

多線条分布定数回路の一解析方法

森 武 昭 ・ 大 矢 征

One Method for Analyzing the Distributed Constant
Circuits of a Multi-conductor System.

Takeaki MORI and Susumu OHYA

Abstract

This paper describes a new method for analyzing the distributed constant circuits of a multi-conductor system, in which the method for a single conductor system is applied to a multi-conductor system by using the matrix expression. This method is more excellent than that, have been presented previously, in which the total length of the multi-conductor lines is divided into equal sections and each section is treated by a lumped constant circuit. Because, in this method we don't need to consider the following points; (1) the way to determine the dividing number of such lines, (2) the way to represent the lumped constant circuit for each section. The expressions obtained by this method are an infinite series of matrices and are computed easily with the aid of computer to keep the results of them within a given convergence limit.

Furthermore, authors calculate the shielding effect of two steel pipes which are laid underground, as an example of the application of this analyzing method. Then, it is confirmed that the shielding effect is dependent on the leakage conductance between the steel pipe and the ground.

1. ま え が き

例えば、電力線の近傍で地中に直埋されている鋼管のような導体（分布接地状態と考えられる）が複数で存在するとき、これらの導体の電流分布の解析は、導体相互間の結合を考慮せねばならないため、多線条系分布定数回路として取り扱う必要があり煩雑な計算となる。従来、この種の解析は、変換行列を用いて行列を対角化するか、導体を長さ方向に多分割して、各々の区間を集中定数回路として取り扱い、系統をこれらの縦続接続とする方法が提案されている^{1)~3)}。ところが、前者においては、変換行列を求めるのが容易でないし、後者においては、分割区間を集中定数回路とした場合の等価回路の表わし方や分割区間数による解析結果への影響などが必ずしも十分明確になっていない。そこで、著者らは、後者の方法を発展させて、単一導体の分布定数回路の解析に用いられている方法を行列表示により多線条系化する新しい解析方法を検討した。以下に、その解析方法の詳細

とその適用計算例について述べる。

2. 解 析 方 法

解析の対象となる導体数を一般的に n とすると、多線条系分布定数回路の基本方程式は、次の形で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx}[E] &= [Z][I] \\ -\frac{d}{dx}[I] &= [Y][E] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $[E]$ と $[I]$ は n 行 1 列からなる電位行列と電流行列、 $[Z]$ と $[Y]$ は n 次の正方行列からなる単位 km 当りのインピーダンス行列とアドミタンス行列を示している。また、 x は導体方向の基準点（送電端）からの距離 (km) を示している。ここで、

$$[Q]^2 = [Z][Y] \quad (2)$$

とおくと、(1) 式の解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} [E] &= \cosh([Q]x) \cdot [R] + \sinh([Q]x) \cdot [S] \\ [Z][I] &= -[Q] \cdot \sinh([Q]x) \cdot [R] \\ &\quad + \cosh([Q]x) \cdot [S] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで, $[R]$ と $[S]$ は n 行 1 列からなる積分定数行列を示している。ところで, 双曲線関数を級数展開すると, 次のような関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \cosh([Q]x) &= [U_n] + \frac{1}{2!}([Q]x)^2 + \frac{1}{4!}([Q]x)^4 + \dots \\ \sinh([Q]x) &= [Q]x + \frac{1}{3!}([Q]x)^3 + \frac{1}{5!}([Q]x)^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで, $[U_n]$ は n 次の単位行列を示している。そこで, (3) 式に関して, 両端での回路条件をあてはめて, $[R]$ と $[S]$ を決定する。

(1) $x=0$ で, $[E]=[E_1]$, $[I]=[I_1]$ とする。

$$\left. \begin{aligned} [E_1] &= [R], [Z][I_1] = -[Q][S] \text{ より} \\ [R] &= [E_1] \\ [S] &= -[Q]^{-1}[Z][I_1] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(2) $x=x$ で, $[E]=[E_2]$, $[I]=[I_2]$ とする。(5)

