

モデル調整法を用いた線形動的システムのパラメータ同定

河 合 敏 勝

Parameter Identification of Linear Dynamical Systems by the use of Model Adjusting Method

By

Toshikatsu KAWAI

Abstract

In this paper, the parameter identification of linear dynamical systems by the use of model adjusting method is described. The parameter identification system is deduced to a new form by using state space representation, as a result it is possible to make easily an identification system. Furthermore, it is clarified that the structure of the identification system is simplified, considering the structures of linear dynamical systems. This simplification is concerned with the controllability of sensitivity equations.

Finally, some identification examples of typical physical systems are shown, and also some considerations are followed.

1. 緒 言

制御工学の分野でシステム同定問題は、一つの重要な研究課題である。この同定問題は、それ自身重要であるとともに適応制御系等の高度の制御系設計に必須の事柄でもある。制御工学でのシステム同定とは、システムの入出力関係に等価あるいは近似的に等価な数学モデルを作成することと定義される^{4),7)}。本論文では、同定すべきシステムは線形動的システム（以後物理システムと称する。）であり、そのシステムの入力—状態—出力間の数学的構造は既知でパラメータのみが未知であるとする。これは、いわゆるパラメータ同定問題である。本問題を取扱うに際して本論文では、多変数システムに適した状態空間表現を採用し一般性を有する方法として提起するものである¹⁾。特に、同定するために必要なシステム（以後同定システムと称する。）を極めて見通しよく設計できるとともに物理システムの構造が同定システムの構造にいかんにか反映するかについて知ることが可能で、中でも同定システムを構成する際の積分器と乗算器の台数について新しい結果を導くことができる²⁾。本同定法は、物理システムと数学的構造が等価なモデルを設け、物理システムと数学モデルの出力の応答誤差を利用して数学

モデルのパラメータを調整する方法である^{1),4)}。本論文は、前半が同定システム構成のための一般式の導出に当てられており、後半は適用例について考察している。

2. 対象とする物理システム

ここで取扱う物理システムは、次の条件を有するものとする。

(i) 物理システムは、線形動的システムとし、noiselessシステムとする。

(ii) 物理システムの伝達関数行列 $G(s)$ の要素を $G_{ij}(s)$ とするとき、任意の i, j に対して分子の次数より分母の次数が高いとする。

(i), (ii) を満足する物理システムは、式(2.1) および式(2.2) で表現できるシステムと仮定する。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.2)$$

ここに、 $x(t)$: $(n \times 1)$ 状態ベクトル

$u(t)$: $(r \times 1)$ 制御ベクトル

$y(t)$: $(\tilde{m} \times 1)$ 出力ベクトル

A : $(n \times n)$ システム行列

B : $(n \times r)$ 操作行例

C : $(\tilde{m} \times n)$ 出力行列

また、出力行列 C の逆行列が存在するときを完全情

報構造システムと称し、そうでないときを不完全情報構造システムと称することにする¹⁾。

3. 同定システムの原理

3.1 物理システムと同定システム

Fig. 3.1 は、パラメータ同定のための概念的システム構成図である。物理システム Σ_p と数学モデル Σ_m の出力の差は、システムの誤差ベクトル $\varepsilon_y(t)$ として計測され、パラメータ調整器を通して物理システムの未知パラメータベクトル α と一致するように数学モデルのパラメータベクトル $\alpha_m(t)$ が調整される。これは、 $\varepsilon_y(t)$ が零になるまで続けられる。本論文では、物理システム Σ_p と数学モデル Σ_m は同一構造とし、パラメータベクトル α と $\alpha_m(t)$ は同次元である。

3.2 評価関数とパラメータ調整則

Fig. 3.1 において、物理システムと数学モデルのパラメータ不一致の量は、誤差ベクトル $\varepsilon_y(t)$ として計測される。ここで、評価関数として式 (3.1) を定義する。

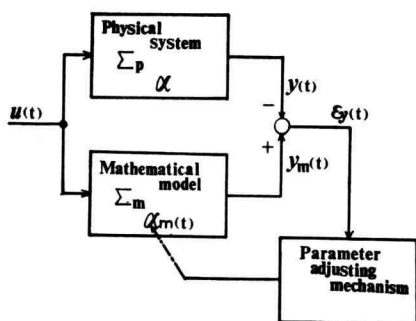


Fig. 3.1 Model adjusting method

$$J(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_y^T(t) Q \varepsilon_y(t) \quad (3.1)$$

式 (3.1) の Q を正値行列とすると、任意の $\varepsilon_y(t)$ に対して $J \geq 0$ である。また、式 (3.1) は、パラメータ不一致の量を陽に示すと式 (3.2) である。

$$J(\alpha_m(t), t) = \frac{1}{2} \varepsilon_y^T(\alpha_m(t), t) Q \varepsilon_y(\alpha_m(t), t) \quad (3.2)$$

次に、式 (3.2) の値が減少するように時々刻々連続にパラメータ $\alpha_m(t)$ を変化させるために連続形の最大傾斜法を用いる。

$$\dot{\alpha}_m(t) = -K \Delta J(\alpha_m(t), t) \quad (3.3)$$

次に、 $\nabla J(\alpha_m(t), t)$ は、

$$\nabla J(\alpha_m(t), t) = \left[\frac{\partial J(\alpha_m(t))}{\partial \alpha_{m1}} \quad \frac{\partial J(\alpha_m(t))}{\partial \alpha_{m2}} \quad \dots \quad \frac{\partial J(\alpha_m(t))}{\partial \alpha_{mj}} \quad \dots \quad \frac{\partial J(\alpha_m(t))}{\partial \alpha_{ml}} \right]^T \quad (3.4)$$

ただし、 l はパラメータベクトルの次元である。

式 (3.3) において K が正値行列であれば、 $J(\alpha_m(t), t)$ が減少する方向に $\alpha_m(t)$ を動かすことができる^{1), 4), 6)}。本論文では、 K は対角行列とする。

4. 同定システムの導出

4.1 完全情報構造システムの場合

本節では、物理システムが完全情報構造を有し、未知パラメータはシステム行列 A に存在するものと仮定する。この仮定に基づけば、式 (4.1) を考えれば十分である。

$$\dot{x}(t) = A(\alpha) x(t) + B u(t) \quad (4.1)$$

式 (4.1) の $A(\alpha)$ は、 A に未知パラメータ α が存在することを示しているにすぎない。さて、物理システムと同一構造の数学モデルを式 (4.2) で表わす。

$$\dot{x}_m(t) = A_m(\alpha_m(t)) x_m(t) + B u(t) \quad (4.2)$$

物理システムと数学モデルの応答誤差ベクトル $\varepsilon_x(t)$ は、

$$\varepsilon_x(\alpha_m(t), t) = x_m(\alpha_m(t), t) - x(t) \quad (4.3)$$

で表わされる。従って、評価関数は、式 (4.4) となる。

$$J(\alpha_m(t), t) = \frac{1}{2} \varepsilon_x^T(\alpha_m(t), t) Q \varepsilon_x(\alpha_m(t), t) \quad (4.4)$$

