

# 送風式水平儀

沖 喜久雄・狩野芳郎

Gyro Horizon with Blower

Kikuo OKI and Yoshio KANO

## Abstract

The gyro horizon with proportional correction mechanism by air reaction is a popular gyro instrument for the aircraft.

We developed the new type horizon as the transducer of the attitude angle for the automatic navigation system of pilotless helicopter. The feature of this horizon is that the gyro rotor has blower blade for air flow to actuate the proportional correction mechanism.

In this paper we obtain the exact equation of motion of a horizon, and research its performance. As the result of this research, it can be seen this horizon has very simple correction mechanism and high performance.

And we made many useful diagrams available for designing this type of horizon.

## 1. 緒 論

水平儀 (Gyro horizon) は航空計器として永い歴史をもち、飛行機が大地を目視して飛行する揺らんの時代にすでに考案され、航空機の成長と共に、ますます有用な計器になった。特にその表示面は極めてすぐれたもので、操縦士は自機の縦ゆれ、横ゆれ運動を恰も他から自機を見る如く、一目瞭然、直観的に知ることができる。

航空機そのものは、プロペラを用いて、2, 3人が乗れるにすぎない、云わゆる飛行機と呼んだ時代から、プロペラに代ってジェット推進となり、数百人の人々を乗せることのできる高速かつ長距離輸送機として発達し、昔の面影のない位に外形は変った。しかし水平儀は空気駆動から電気駆動に変わっただけで、その表示面は色彩がほどこされ、見易く美しくなったとは云え、本質的な点、つまり表示面は旧態依然として初期の形式をとどめている。従って研究されつくされ、今更事新しく議論する処は殆どない。

しかし我々がここに取りあげたのは、無人ヘリコプターの自動操縦用姿勢角検出器として試作されたもの

で、その特徴とする処は構造簡単であると共に、機構の複雑な機械的起立装置或いは、重量の大きくなり易く、かつ信号伝送用スリップリングの多い電磁的な起立装置等を用いず、永く優れた機構としてスベリー社が特許を保有し、戦前はこの方式をこえるものがない、振子制御式空気反力起立装置を用いた事である。

現在トルクモータ等の電磁方式が多くなったのは、ジャイロ騒動が電力によるため起立装置用空気源がなくなった故である。

我々はこの空気式起立装置を採用するために空気源をジャイロそのものに求めた。つまり市販の小形直流モータにジャイロ慣性体としての回転円板を取りつけ、ジャイロ効果を持たせると共に、その中心部に翼を設けて、軸流送風機の翼板としても働き、それによって発生する圧力空気を空気反力式起立装置の空気源とした。

この場合、ジャイロ回転子の回転数と送風器の送風量とは一定の関数関係にあって、独立にえらぶことはできない。この事は水平儀のジャイロ効果を規定するジャイロ回転子の回転数と、起立装置の性能を規定する噴出空気反力による起立トルクの間に関数関係が存在することになるから、ジャイロ回転子の回転数が定

まれば、従属的に水平儀としての性能、例えば起立精度、起立時間、及び旋回時の鉛直精度等の静特性は無論、それらの過渡現象である動特性もきまってしまう、設計により取り得る性能の範囲は限られる。

我々はこの欠点を除くために、送風器の空気取り入れ口に絞り弁を設けて開口面積を加減し、ジャイロ回転子の特定な回転数に対する送風量を調節し、限られた範囲ではあるが、それらの関係を多様にするによって、恰も2個の物理量が独立変数として、自由に選択でき、高性能な水平儀を設計し得ることを企図した。

この論文では、このための基礎研究として、絞り弁の開口度による水平儀の性能に対する影響を考察した。その方法として、絞り弁開口度を絞り係数と称する“ $k$ ”なるパラメータを用いて表現し、これを媒介として、その効果を数量的に求めた。