式の関係を考慮すると次式を得る。

$$\begin{aligned} [E_2] &= \cosh([Q]x) \cdot [E_1] \\ &\quad - \sinh([Q]x) \cdot [Q]^{-1}[Z][I_1] \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} [Z][I_2] &= -[Q] \sinh([Q]x) \cdot [E_1] \\ &\quad + [Q] \cosh([Q]x) \cdot [Q]^{-1}[Z][I_1] \\ &= -[Q] \sinh([Q]x) \cdot [E_1] \\ &\quad + \cosh([Q]x) \cdot [Z][I_1] \end{aligned} \quad (6.2)$$

なお, (6.2) 式の右辺第 2 項は, (4) 式の関係を考慮することにより求めることができる。次に, (6) 式に関して $[I_1]$ を消去すると次の関係が得られる (付録 1 参照)。

$$\begin{aligned} [E_1] &= \cosh([Q]x) \cdot [E_2] \\ &\quad + [Q]^{-1} \sinh([Q]x) \cdot [Z][I_2] \end{aligned} \quad (7)$$

同様に, (6) 式に関して $[E_1]$ を消去すると次の関係が得られる (付録 2 参照)。

$$\begin{aligned} [Z][I_1] &= [Q] \sinh([Q]x) \cdot [E_2] \\ &\quad + \cosh([Q]x) \cdot [Z][I_2] \end{aligned} \quad (8)$$

次に,

$$\begin{bmatrix} [E_1] \\ [I_1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_2] \\ [I_2] \end{bmatrix} \quad (9)$$

なる式を考え, (7) (8) 式と対応させると, $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ の四端子定数行列は, (4) 式を考慮して次のような形で表現することができる。

$$\begin{aligned} [A] &= \cosh([Q]x) \\ &= [U_n] + \frac{1}{2!}[Z][Y]x^2 + \frac{1}{4!}([Z][Y])^2x^4 \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} [B] &= [Q]^{-1} \sinh([Q]x) \cdot [Z] \\ &= [Z]x + \frac{1}{3!}[Z][Y][Z]x^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!}([Z][Y])^2[Z]x^5 + \dots \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} [C] &= [Z]^{-1}[Q] \sinh([Q]x) \\ &= [Y]x + \frac{1}{3!}[Y][Z][Y]x^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!}([Y][Z])^2[Y]x^5 + \dots \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} [D] &= [Z]^{-1} \cosh([Q]x) \cdot [Z] \\ &= [U_n] + \frac{1}{2!}[Y][Z]x^2 + \frac{1}{4!}([Y][Z])^2x^4 \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (10.4)$$

以上のように取り扱うと, x を系統の全長 l で置き換えれば, (10) 式より系統全体の四端子定数行列を求めることができる。また, 問題の必要性に応じては, 系統全体を長さ方向に分割して, 各分割区間について式(10)より四端子定数行列を求め, 各区間の四端子定数行列の縦続接続として系統全体を取り扱うことも可能である。それ故, (10) 式を用いると, 系統を分割して各区間を集中定数回路として取り扱う際の分割区間数の決定方法や各区間の集中定数等価回路の表現方法といった点を考慮しなくてよい点が, 本解析方法の大きな特徴となっている。

このようにして, 系統全体の四端子定数行列が求められると, 両端末 (送電端と受電端) での回路条件を適用することにより, 受電端での電位と電流の行列を求めることができる。そうすると, 四端子定数理論の基本方程式と (10) 式を用いることにより, 任意の点の電位と電流の分布を求めることができる²⁾。

3. 数 値 計 算 例

本解析方法の一適用例として, Fig. 1 のような導体配置について解析をおこなった。すなわち, 導体 1 が両端で接地されている電力ケーブルで, $I_1=1A$ の電流が流れているとき, ほぼ地表面にあって大地に対して分布接

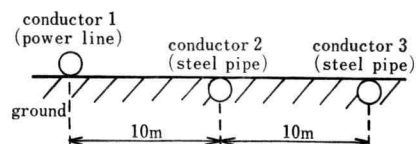


Fig. 1. Arrangement of conductors.