簡単化のため式 (4.4) の行列 Q は、正値行列で単位行列とする。式 (4.4) は、式 (4.5) となる。

$$\begin{aligned} J(\alpha_m(t), t) &= \frac{1}{2} \varepsilon_x^T(\alpha_m(t), t) \varepsilon_x(\alpha_m(t), t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [x_{mi}(\alpha_m(t), t) - x_i(t)]^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ただし、 x_{mi} 、 x_i は、それぞれ x_m 、 x の第 i 成分である。

式 (3.4) の第 j 成分に注目すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\alpha_m(t), t)}{\partial \alpha_{mj}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_{mj}} \sum_{i=1}^n [x_{mi}(\alpha_m(t), t) - x_i(t)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [x_{mi}(\alpha_m(t), t) - x_i(t)] \frac{\partial x_{mi}(\alpha_m(t), t)}{\partial \alpha_{mj}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

が得られる。式 (4.6) 右辺 $\partial x_{mi} / \partial \alpha_{mj}$ の項を得るために新しいシステムを構成することが必要である。そこ

で、式(4.2)を α_{mj} で偏微分し、 $\mathbf{x}_m(t)$ が $\alpha_m(t)$ と時間 t に関してともに連続であれば式(4.7)が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_m(t)}{\partial \alpha_m} &= A_m(\alpha_m(t)) \frac{\partial x_m(t)}{\partial \alpha_m} \\ &+ \frac{\partial A_m(\alpha_m(t))}{\partial \alpha_m} x_m(t) \\ (j &= 1, 2, \dots, l) \end{aligned} \quad (4.7)$$

式 (4.7) は、パラメータ α_{mj} に対する数学モデルの感度方程式を表わす。ここで、パラメータ α_{mj} の変化に対する数学モデルの感度係数として

$$v_j(t) = \frac{\partial x_m(t)}{\partial \alpha_{mj}} \quad (4.8)$$

とおくことにより式 (4.9) が得られる。

$$\dot{\mathbf{v}}_j(t) = \mathbf{A}_m(\mathbf{a}_m(t)) \mathbf{v}_j(t) + \frac{\partial \mathbf{A}_m(\mathbf{a}_m(t))}{\partial \alpha_{mj}} \mathbf{x}_m(t) \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (4.9)$$

式 (4.9) の v_j は, n 次元ベクトルでありその第 i 成分を v_{ij} とおくと,

$$v_{ij}(t) = \frac{\partial x_{mi}(t)}{\partial \alpha_{mi}} \quad (4.10)$$

である。式 (4.10) を式 (4.6) に代入すると式 (4.11) が得られる。

$$\frac{\partial J(\mathbf{a}_m(t), t)}{\partial \mathbf{a}_{mj}} = \sum_{i=1}^n [x_{mi}(\mathbf{a}_m(t), t) - x_i(t)] v_{ij}(t) \quad (4.11)$$

更に、式 (4.11) を式 (3.3) に代入することにより式 (4.12) を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_{mj}(t) = & -K_{jj} \sum_{i=1}^n [x_{mi}(\mathbf{a}_m(t), t) - x_i(t)] v_{ij}(t) \\ & (K_{jj} > 0, j = 1, 2, \dots, l) \end{aligned} \quad (4.12)$$

式 (4.12) のベクトル表現は，式 (4.13) である。

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_{m1}(t) \\ \dot{\alpha}_{m2}(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_{mi}(t) \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & K_{22} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{ll} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{xi} v_{i1}(t) \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_{xi} v_{i2}(t) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_{xi} v_{il}(t) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

ただし, $\varepsilon_{xi} = x_{mi}(\mathbf{a}_m(t), t) - x_i(t)$ である。

以上の議論より

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\mathbf{a}) \mathbf{x}(t) + B u(t) \quad (4.14)$$

の未知パラメータ α を同定するために、下記の方程式群を実現すればよいことが明らかである。

$$\dot{x}_m(t) = A_m(a_m(t)) x_m(t) + B u(t) \quad (4.15)$$

$$\dot{v}_j(t) = A_m(\alpha_m(t)) v_j(t) + \frac{\partial A_m(\alpha_m(t))}{\partial \alpha_{mj}} x_m(t) \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_{mj}(t) = & -K_{jj} \sum_{i=1}^n [x_{mi}(\mathbf{a}_m(t), t) - x_i(t)] v_{ij}(t) \\ (j = & 1, 2, \dots, l) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } v_j(t) &= [v_{1j}(t), v_{2j}(t), \dots, v_{nj}(t)]^T \\ v_j(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$v_{ij}(t) = \frac{\partial x_{mi}(t)}{\partial \alpha_{mj}}$$

である。

式 (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) に対してアナログ実現を施すと形式的なブロック線図とし Fig. 4.1 が得られる。

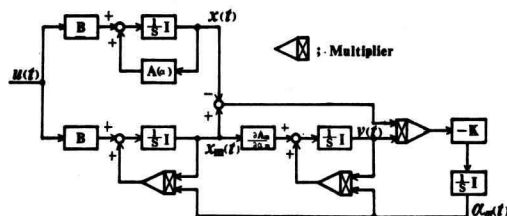


Fig 4.1 Parameter identification system
(Case of the complete information structure)

4.2 不完全情報構造システムの場合

不完全情報構造の物理システムから得られるデータは、入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ であるから式 (4.17) は実現不可能である。従って、応答誤差ベクトルとして $y(t)$ と $u_m(t)$ の差を考えねばならない。

このとき，誤差ベクトルを $\mathbf{e}_y(t)$ とすると

$$\varepsilon_{\nu}(\mathbf{a}_m(t), t) = y_m(\mathbf{a}_m(t), t) - y(t) \quad (4.18)$$

であるから、評価関数 $J_y(\mathbf{a}_m(t), t)$ は、式 (4.19) で与えられる。

$$J_y(\mathbf{a}_m(t), t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\tilde{m}} [y_{mi}(\mathbf{a}_m(t), t) - y_i(t)]^2 \quad (4.19)$$

式 (4.19) を α_{mj} で偏微分すると式 (4.20) が得られる。

$$\frac{\partial y_j(\alpha_m(t), t)}{\partial \alpha_{mj}} = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \frac{[y_{mi}(\alpha_m(t), t) - y_i(t)]}{\frac{\partial y_{mi}(\alpha_m(t), t)}{\partial \alpha_{mi}}} \quad (4.20)$$

式 (4.20) の $\partial y_{mi} / \partial \alpha_{mj}$ は, $y_m(t) = c x_m(t)$ より

$$\frac{\partial y_m(t)}{\partial \alpha_{mj}} = c \frac{\partial x_m(t)}{\partial \alpha_{mj}} \quad (4.21)$$