第1図に試作された水平儀を示した。空気取り入れ口はジャイロ箱の上面に見えている。

## 2. 構造の概要

構造上の特徴はジャイロ回転部分が、軸流送風機としても動作することである。第2図に示したように、ジャイロ回転子の表面に送風用翼が4片ある。その回転子を駆動する小型モータはケース中にあり図には示されていない。ジャイロ箱の下部には空気流制御用の振子が見える。

この送風機から送り出される空気は複雑な通路を通るので、実状を確認するため煙を流して調べ、その状態を第3図に示した。この図では、ジャイロ箱を傾斜させたので一方の噴出空気が、それに対面する噴出口よりの空気流に比し、激しいことがわかる。これはジャイロ箱の傾斜による振子の差動効果を示している。

次に送風機としての性能をみるためジャイロ回転子の回転数と噴出された空気の流速について考察する。モーメント定理<sup>1)</sup>によれば、 $v$ を翼面板通過速度とすれば、これによって発生する推力  $T$  は次式にて示される。

$$T = 2m_a v$$

ただし  $m_a$  は単位時間に翼面板を通過する空気の質量  $= \rho s v$

$\rho$  = 空気密度

$s$  = 翼面板の空気通過面積

従って

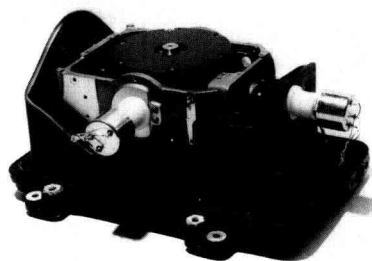


Fig. 1 The general view of horizon

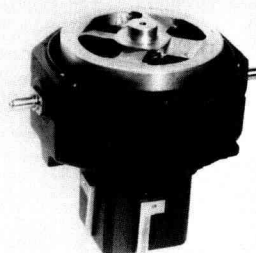


Fig. 2 Gyro rotor and its case

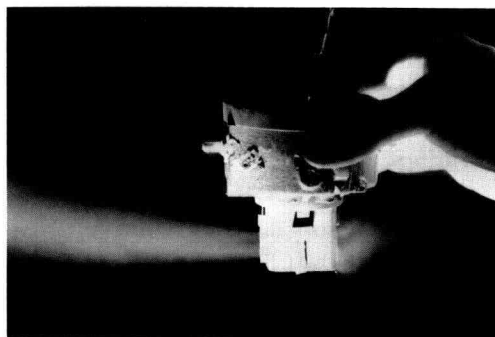


Fig. 3 The air jet from nozzle

$$T = 2\rho s v^2$$

一方、翼素理論によれば推力  $T$  は次のようにも示される。

$$T = C_T \rho s \cdot (\Omega R)^2$$

ただし

$R$ : 翼面板の半径 ( $s = \pi R^2$ )

$\Omega$ : 翼面板の角速度

$C_T$ : 推力係数

推力  $T$  に関する両式は等しいから

$$2\rho s v^2 = C_T \rho s (\Omega R)^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{C_T}{2}} R \Omega \propto n$$

$n$  は翼面板, 即ちモータの回転数。

従って空気速度はモータの回転数に正比例することが分る。実際我々の装置についてみると, ジャイロ本体であると共に送風器翼板である回転体の直径に合せてつくられた実験用風洞を第4図に示したが, この装置を用いて, その出口に熱線流速計を入れ, 流速を測定した結果を第5図に示した。

しかし起立装置として使用する場合は翼により加勢された空気は複雑な経路をへて, ジャイロ箱下部に導かれ, 噴出孔から噴出される。この部分の流速を同じように熱線流速計を用いて測定した結果を第6図に示した。この空気流は細い噴出孔より大気中に放出されるため, 実際値より小さめに測定される傾向がある。それでその正確度をしらべる必要から, 実際に水平儀を組立て, その起立時間を測定して確認した。起立時間は空気流噴出速度の自乗に比例するからである。