地状態となっている鋼管2本 (導体2と導体3) に電磁誘導作用により生じる電位と電流の分布を求めるものとする。この場合、導体相互間の相互誘導作用を考慮せねばならず、多線条系分布定数回路としての取り扱いが必要となる。なお、鋼管は、内径 80.7 mm, 肉厚 7.2 mm で配管用炭素鋼 (JIS G 3452) からなる鋼管とし、比誘磁率 $\mu_s = 300$, 導電率 10^7 (S/m), 周波数 50 Hz として内部インピーダンスを計算する⁴⁾。また、外部インピーダンスと導体間の相互インピーダンスは、大地導電率 $\sigma = 0.01$ S/m として、Carson-Pollaczek の式より算出する。それ故、導体の自己インピーダンスは、内部インピーダンスと外部インピーダンスの和として求めることができる。また、鋼管の対地漏れコンダクタンスは、 $g = 0.1$ S/km と 1 S/km とし、静電容量は無視できるものとして取り扱う。これらの条件をもとに、インピーダンス行列とアドミタンス行列を求め、全長を $l = 10$ km として (10) 式より系統全体の四端子定数行列を求め、両端末での回路条件 (導体2と導体3は開放状態) より、各導体の電位分布と電流分布とを算出する。

計算結果は、Fig. 2 と Fig. 3 の通りである。 g が大きくなると電位上昇は小さく、両端末付近を除くとほとんど零になっていることが分かる。従って、電流も $g = 1.0$ S/km では、ほとんど長方形に近い形となり、端末付近でのみ大地への漏れ電流が存在し、中間部分では漏れ電流がほとんど存在していない。それ故、しゃへい導体により多くの電流を流すためには、しゃへい導体と大地との間の漏れコンダクタンスが大きくなるように配慮する必要がある。ところで、鋼管の中に通信線が設置されているとき、この通信線に対する鋼管のしゃへい係数は、Fig. 3 の電流分布を積分することにより評価することが

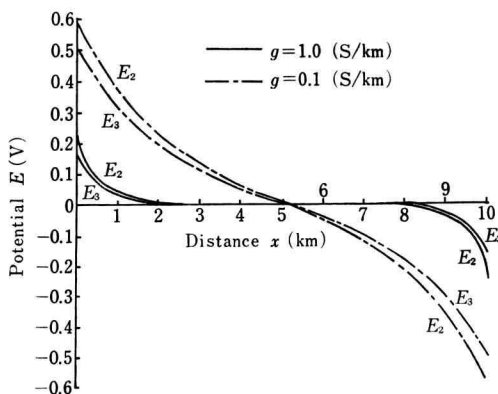


Fig. 2. Potential distribution ($I_1 = 1$ A).

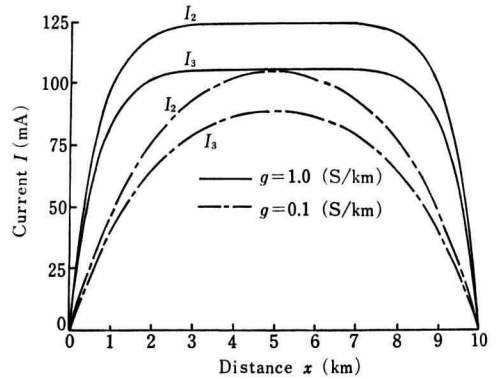


Fig. 3. Current distribution ($I_1 = 1$ A).