であり,

$$w_j(t) = \frac{\partial y_m(t)}{\partial \alpha_{mj}}$$

とおくと, 式 (4.22) が得られる。

$$w_j(t) = c v_j(t) \quad (4.22)$$

すなわち, 不完全情報構造システムに対しては, 式 (4.22) が新たに必要となる。

以上の議論より

$$\dot{x}(t) = A(\alpha) x(t) + B u(t) \quad (4.23)$$

$$y(t) = c x(t) \quad (4.24)$$

で表わされる物理システムの未知のパラメータ α を同定するためには, 下記の方程式群を実現すればよく, そのアナログ実現は, Fig. 4.2 となる。

$$\dot{x}_m(t) = A_m(\alpha_m(t)) x_m(t) + B u(t) \quad (4.25)$$

$$y_m(t) = c x_m(t) \quad (4.26)$$

$$\dot{v}_j(t) = A_m(\alpha_m(t)) v_j(t) + \frac{\partial A_m(\alpha_m(t))}{\partial \alpha_{mj}} x_m(t) \quad (4.27)$$

$$w_j(t) = c v_j(t) \quad (4.28)$$

$$\dot{\alpha}_{mj}(t) = -K_{jj} \sum_{i=1}^{\tilde{m}} [\gamma_{mi}(\alpha_m(t), t) - y_i(t)] w_{ij}(t) \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (4.29)$$

$$\text{ただし } w_{ij}(t) = \frac{\partial \gamma_{mi}(t)}{\partial \alpha_{mj}}$$

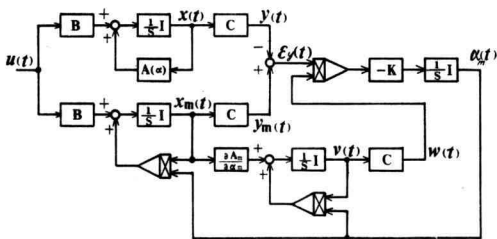


Fig. 4.2 Parameter identification system (Case of the incomplete information structure)

4.3 一般的な場合

不完全情報構造の場合でしかもすべての行列に未知パラメータが含まれる場合にも同様に同定システムが導出できる。ここでは, 結果のみを記載する。

$$\dot{x}(t) = A(\alpha) x(t) + B(\beta) u(t) \quad (4.30)$$

$$y(t) = c(\gamma) x(t) \quad (4.31)$$

上記式 (4.30), (4.31) の未知のパラメータ α, β, γ を同定するために, 下記の方程式群で調整すればよい。た

だし, リプシッツ連続と仮定する。

$$\dot{x}_m(t) = A_m(\alpha_m(t)) x_m(t) + B_m(\beta_m(t)) u(t) \quad (4.32)$$

$$y_m(t) = C_m(\gamma_m(t)) x_m(t) \quad (4.33)$$

$$\dot{v}_{\alpha j}(t) = A_m(\alpha_m(t)) v_{\alpha j}(t) + \frac{\partial A_m(\alpha_m(t))}{\partial \alpha_{mj}} x_m(t) \quad (4.34)$$

$$w_{\alpha j}(t) = C_m(\gamma_m(t)) v_{\alpha j}(t) \quad (4.35)$$

$$\dot{v}_{\beta k}(t) = A_m(\alpha_m(t)) v_{\beta k}(t) + \frac{\partial B_m(\beta_m(t))}{\partial \beta_{mk}} u(t) \quad (4.36)$$

$$w_{\beta k}(t) = C_m(\gamma_m(t)) v_{\beta k}(t) \quad (4.37)$$

$$w_{\gamma q}(t) = \frac{\partial C_m(\gamma_m(t))}{\partial \gamma_{mq}} x_m(t) \quad (4.38)$$

$$\dot{\alpha}_{mj}(t) = -K_{jj} \sum_{i=1}^{\tilde{m}} [\gamma_{mi}(\alpha_m(t), \beta_m(t), \gamma_m(t), t) - y_i(t)] w_{\alpha ij}(t) \quad (K_{jj} > 0, j = 1, 2, \dots, l_\alpha) \quad (4.39)$$

$$\dot{\beta}_{mk}(t) = -K_{kk} \sum_{i=1}^{\tilde{m}} [\gamma_{mi}(\alpha_m(t), \beta_m(t), \gamma_m(t), t) - y_i(t)] w_{\beta ik}(t) \quad (K_{kk} > 0, k = 1, 2, \dots, l_\beta) \quad (4.40)$$

$$\dot{\gamma}_{mq}(t) = -K_{qq} \sum_{i=1}^{\tilde{m}} [\gamma_{mi}(\alpha_m(t), \beta_m(t), \gamma_m(t), t) - y_i(t)] w_{\gamma iq}(t) \quad (K_{qq} > 0, q = 1, 2, \dots, l_\gamma) \quad (4.41)$$

式 (4.30) から式 (4.41) に対してアナログ実現を施すと形式的なブロック線図として Fig. 4.3 が得られる。

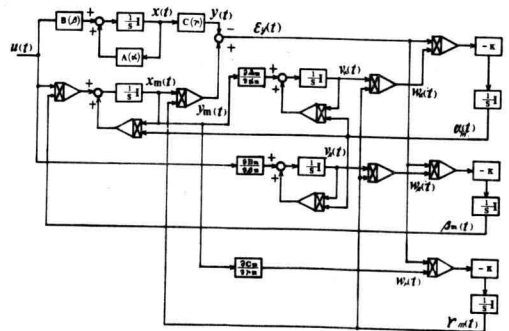


Fig. 4.3 Identification system when the unknown parameter include under $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$

5. 同定システムの構成

5.1 構成要素数

(i) 完全情報構造システムの場合

- Case A システム行列 A に l_α 個の未知パラメータが含まれる場合。
- Case B システム行列 A に l_α 個, 操作行列 B に l_β 個の未知パラメータが含まれる場合。
- (ii) 不完全情報構造システムの場合。
- Case C Case A の場合で出力ベクトルが \tilde{m} 次元である場合。
- Case D Case B の場合で出力ベクトルが \tilde{m} 次元である場合。
- Case E システム行列 A に l_α 個, 操作行列 B に l_β 個, 出力行列 A に l_γ 個の未知パラメータを含む場合。

上記 5 つのケースに対する積分器と乗算器の台数は Table 1 に示す通りである。

Table 1 Number of Multiplier, Integrater

Case	積 分 器	乗 算 器
A	$n(1+l_\alpha)+l_\alpha$	$l_\alpha(1+n+l_\alpha)$
B	$n(1+l_\alpha+l_\beta)+l_\alpha+l_\beta$	$l_\alpha(1+l_\alpha+l_\beta+n)+l_\beta(1+n)$
C	$n(1+l_\alpha)+l_\alpha$	$l_\alpha(1+l_\alpha+\tilde{m})$
D	$n(1+l_\alpha+l_\beta)+l_\alpha+l_\beta$	$l_\alpha(1+l_\alpha+l_\beta+\tilde{m})+l_\beta(1+\tilde{m})$
E	$n(1+l_\alpha+l_\beta)+l_\alpha+l_\beta+l_\gamma$	$l_\alpha(1+l_\alpha+l_\beta)+\tilde{m}(l_\alpha+l_\beta+l_\gamma)+l_\beta+3l_\gamma$