又これをモータに供給する電力の側からも考察した。簡単に考えて, 起立装置噴出孔より空気が噴出されるために, ジャイロモータに余分の電力消費が起ると考える。そこで次の実験を行なった。

ジャイロ回転子を毎分 15,000 回転に定め, この時の噴出流のもつエネルギーを計算すると次のようになる。

$$E = \frac{1}{2} m_a v^2 = \frac{1}{2} \rho S v \cdot v^2$$

ただし

$E$ : エネルギー

$\rho$ : 空気密度 ( $1.2 \times 10^{-3} \text{ gr/cm}^3$ )

$m_a$ : 単位時間に流れる空気量 ( $\text{gr/sec}$ )

$S$ : 噴出孔面積

$v$ : 噴出速度

第6図よりこの時の噴出速度を 1,750 cm/sec と推定すると, このエネルギーは 0.32 ワットである。

これに対し, 実際ジャイロ回転子を毎分 15,000 回転に保ち, 空気取り入れ口の全開時と全閉時との消費電力を測定した結果, 次の値を得た。

全開時 6.68 ワット

全閉時 6.30 ワット

この差 0.38 ワットは前記の計算値に近いことは, 第

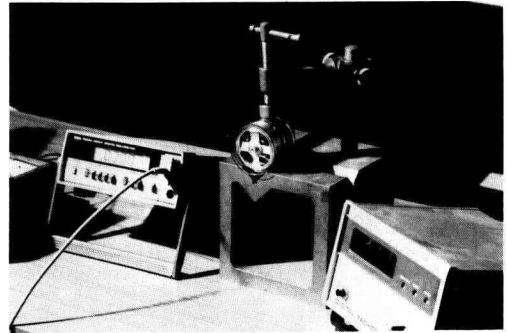


Fig. 4 Experimental apparatus

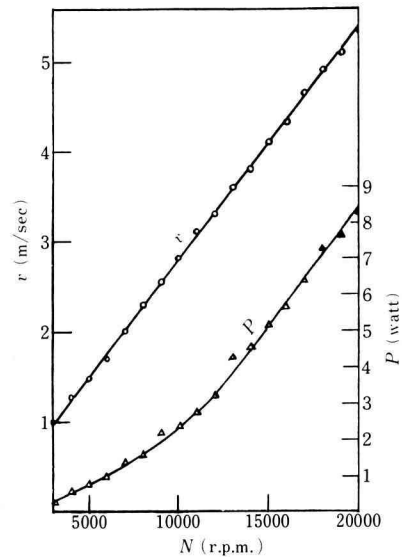


Fig. 5 Blowers output velocity and input power to rotor rotation

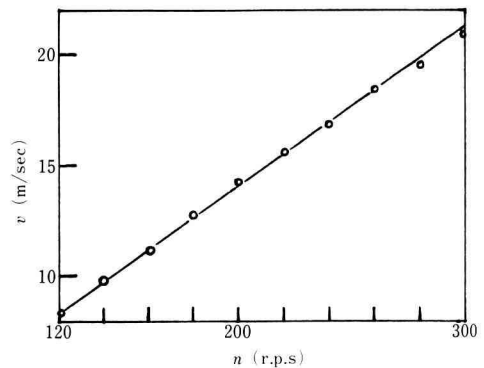


Fig. 6 Air jet velocity from nozzle to rotor rotation

6図の測定結果が必ずしも誤りでないことを示していると思われる。そこで第6図より、流速 $v$ とジャイロ回転子の毎秒当りの回転数 $n$ は次の関係式で結ばれているとし、今後の計算にはこの式を用いる。

$$v_0 = 7n \text{ cm/sec} \dots\dots\dots(1)$$

この水平儀には空気取り入れ口の面積を絞りを弁によって加減し、噴出速度を調節している。この噴出速度の変化をパラメータ $k$ を用いて示せば、噴出速度 $v$ は次式にて近似されるとする。