できる (付録3 参照)。そこで、Fig. 3 の電流分布を全長 10 km について積分した結果を示すと Table 1 の通りである。この結果より、 g が大きい方がしゃへい効果は良好で、 $g = 0.1$ S/km に比して $g = 1.0$ S/km では約 30% 近く高いしゃへい効果が得られたことになる。したがって、鋼管を地中に埋設して電磁誘導対策を実施する場合、鋼管の対地漏れコンダクタンスが非常に重要な要素となることが明らかとなっている。

Table 1 Integrated value of shielding conductor current

電流の 積分値 対地漏れ コンダクタンス	$\int_0^l I_2 dx$ (A·km)	$\int_0^l I_3 dx$ (A·km)
$g = 0.1$ (S/km)	0.753	0.639
$g = 1.0$ (S/km)	1.091	0.923

4. む す び

多線条の分布定数回路は、複雑な計算を要求されるが、本稿で述べた解析方法は、従来提案されている系統を長さ方向に分割して、集中定数回路として取り扱う方法に比して、

- (1) 分割区間数の決定方法
- (2) 各区間の集中定数回路の表現方法

といった点を考慮しなくてよい点が大きな特徴となっている。また、その表現形式は、単一導体の分布定数回路の解析に用いられている方法を行列化したものであり、

無限級数形となっているものの、電算機で計算する場合に比較的取り扱い易いものと思われる。

また、この解析方法の適用計算例より、地中に埋設した鋼管のしゃへい効果は、鋼管の対地漏れコンダクタンスに大きく依存することが明らかとなった。

終りに、本研究を進めるに当って御指導いただいた京都大学 上之園親佐名誉教授と木嶋 昭教授、上智大学 酒井 洋教授に感謝の意を表します。また、貴重な御助言をいただいた、本学 北島憲之教授に謝意を表します。さらに、本稿で示した計算例は、本学卒業生磯野達也君(第4期生、現在、明電舎)がおこなった卒業研究の一部であることを付記して謝意を表します。

文 献

- 1) 林 重憲: "Surges on Transmission Systems" 電気書院 (1955年)
- 2) 酒井・森・岸野: 「多線系への四端子回路網理論の適用による AT き電回路の解析」電気学会論文誌, 94-B 巻, p. 351~358 (昭 49-7)
- 3) 酒井・森: 「四端子回路網理論の多線系化と同軸ケーブルき電方式の回路解析」, 電気学会論文誌, 95-B 巻, p. 315~322 (昭 50-7)
- 4) 電気学会・電子通信学会, 誘導調査特別委員会報告書: 「電磁誘導に関する最新の動向と課題」, p. 78~80 (昭 54-4)

付 録

1. (7) 式の誘導

$\cosh([Q]x) \times (6.1)$ 式と $[Q]^{-1} \sinh([Q]x) \times (6.2)$ 式を求めると次の通りである。

$$\begin{aligned} \cosh([Q]x) \cdot [E_2] &= \{\cosh([Q]x)\}^2 \cdot [E_1] \\ &\quad - \cosh([Q]x) \cdot \sinh([Q]x) \cdot [Q]^{-1} [Z] [I_1] \end{aligned} \quad (付1)$$

$$\begin{aligned} [Q]^{-1} \sinh([Q]x) \cdot [Z] [I_2] &= [Q]^{-1} \sinh([Q]x) \cdot [Q] \sinh([Q]x) \cdot [E_1] \\ &\quad + [Q]^{-1} \sinh([Q]x) \cdot \cosh([Q]x) \cdot [Z] [I_1] \\ &= -\{\sinh([Q]x)\}^2 \cdot [E_1] \\ &\quad + \cosh([Q]x) \cdot \sinh([Q]x) \cdot [Q]^{-1} [Z] [I_1] \end{aligned} \quad (付2)$$