ただし, n ; 状態ベクトルの次元

5.2 構成要素数の低減

Table 1 の積分器と乗算器の台数は, 最大台数でありこの台数より増加することはない。むしろ物理システムの構造に応じて減少する。

実際に必要な要素は, 完全情報構造システムの場合, 感度方程式の可制御性に関連がある。

$$\dot{v}_{\alpha j}(t) = A_m(\alpha_m(t)) v_{\alpha j}(t) + \frac{\partial A_m(\alpha_m(t))}{\partial \alpha_{mj}} x_m(t) \quad (5.1)$$

式 (5.1) において, $v_{\alpha j}(t)$ に対して $x_m(t)$ は入力と考えることが可能で, もし, $v_{\alpha j}(t)$ が $x_m(t)$ で可制御であれば, Table 1 の台数を低減することはできない。

しかし, 可制御対 $[A_m(\alpha_m(t)), \partial A_m(\alpha_m(t))/\partial \alpha_{mj}]$ が n 個の独立なベクトルを有さず,

$$\text{rank}[A_m(\alpha_m(t)), \partial A_m(\alpha_m(t))/\partial \alpha_{mj}] = q_j < n \quad (5.2)$$

であるとする, $v_{\alpha j}(t)$ の $n-q_j$ 個の成分が不可制御

となる。従って, $v_{\alpha j}(t)$ の初期値は, $v_{\alpha j}(0) = \mathbf{0}$ であるので $n-q_j$ 個の変数は全く意味がない。1 変数当たり 1 台の積分器と 2 台の乗算器が必要であるから, $n-q_j$ 個の変数が不必要になると, $n-q_j$ 台の積分器と $2(n-q_j)$ 台の乗算器を低減することができる。

一方, 不完全情報構造システムの場合は, 積分器の低減台数に関しては, 完全情報構造システムの場合と同様であるが, 乗算器の台数に関しては感度方程式で $n-q_j$ 台, 最大傾斜式で $(n-\tilde{m}) \times l$ 台が低減可能である。

Table 2 は, 各条件による低減台数を示す。

Table 2. Reducing number of Multiplier, Integrater

可制御対の階数	完全情報構造システム		不完全情報構造システム	
	積分器台数	乗算器台数	積分器台数	乗算器台数
n	0	0	0	0
q_j	$n-q_j$	$2(n-q_j)$	$n-q_j$	$n-q_j+l(n-\tilde{m})$

5.3 低減可能な例

式 (5.3) は, 同定すべき物理システムであり, $\alpha_{1, 2, \alpha_3}$ は未知パラメータとする。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (5.3)$$

式 (5.3) に対して感度方程式は, 式 (4.16) を用いることにより,

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{11}(t) \\ \dot{v}_{21}(t) \\ \dot{v}_{31}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{m1}(t) & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_{m2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{m3}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11}(t) \\ v_{21}(t) \\ v_{31}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ x_{m3}(t) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{12}(t) \\ \dot{v}_{22}(t) \\ \dot{v}_{32}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{m1}(t) & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_{m2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{m3}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12}(t) \\ v_{22}(t) \\ v_{32}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ x_{m3}(t) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{13}(t) \\ \dot{v}_{23}(t) \\ \dot{v}_{33}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{m1}(t) & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_{m2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{m3}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{13}(t) \\ v_{23}(t) \\ v_{33}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \\ x_{m3}(t) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

となる。ところが式 (5.4), (5.5), (5.6) で, $v_{21}(t)$, $v_{31}(t)$, $v_{32}(t)$, $v_{13}(t)$, $v_{23}(t)$ には, 入力印加されず, しかも初期値は零であるから, 任意の $t \geq 0$ に対して零である。従って, 式 (5.4), (5.5), (5.6) は, 式 (5.7), (5.8), (5.9) に簡略化される。

$$\dot{v}_{11}(t) = -\alpha_{m1}(t) v_{11}(t) - x_{m1}(t) \quad (5.7)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{12}(t) \\ \dot{v}_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{m1}(t) & 1 \\ 0 & -\alpha_{m2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12}(t) \\ v_{22}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$\dot{v}_{33}(t) = -\alpha_{m3}(t) v_{33}(t) - x_{m3}(t) \quad (5.9)$$

このことは, 前述の可制御対を考慮することにより直ちに得られる。

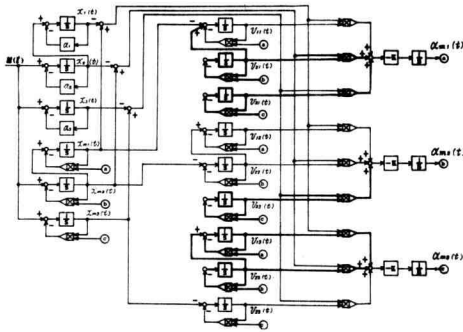


Fig. 5.1 Identification system when the unknown parameter include under α_1 , α_2 , α_3

Fig. 5.1 は, 式 (5.3) の未知パラメータ α_1 , α_2 , α_3 を同定するためのアナログ実現であり, 図中太線の部分は本章での結果を用いることにより省略可能となる。勿論太線の部分を入れても同定には何ら影響を与えないが, 要素の無駄は好しくない。

以上, 本章では, 主にシステム構成要素数の低減について述べたが, 物理システムの構造が同定システムの構造に反映することが明らかである。

6. 適用例とその考察

本章では, 制御系を考える場合, 最も基本的になる 1 次系と高次系を考える上で重要な 2 次系のパラメータ同定例を示し合せて考察を行う。

6.1 1 次系の場合

6.1.1 未知のパラメータがシステム行列 A に存在する場合。

式 (6.1) で表わされる物理システムのパラメータ α を同定することを考える。

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t) \quad (6.1)$$

ただし, $\alpha > 0$ とし, 入力 $u(t)$ は単位ステップ関数とする。第 4 章で導出した式 (4.15), (4.16), (4.17) を用いることにより必要な同定システムが直ちに導かれる。即ち,

$$\dot{x}_m(t) = -\alpha_m(t) x_m(t) + u(t) \quad (6.2)$$

$$\dot{v}(t) = -\alpha_m(t) v(t) - x_m(t) \quad (6.3)$$

$$\dot{\alpha}_m(t) = -K(x_m(t) - x(t)) v(t) \quad (6.4)$$

以上, 得られた方程式をアナログ実現すると Fig. 6.1 が得られる。

式 (6.1) の α が 1.0 の場合のパラメータ同定過程を Fig. 6.2 に示す。この図は, 数種の K の値に対する同定の過程であり, K の選択の仕方により収束性が異なることがわかる。(Fig. 6.7.1 参照) 次に, Fig. 6.3 は数学モデルの応答を示す。図中点線は, 物理システムの応答である。また, そのときの感度方程式の応答を Fig. 6.4 に示す。

$\alpha = 1.0$ の場合は, 時定数が 1.0 (sec) のシステムで概略的に時定数 T の 5 倍程度の時間が 10% の整定時間となる。

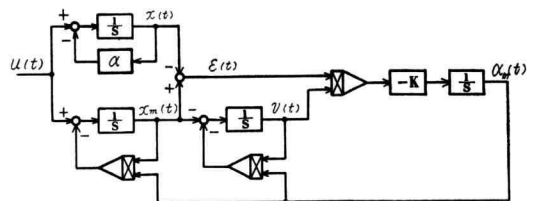


Fig. 6.1 Identification system of the 1-order system (α)