$$v = 7kn \dots\dots\dots(2)$$

従って、(1)式に示された $v_0$ は全開として

$$k=1$$

であり、これに対して全開は $k$ の値が0であるとし、又 $k$ は取り入れ口面積と一次比例関係にあるとした。

次にジンバル、ジャイロ箱間及びジンバル、架台間の角変位検出子として、機械的摩擦の減少をはかるため無接触のホール素子式ポテンシヨを用いた。しかしこれは市販のままでは回転軸を保持するための軸受に於ける摩擦トルクが大きいのでこれを除く必要があった。そこでポテンシヨから回転子を分離し、これを測定されるべき回転体、例えばジンバルの回転軸に直結し、このポテンシヨ軸受を除いた。従ってこの部分の摩擦トルクはマグネットとホール素子間の電磁的なもののみで、実測できなかったが、0.01 grf・cm以下であると思われる。

摩擦トルクの発生源として無視できないのは電力供給用及び信号伝送用リード線等によるもので、これはスリッピング方式を用いた。特にリングであるとその部分の半径が長い程摩擦トルクは増大するので、軸の中央点に電気接点を設け、これに対応する板スプリング片を接触させる方式をとった。ただしこの場合は並列多重にする必要がある。

最も大きい摩擦トルクはジャイロ箱を支えるジンバルの軸受、及びジンバルと架台間の軸受である。

我々の場合これらの総合した摩擦トルクは0.6 grf・cmであった。

空気反力による起立装置は空気噴出口を自由振子の傾斜による遮へいの増減によって起立トルクを傾斜角に比例して発生させることは今更説明するまでもない。

そのトルクは振子の位置、噴出孔の面積等構造により定まり、又噴出する空気流の速度の自乗に比例する。従って次のように示される。

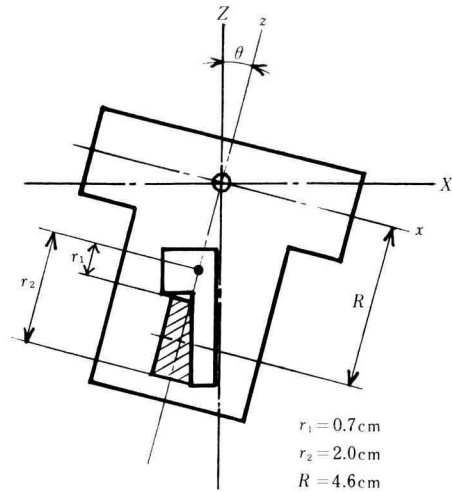


Fig. 7 The model of proportional correction mechanism

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \text{常数} \times v^2 \text{ (dyne} \cdot \text{cm/rad.)}$$

ただし  $\theta$ : 振子の傾斜角度

$M$ : 起立用トルク

$v$ : 噴流の速度

常数は次式により求まる。

$$\text{常数} = \rho(r_2^2 - r_1^2) \cdot R$$

ここで $\rho$ は空気密度、 $r_1$ 及び $r_2$ は第7図に示すように起立制御振子の支点から噴出孔の上端及び下端までの距離、 $R$ はジャイロ支点から噴出孔の中央点までの距離。これらは図示したように次の値をもっている。

$$r_1 = 0.7 \text{ cm}$$

$$r_2 = 2.0 \text{ cm}$$

$$R = 4.6 \text{ cm}$$

$$\rho = 1.2 \times 10^{-3} \text{ gr/cm}^3$$

これより

$$\text{常数} = 0.019 \approx 0.02$$

従って起立トルク $M$ は次式により示せる。

$$M = 0.02 v^2 \theta$$

流速 $v$ に(2)式を用いれば

$$M = 0.98 k^2 n^2 \theta \approx k^2 n^2 \theta \text{ dyne} \cdot \text{cm} \dots\dots\dots(3)$$