なお、(付2) 式の右边を求めるに際しては、(4) 式の関係前提としている。次に、(付1) 式+(付2) 式を求める。

$$\begin{aligned} \cosh([Q]x) \cdot [E_2] + [Q]^{-1} \sinh([Q]x) \cdot [Z] [I_2] &= [\{\cosh([Q]x)\}^2 - \{\sinh([Q]x)\}^2] \cdot [E_1] \\ &= [E_1] \end{aligned}$$

したがって、(7) 式が得られる。

2. (8) 式の誘導

$[Q] \sinh([Q]x) \times (6.1)$ 式と $\cosh([Q]x) \times (6.2)$ 式を求めると次の通りである。

$$\begin{aligned} [Q] \sinh([Q]x) \cdot [E_2] &= [Q] \sinh([Q]x) \cdot \cosh([Q]x) \cdot [E_1] \\ &\quad - [Q] \sinh([Q]x) \cdot \sinh([Q]x) \cdot [Q]^{-1} [Z] [I_1] \\ &= \cosh([Q]x) \cdot [Q] \sinh([Q]x) \cdot [E_1] \\ &\quad - \{\sinh([Q]x)\}^2 [Z] [I_1] \end{aligned} \quad (付3)$$

$$\begin{aligned} \cosh([Q]x) \cdot [Z] [I_2] &= -\cosh([Q]x) \cdot [Q] \sinh([Q]x) \cdot [E_1] \\ &\quad + \{\cosh([Q]x)\}^2 [Z] [I_1] \end{aligned} \quad (付4)$$

なお、(付3) 式の右边を求めるに際しては、(4) 式の関係前提としている。次に (付3) 式+(付4) 式を求める。

$$\begin{aligned} [Q] \sinh([Q]x) \cdot [E_2] &\quad + \cosh([Q]x) \cdot [Z] [I_2] \\ &= [-\{\sinh([Q]x)\}^2 + \{\cosh([Q]x)\}^2] [Z] [I_1] \\ &= [Z] [I_1] \end{aligned}$$

したがって、(8) 式が得られる。

3. しゃへい係数

Fig. 1 で、通信線が導体2または導体3の鋼管内に施設されていたとする。導体2及び導体3が存在しない場合に、導体2または導体3の位置に存在する通信線 c に対して導体1(電力線 p) より誘導される起電力 e_0 は、全長 l に対して、

$$e_0 = -Z_{pc} I_p l \quad (付5)$$

となる。ここで、 Z_{pc} は電力線と通信線の1km当りの大地帰路相互インピーダンスを示している。次に、導体2及び3の鋼管が存在している時に、通信線 c に誘導される起電力 e_c は、全長 l に対して、

$$e_c = -Z_{pc} I_p l + Z_{2c} \int_0^l I_2 dx + Z_{3c} \int_0^l I_3 dx \quad (付6)$$

となる。ここで、 Z_{2c} 、 Z_{3c} は通信線と導体2ないし導体3との間の1km当りの大地帰路相互インピーダンスを示している。なお、(付6) 式で鋼管を流れる電流 I_2 と I_3 の方向は、あらかじめ I_p と逆向きに流れるものと仮定している。したがって、2本の鋼管によるしゃへい係数 λ は、次式の通りである。

$$\lambda = \frac{e_c}{e_0} = 1 - \frac{Z_{2c}}{Z_{pc}} \frac{\int_0^l I_2 dx}{I_p l} - \frac{Z_{3c}}{Z_{pc}} \frac{\int_0^l I_3 dx}{I_p l} \quad (付7)$$

この(付7) 式において、右辺の第2項の $(Z_{2c}/Z_{pc}) \cdot (1/I_p l)$ と第3項の $(Z_{3c}/Z_{pc}) \cdot (1/I_p l)$ は、導体の配

置及び起誘導電流 (この場合は導体 1 の電力線に流れる電流 I_p) により決まる定数であり, シャヘイ係数は,

$\int_0^l I_2 dx$ と $\int_0^l I_3 dx$ により評価されることが明らかとなっている。