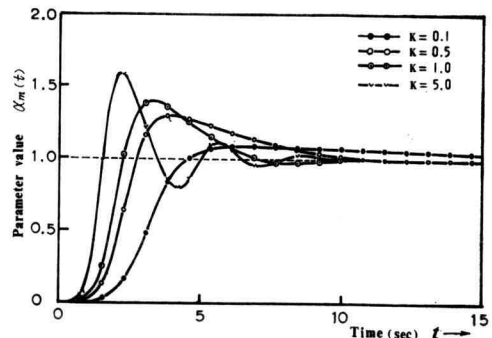


Fig. 6.2 Parameter identification process ($\alpha = 1.0$)

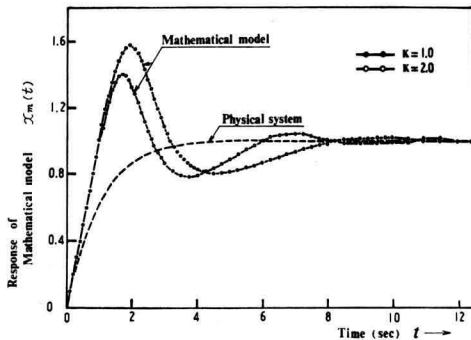


Fig 6.3 Response of Mathematical model

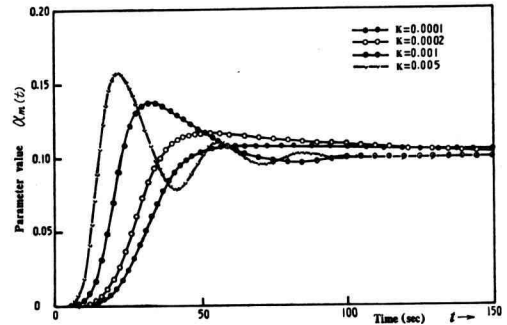


Fig 6.6 Parameter identification process ($\alpha=0.1$)

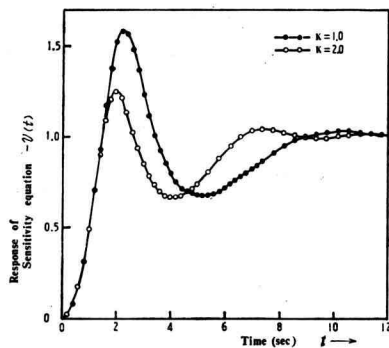


Fig 6.4 Response of Sensitivity equation

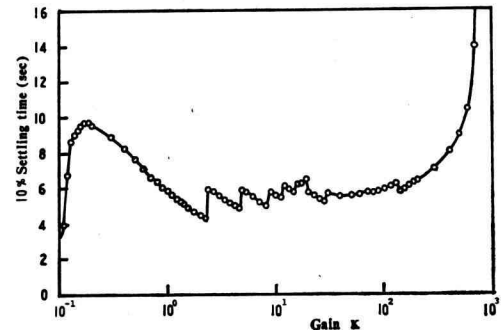


Fig 6.7.1 ($\alpha=1.0$)

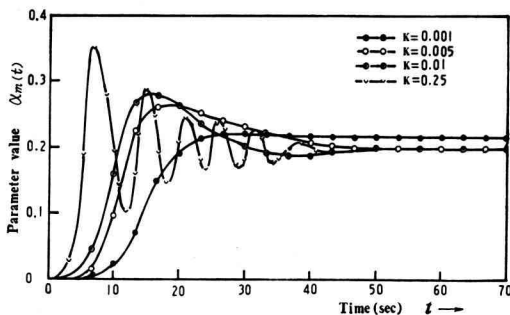


Fig 6.5 Parameter identification process ($\alpha=0.2$)

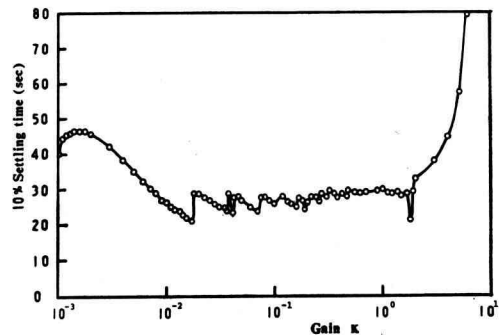


Fig 6.7.2. ($\alpha=0.2$)

次に、パラメータ α の影響を調べるために、 $\alpha = 0.2$ (時定数 5 秒) の同定例を Fig. 6.5 に示す。また、Fig. 6.6 は $\alpha = 0.1$ (時定数 10 秒) の場合である。

Fig. 6.7 は、それぞれ $\alpha = 1.0$, $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.1$ の場合のパラメータ同定過程の収束性の一つの尺度として 10% の整定時間を取り、それと最大傾斜式のゲイン K

の関連を示す。これらのグラフより、最適な K が存在することが明白であり、その時の整定時間は、いずれの場合も時定数の約 5 倍程度であることが特徴的である。

また、整定時間の意味で最適な K は、 α の減少に伴ない小さくする必要がある。換言すれば、物理システムの時定数 (α の逆数) が大きくなるに従いゲイン K は小さくしなければならないことが明らかである。

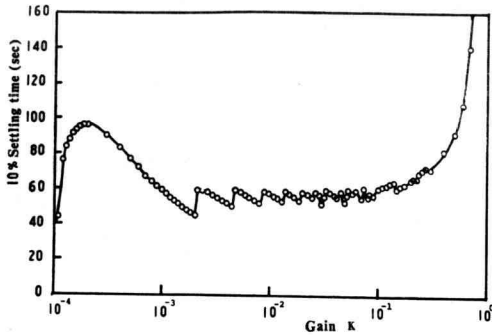
Fig 6.7.3 ($\alpha=0.1$)

Fig 6.7 Relation between Gain K and Settling time

6.1.2 未知のパラメータがシステム行列 A , 操作行列 B に存在する場合。

式 (6.5) で表わされる物理システムのパラメータ α, β を同定することを考える。

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \beta u(t) \quad (6.5)$$

ただし, $\alpha > 0, \beta > 0$ とし, 入力正弦波である。第 4 章で導出した式を用いることにより必要な同定システムが直ちに導かれる。

$$\text{即ち, } \dot{x}_m(t) = -\alpha_m(t) x_m(t) + \beta_m(t) u(t) \quad (6.6)$$

$$\dot{v}_\alpha(t) = -\alpha_m(t) v_\alpha(t) - x_m(t) \quad (6.7)$$

$$\dot{v}_\beta(t) = -\alpha_m(t) v_\beta(t) + u(t) \quad (6.8)$$

$$\dot{\alpha}_m(t) = -K(x_m(t) - x(t)) v_\alpha(t) \quad (6.9)$$

$$\dot{\beta}_m(t) = -K(x_m(t) - x(t)) v_\beta(t) \quad (6.10)$$

以上, 得られた方程式をアナログ実現すると Fig. 6.8 が得られる。

式 (6.5) において, $\alpha = 1.0, \beta = 1.0$ とした場合のパラメータ同定過程を Fig. 6.9.1 に示す。Fig. 6.9.2 は $\alpha = 1.0, \beta = 2.0$ の場合である。この際, 入力は正弦