起立トルク $M$ の振子の傾斜角 $\theta$ に対する比例限界は8度(角度)で、それ以上は飽和し、一定値となる。

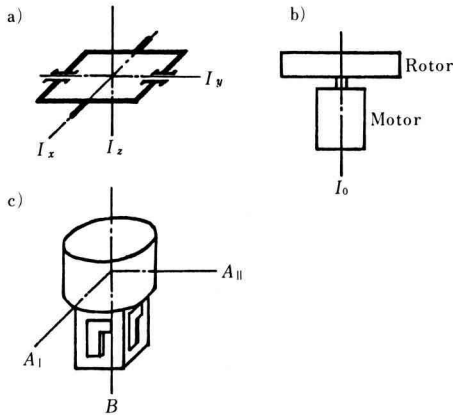


Fig. 8 The moment of inertia of elements

### 3. 運動方程式<sup>2),3)</sup>

ここでは水平儀の運動に対する地球の形状及びその回転の影響は無視して考察する。第8図に水平儀の各部に対する慣性能率を図示して定義した。

$I_x, I_y, I_z$ : ジンバル環の3軸まわりの慣性能率。

$I_0$ : ジャイロの慣性回転子及び駆動用モータの回転子を含む。尚ジャイロ回転子は真鍮製である。

$A, B$ : ジャイロモータ及び回転子を含む、ジャイロ箱全体の慣性能率で、水平軸まわりの慣性能率  $A_I, A_{II}$  は厳密に言えば異なるが、その差は小さいので  $A = A_I = A_{II}$  とした。これらの慣性能率の実測値は次の通りである。いずれも単位は  $\text{gr} \cdot \text{cm}^2$ 。

$$A = 2200$$

$$B = 2360$$

$$I_0 = 760$$

$$I_x = 2700$$

$$I_y = 1800$$

$$I_z = 4300$$

運動方程式を議論する座標系として、ジャイロ箱に固定したものを採用した。それは第9図に示したように、ジャイロ箱がジンバルに支持される軸方向を  $y$  軸、ジャイロ箱中のジャイロ回転子の回転軸を  $z$  軸とし、これらに直交して右手系になるように  $x$  軸をとり、その原点はジャイロ箱がジンバル及び架台によって支持される支点にした。この時ジャイロ箱内部の回転系を含めた全体の重心もこの支点に一致しているとす。ただし起立用振子の角変位により極めて僅か、ず

れることはあり得る。

このジャイロ箱に固定された座標系  $x, y, z$  に対し、 $X, Y, Z$  座標系は慣性空間に固定した座標系で、仮りに航空機が水平直線飛行をしているとすれば、 $X$  軸はその進行方向にあって、進行方向を負としている。 $Z$  軸は鉛直方向、 $Y$  軸はこれらに対して右手系になるよう定める。

図示するように、我々の水平儀はジンバルを架台に支持する軸受方向を  $X$  軸と一にさせた。従って航空機の横ゆれ運動は  $X$  軸まわり、縦ゆれ運動は  $Y$  軸まわりにおこるが、実際に水平儀によって示されるそれらの姿勢角は横ゆれ角に対しては正しいが、縦ゆれ角として表示される角は水平儀の  $y$  軸まわりの角であるから、航空機が横ゆれ運動をしている時、それは正しい意味で縦ゆれ角ではない。従って横ゆれ角による補正をしなくてはならぬが、実用上支障がないので普通そのような配慮はしていない。

今運動は水平儀の架台軸、即ち  $X$  軸まわりに横ゆれ角  $\varphi$ 、水平儀の  $y$  軸まわりに角  $\theta$ 、又旋回中にあらわれる角として鉛直軸まわりに  $\psi$  なる角運動があるとする。

このように定義すれば、 $x, y, z$  座標系の各軸に対する角速度  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  は次のように示される。

$$\omega_x = \dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\psi} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \sin \theta$$

$$\omega_y = \dot{\theta} + \dot{\psi} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \sin \varphi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} \sin \theta + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi$$

