 3-5 節では扱ってないが、書き下したければ以下の σ 関数とテータ関数の関係 [AS65, 18.10.8, 18.10.18] を使う：

$$\sigma(z; 1, \tau) = \exp \left(- \frac{\theta_1'''}{\theta_1'} \frac{z^2}{6} \right) \frac{\theta_1(z)}{\theta_1'}. \quad (3.63)$$

- 表 2 の引数シフトの公式 : 式 (2.52) の両辺から e_i, e_j を引き σ 関数で書き直すと $\frac{\sigma}{\sigma}(u + \omega_i)^2 = (e_i - e_j)(e_i - e_k) \frac{\sigma}{\sigma_i}(u)^2, \frac{\sigma_j}{\sigma}(u + \omega_j)^2 = (e_i - e_j) \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(u)^2$ を得るのでこの平方根を取る。
- 表 2 の式 (3.7)-(3.9) : 1 位の変換 (2.33).
- 表 3 (Landen 変換) : 2 位の変換 (2.34), (2.37)-(2.39). (テータ関数の Landen 変換 [Law89, sec. 1.4, 1.8], [KZ15, sec. 3.2] から導出できる [WW27, 21.52, 22.42].)
- ※ 1 位, 2 位の変換に関連する残された問題について 4 節で述べる展望も参照されたい。 ■

4 まとめと展望

本稿の目的は四次式を右辺に持つ楕円曲線 (1.3) を媒介変数表示する関数の様々な同値変形の整理であった。その主結果は 2-3 節と 3-5 節にある。Weierstrass 及び Jacobi のどちらかの関数だけで独立した証明をそれぞれの節に与え、両者の対応関係もまとめた (3-8 節)。三次分解多項式への帰着 (2-5 節と 3-4 節) や積分公式 (2-4 節と 3-6 節) も与えた。

派生話題の一つとして取り上げた Legendre の楕円曲線、すなわち右辺が複二次式の場合 (2-6 節)、に特化した書き換えのために設けた 1 位・2 位の変換 (2-7 節) や Landen 変換 (3-7 節)、それに関連する解の二十四通りの変換 (3-3 節)、は予想外に分量が多くなった。(これは背後にあるモ

ジュラー変換とその周辺の理論の豊かさを考えれば尤もな話ではある。) 特に、 σ_i 関数の変換則を直に書き下し (式 (2.32), (2.37)-(2.39)), また上昇下降 Landen 変換以外の一一般の Landen 変換を微分方程式 (3.10)-(3.12) と (3.51)-(3.53) の係数比較で導出した (表 3). 3-3 節で論じた S_4 の対称性は三次分解多項式に帰着させる (3-4 節) とかえって見づらくなるので、右辺が四次式の表示が楕円曲線の対称性を見るのに最も優れた標準形にすら思えてくる。Landen 変換が四次の楕円曲線の媒介変数表示を経由するとより簡潔に導ける事実から若干飛躍のある推論をすると、たとえ任意の楕円曲線は Weierstrass の標準形 (1.1) に双有理同値であっても、個々の曲線が特有に持つ個性を引き出す媒介変数表示が見つかれば、各種変換公式がより自然に生じるのかもしれない。

最後に紙数の制約で含め損ねた公式集の展望を述べる。これも上の段落で述べた 1 位・2 位の変換や Landen 変換に関係する。式 (3.7)-(3.9) や表 3 で互いに結ばれる楕円関数は恒等的に等しいため、その二重周期も一致する。ゆえ、変換前後の $(\frac{K(\tilde{m})}{K}, \frac{iK'(\tilde{m})}{K})$ と $(K(m), iK'(m))$ は整数係数一次変換で関係付かねばならない。これを吟味すると、変換前後の m が共に実数であれば既知の変換公式に帰着するだけだが、表 1 の最右列にあげた同じ m に帰着する異なる τ を考えると m -平面における完全楕円積分の分岐切断を跨いだ時の値の飛びが導出でき、また $m \in (0, 1)$ の場合にしか論じられないことが多い Landen 変換の複素指数における適用範囲 (及びその範囲から出た時の修正) を議論できる。複素指数の楕円積分は素粒子物理や数理論の現代的話題でも出現するがきちんとした公式集が無い。超幾何関数の接続公式とも関連する。次作でこれを論じたい。

本研究は JSPS 科研費 (JP19H05821) の助成を受けた。

参考文献

- [Akh90] N. I. Akhiezer. *Elements of the Theory of Elliptic Functions*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2nd edition, 1990.
- [AS65] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, Mineola, New York, 9th edition, 1965.
- [BF71] P. F. Byrd and M. D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2nd edition, 1971.
- [For02] A. R. Forsyth. *Theory of Differential Equations PART III. Ordinary Linear Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1902.
- [HC64] A. Hurwitz and R. Courant. *Vorlesungen Über Allgemeine Funktionentheorie Und Elliptische Funktionen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 4th edition, 1964. [邦訳 : 足立, 小松 訳. 楕円関数論 シュプリンガー数学クラシックス 丸善出版, 2012].
- [Kri77] I. M. Krichever. Integration of nonlinear equations by the methods of algebraic geometry. *Funct. Anal. Its Appl.*, 11(1):12–26, 1977.
- [Kri80] I. M. Krichever. Elliptic solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of particles. *Funct. Anal. Its Appl.*, 14(4):282–290, 1980.
- [KZ15] S. Kharchev and A. Zabrodin. Theta Vocabulary I. *Journal of Geometry and Physics*, 94:19–31, 2015. [arXiv:1502.04603].
- [Law89] D. F. Lawden. *Elliptic Functions and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1st edition, 1989.
- [WW27] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 4th edition, 1927.
- [戸 01] 戸田. 楕円関数入門. 日本評論社, 2001.
- [河 86] 河田. ガウスの楕円関数論. 上智大学数学講究録 No 24. 上智大学数学教室, 1986.
- [浅 65] 浅野, 永尾. 群論 岩波全書. 岩波書店, 1965.
- [笠 16] 笠原. 複素解析 1 変数解析関数. ちくま学芸文庫. 筑摩書房, 2016.

*7 [AS65, 16.34.3] の右辺第二項の符号は $+m \frac{\sigma \theta \sigma \theta}{\operatorname{dn} u}$ が正しい。

工学教育研究推進機構運営会議

議 長 上平 員丈

構成委員	木村 茂雄	河原崎徳之	栗原 誠	納富 一宏	馬嶋 正隆
	黄 啓新	高村 岳樹	山口 淳一	小池あゆみ	岡崎 美蘭
	高橋 勝美	一色 正男	井上 秀雄	兵頭 和人	山家 敏彦
	塩川 茂樹	工藤 嗣友	脇田 敏裕	野田 毅	吉満 俊拓
	高橋 正雄	三井 和博	星野 潤	井藤 晴久	

神奈川工科大学研究報告

B-46 理工学編 通巻 46 号

令和 4 年 3 月 1 日 発行

編集兼発行者 神 奈 川 工 科 大 学

〒 243-0292 神奈川県厚木市下荻野1030

電 話 046-241-6221

印 刷 者 株式会社スクールパートナーズ

当該研究報告に掲載された論文の著作権は本学に帰属する。