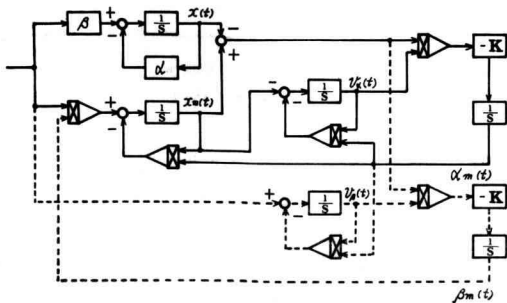
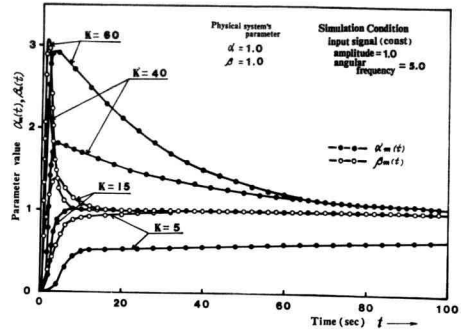
Fig 6.8 Identification system of the 1-order system (α, β)

Fig 6.9.1

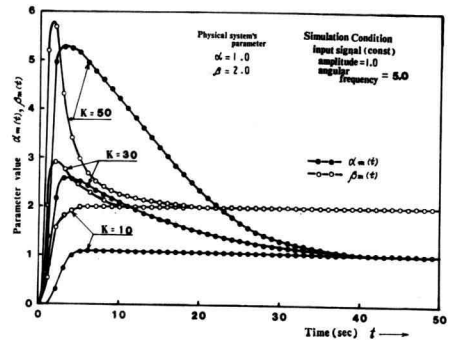


Fig 6.9.2

Fig 6.9 Parameter identification process

波である。入力に正弦波を投入した理由は, ステップ関数を投入すると, $\alpha_m(t)$ は α に, $\beta_m(t)$ は β に収束しない。これは収束する以前に Fig. 6.8 中の変数 $x(t), x_m(t), v_\alpha(t), v_\beta(t)$ が定常状態に落ち着くために $\alpha_m(t), \beta_m(t)$ を更新するための情報が得られないためである。(2次系で詳細に説明する。)

6.2 2次系の場合

6.2.1 未知パラメータがシステム行列 A に存在する場合。

次に, 式 (6.11) で表わされる 2 次系の α_1, α_2 を同時に同定することを考える。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (6.11)$$

式 (6.11) に対して同定システムを求めると

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{m1}(t) & -\alpha_{m2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (6.12)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{11}(t) \\ \dot{v}_{21}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{m1}(t) & -\alpha_{m2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11}(t) \\ v_{21}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{12}(t) \\ \dot{v}_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{m1}(t) & -\alpha_{m2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12}(t) \\ v_{22}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

$$\dot{\alpha}_{m1}(t) = -K_{11} \sum_{i=1}^2 [x_{mi}(t) - x_i(t)] v_{i1}(t) \quad (6.15)$$

$$\dot{\alpha}_{m2}(t) = -K_{22} \sum_{i=1}^2 [x_{mi}(t) - x_i(t)] v_{i2}(t) \quad (6.16)$$

となり、そのアナログ実現として Fig 6.10 が得られる。

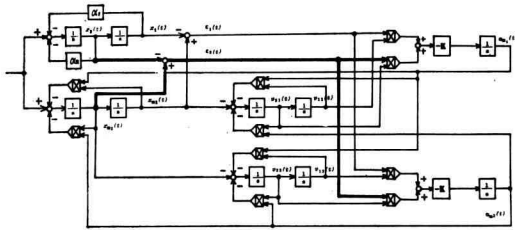


Fig 6.10 Identification system of the 2-order system (α_1, α_2)

式 (6.11) において、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$ とした場合のパラメータ同定過程を Fig. 6.11 (a) (b) に示す。この際、入力 $u(t)$ は、単位ステップ関数である。図には、安定である場合と不安定の場合を示すが、安定であっても、 $\alpha_{m2}(t)$ は、 α_2 には収束していない。これは、 $\alpha_{m2}(t)$ が α_2 に収束す以前に、Fig. 6.10 の変数 $x_2(t)$, $x_{m2}(t)$, $v_{12}(t)$, $v_{22}(t)$ が定常状態に落ち着くために、 $\alpha_{m2}(t)$ を更新するための情報が得られないためである。ステップ関数で同定可能か否かは、物理システムの構造により決定

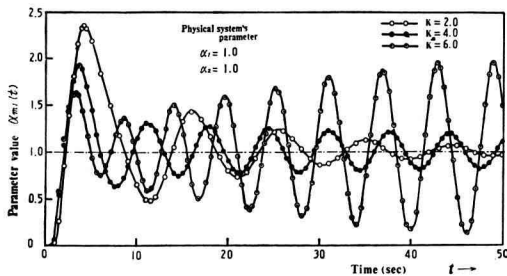


Fig 6.11 (a)

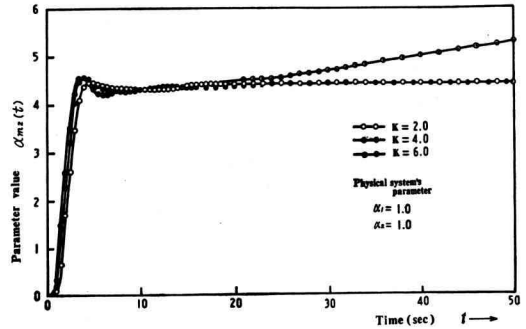


Fig 6.11 (b)

Fig 6.11 Parameter identification process ((a)- α_{m1} , (b)- α_{m2})

されるのであるが、この例は、ステップ関数の入力を投入しても定常状態で、 $x_2(t) = 0$, $x_1(t) = 1.0$ となり、たとえ α_2 が非零の値を有していても α_2 に関する情報はとりだせない場合である。従って、 $x_2(t)$, $x_{m2}(t)$ に常

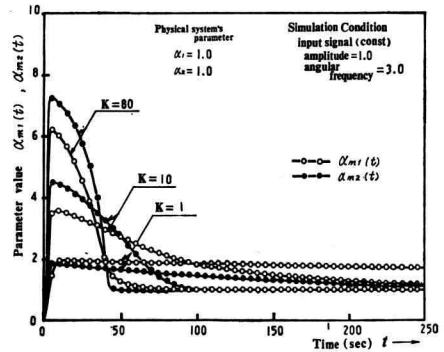


Fig 6.12.1

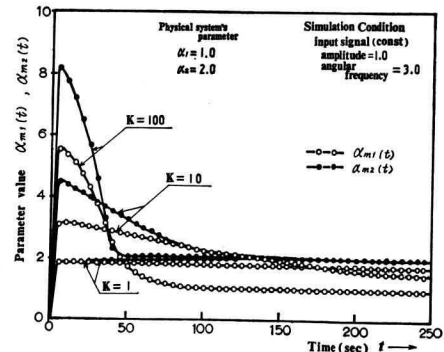


Fig. 6.12.2

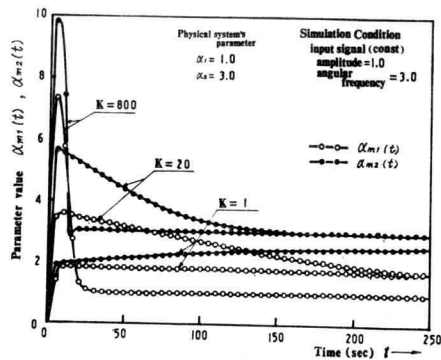


Fig. 6.12.3

Fig. 6.12 Parameter identification process
(Influence of Gain K)

に変動量を与えるためには、入力として $t > 0$ にて連続的あるいは不連続的に導関数が変化するものを選択しなければならない。Fig. 6.12 の同定過程は、入力として正弦波を投入した場合であり、 α_1 , α_2 ともに同定されてい

る。ただし、同定用の入力正弦波の条件は、それぞれ全く同じである。この図より、パラメータ α_1 , α_2 と最適なゲイン K とは深い関係があり、非振動的になるに従いゲイン K を高めることが良い収束性を与えることがわかる。また、入力正弦波の角周波数の影響は、Fig. 6.13 に示すような傾向であり、非振動的になるに従い入力正弦波の角周波数の下限は、小さくなるのがわかる。

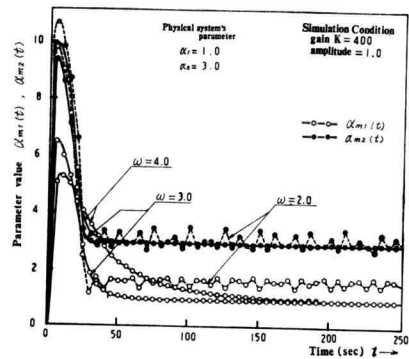


Fig. 6.13.3

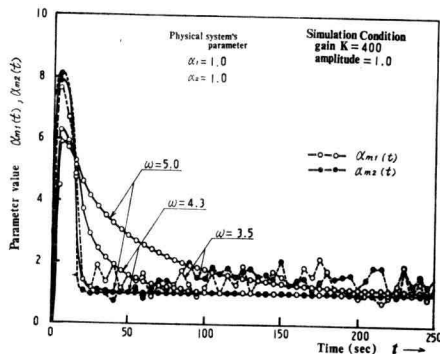
Fig. 6.13 Parameter identification process
(Influence of Angular Frequency ω)

Fig. 6.13.1

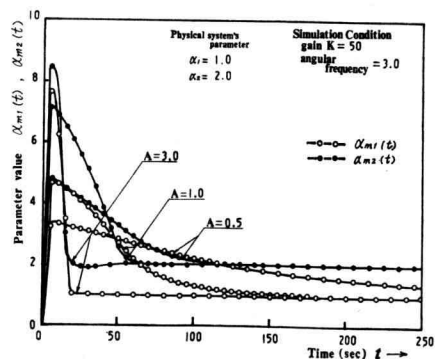
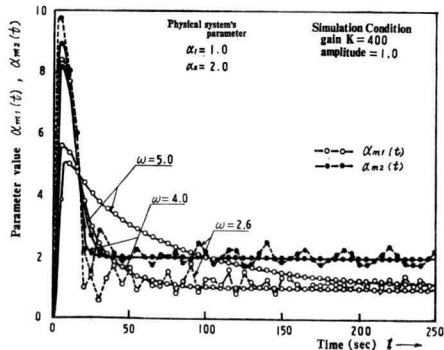
Fig. 6.14 Parameter identification process
($\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 2.0$, Influence of Amplitude)

Fig. 6.13.2

Fig. 6.14 は、ケース 1 の場合で、同定用入力の振幅を変化させた場合の同定過程であり、振幅を増大することは、最大傾斜式のゲイン K を高めることに類似していることがわかる。また、Fig. 6.15 は、 $\omega_n = 1.0$ (rad/sec), $K = 400$, 入力正弦波 (振幅 1.0, 角周波数 3.0 (rad/sec)) を一定とした場合の同定過程で、減衰係数が変化した場合を示す。

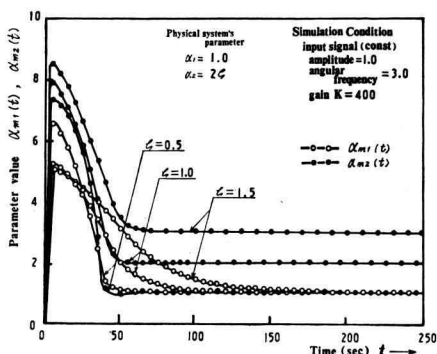


Fig 6.15 Parameter identification process (Influence of Damping coefficient ζ)

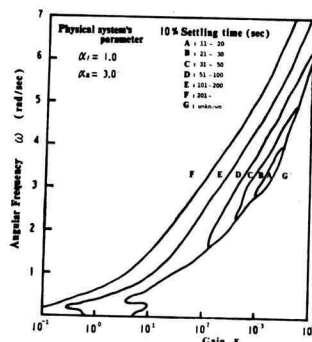


Fig. 6.16.3

Fig 6.16 Relation between Angular Frequency of Input and Gain K

Fig. 6.16 は、10% 整定時間の等高図であり、最大傾斜式のゲイン K と入力正弦波の角周波数 ω との関係を示す。図において、領域 A は、図中に示す時間で 10% の誤差範囲内にパラメータ同定値が納まることを意味す

る。また、この図よりそれぞれ E, F, G なる領域は、振動的あるいは不安定なる同定過程が得られる領域である。この領域と安定領域の境界にリミットサイクルが存在するものと思われる。

6.2.2 未知パラメータがシステム行列 A 、操作行列 B に存在する場合

式 (6.17) で表わされる 2 次系の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を同時に同定することを考える。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} u(t) \quad (6.17)$$

上式に対して同定システムを求めると、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{m1}(t) & -\alpha_{m2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{m3}(t) \end{pmatrix} u(t) \quad (6.18)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{11}(t) \\ \dot{v}_{21}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{m1}(t) & -\alpha_{m2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11}(t) \\ v_{21}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{12}(t) \\ \dot{v}_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{m1}(t) & -\alpha_{m2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12}(t) \\ v_{22}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{13}(t) \\ \dot{v}_{31}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{m1}(t) & -\alpha_{m2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{13}(t) \\ v_{31}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (6.21)$$

$$\dot{\alpha}_{m1}(t) = -K_{11} \sum_{i=1}^2 [x_{mi}(t) - x_i(t)] v_{i1}(t) \quad (6.22)$$

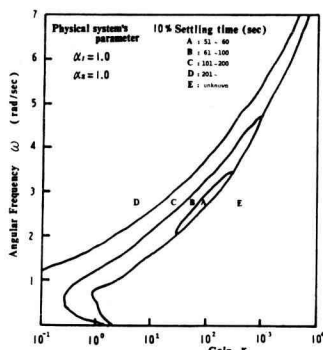


Fig 6.16.1

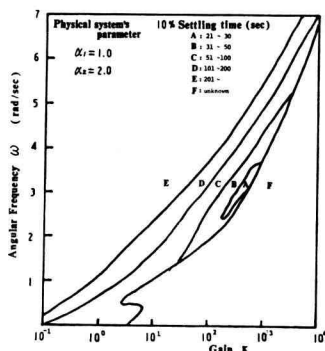


Fig. 6.16.2

$$\dot{\alpha}_{m2}(t) = -K_{22} \sum_{i=1}^2 [x_{mi}(t) - x_i(t)] v_{i2}(t) \quad (6.23)$$

$$\dot{\alpha}_{m3}(t) = -K_{33} \sum_{i=1}^2 [x_{mi}(t) - x_i(t)] v_{i3}(t) \quad (6.24)$$

となり、そのアナログ実現として Fig. 6.17 が得られる。

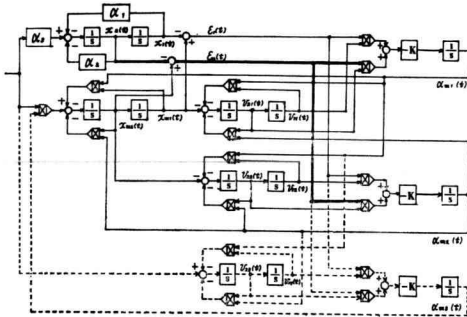


Fig 6.17 Identification system of the 2-order system ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)

式 (6.17) において、 $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 3.0$, $\alpha_3 = 1.0$ とした場合のパラメータ同定過程を Fig. 6.18 に示す。

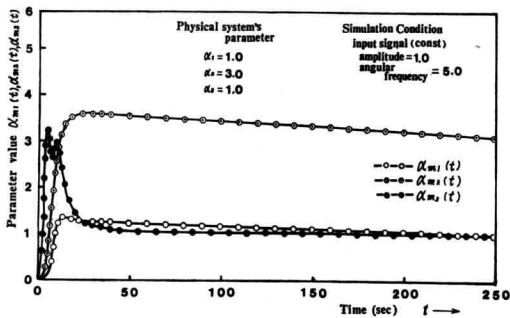


Fig 6.18 Parameter identification process ($\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 3.0$, $\alpha_3 = 1.0$)

以上のシミュレーション結果より、2, 3 の重要な事項が明らかとなる。

(1) ゲインと未知パラメータとは密接な関係があり、物理システムが振動的になるほど最適なゲインは、小さくする必要がある。

(2) 入力正弦波の角周波数も同定過程に影響を与えることがわかり、振動的になるに従い角周波数を小さくすることが必要である。

(3) 2次系の適用結果は、高次系を考える上で重要な

基礎資料を与え、高次系が2次系で近似可能な場合は、拡張利用可能である。

6.3 完全情報と不完全情報構造の比較

Fig. 6.10 において、物理システムから $x_2(t)$ なる状態変数が計測不可能な場合 (Fig. 6.10 において太線の部分がないとき) と $x_1(t)$, $x_2(t)$ 共に計測されときの同定過程の比較を Fig. 6.19.1, Fig. 6.19.2 に示す。Fig. 6.19.1 より、完全情報構造の場合が収束が良いことがわかる。Fig. 6.19.2 は、図中に示す条件の下でシミュレーションした結果であり、両者ともほぼ同等の同定過程を示している。しかしながら、完全情報構造より不完全情報構造の同定過程が良くなることは決してないことが我々の多くのシミュレーション結果より明らかとなった。

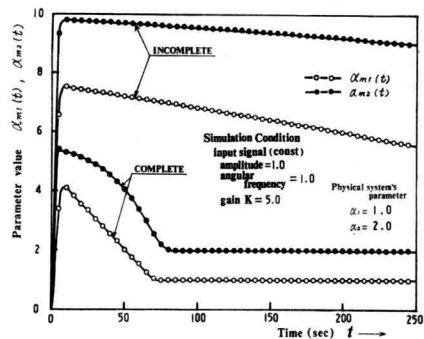


Fig 6.19.1

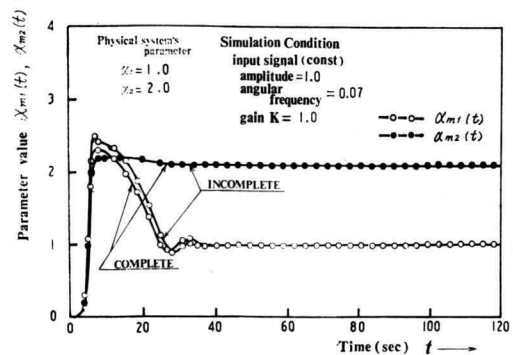


Fig 6.19.2

Fig 6.19 Comparison of the complete and incomplete information structure

7. 結 言

線形動的システム (物理システム) の未知パラメータ

をモデル調整法を用いて同定する際、同定システムを状態空間表現で導出し、容易にアナログ実現することが可能となり、同定システムの構成要素数は、物理システムの構造に依存することが明らかとなった。更に、代表的な物理システムを例に同定可能であることがわかり合せて若干の性質を明らかにすることができた。

今後の問題として、

(1) 本論文では、パラメータ調整則に最大傾斜法を用いたが、他手法との比較をすること。

(2) 同定用入力の実用性を物理システムの構造から明らかにし、必要であれば最適同定用入力の設計を考慮すること。

(3) 式 (3.3)、式 (4.4) の正値行列 Q および K は対角行列としたが、同定に最適な Q と K を求めること。

(4) 本論文では、アナログ実現を試みたが、同定システムをデジタル計算機が置換すること。その際、離散系に適した情報処理を与えること。

(5) 最も重要である全体システムの安定性に関して定量化すること。実際には、多数の非線形ループを含むので極めて困難であるが、比較的低次系に対して定量化することは高次系を考える上で重要と思われる。

(6) 物理システムにノイズが存在する場合などが考えられる。

最後に、本研究にあたり終始変わらずご指導いただいた穴吹雅敏助手 (東海大学制御工学科) に深く感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 宮崎, 穴吹, 平田, 河合
線形動的システムのパラメータ同定
第15回 SICE 学術講演会 (1976)
- 2) 宮崎, 穴吹, 河合, 橋倉
あるパラメータ同定システムの諸性質について
JAACE 第21期通常総合学術講演会 (1977)
- 3) 宮崎, 平田, 河合
M系列を用いた空気管路系の動特性推定
JAACE 第21期通常総合学術講演会 (1977)
- 4) 古田勝久
線形システムの観測と同定 コロナ社 (1976)
- 5) 米澤 洋
アナログ計算機によるパラメータの動的最適化
システムと制御, Vol. 16, No. 12 (1972)
- 6) 志水清孝
システム制御と数理計画法 コロナ社
- 7) Pieter Eykhoff; System Identification,
Jhon Wiley & Sons (1974)
- 8) G.A. Bekey & W.J. Karplus; Hybrid
Computation, Jhon Wiley & Sons (1971)