ここで鉛直軸まわりの角速度の配分は次のように求めた。 $z$  成分  $\omega_z$  を  $\dot{\psi} \cos \theta \cdot \cos \varphi$  とし、係数  $C$  を用いて  $x$  成分及び  $y$  成分を  $C\dot{\psi} \sin \theta$ 、 $C\dot{\psi} \sin \varphi$  と仮

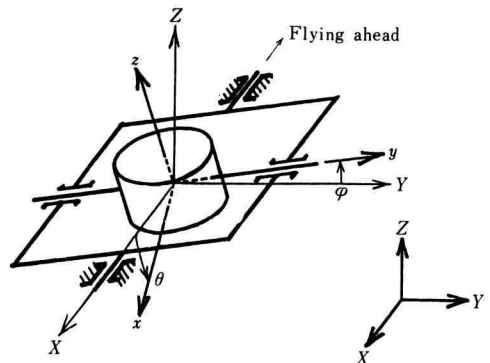


Fig. 9 Coordinate axis system

定すれば次式により  $C$  は定まる。

$$(\cos \theta \cos \varphi)^2 + C^2 (\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi) = 1$$

$$\therefore C = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}}$$

次に運動を考察する座標系  $x, y, z$  に対する慣性性能率を各軸にそって  $J_x, J_y, J_z$  とすれば、

$$J_x = A + I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta$$

$$J_y = A$$

$$J_z = B + I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta$$

従って運動方程式は整理して次のように求まる。ただし  $T_x, T_y, T_z$  はこの系の各軸まわりに働く外部トルクであり、 $\omega_0$  はジャイロ回転子の回転角速度、従って

$$\omega_0 = 2\pi n \quad n: \text{毎秒回転数 r.p.s.}$$

$x$  軸:

$$\begin{aligned} T_x = & \dot{\theta}(I_z - I_x) \sin 2\theta \left( \dot{\varphi} \cos \theta - \ddot{\psi} \sin \theta \right. \\ & \times \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \\ & + (A + I_x \cos^2 \theta + I_z \sin^2 \theta) \\ & \times \left\{ \dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta - (\ddot{\psi} \sin \theta + \ddot{\psi} \dot{\varphi} \cos \theta) \right. \\ & \times \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \\ & + \frac{\ddot{\psi} \sin \theta (\dot{\theta} \sin 2\theta \sin^4 \varphi + \dot{\varphi} \sin 2\varphi \sin^4 \theta)}{2\sqrt{(1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi)(\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi)^3}} \Big\} \\ & + I_0 \omega_0 \left( \dot{\theta} + \ddot{\psi} \sin \varphi \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \right. \\ & + \left( \dot{\theta} + \ddot{\psi} \sin \varphi \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \right) \\ & \times (\dot{\varphi} \sin \theta + \ddot{\psi} \cos \theta \cos \varphi) \\ & \times (B - A + I_x \sin^2 \theta + I_z \cos^2 \theta) \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$y$  軸:

$$\begin{aligned} T_y = & A \left\{ \ddot{\theta} + (\ddot{\psi} \sin \varphi + \ddot{\psi} \dot{\varphi} \cos \varphi) \right. \\ & \times \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \\ & - \frac{\ddot{\psi} \sin \varphi (\dot{\theta} \sin 2\theta \sin^4 \varphi + \dot{\varphi} \sin 2\varphi \sin^4 \theta)}{2\sqrt{(1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi)(\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi)^3}} \Big\} \\ & - I_0 \omega_0 \left( \dot{\varphi} \cos \theta - \ddot{\psi} \sin \theta \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \right. \\ & + \left( \dot{\varphi} \cos \theta - \ddot{\psi} \sin \theta \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \right) \\ & \times (\dot{\varphi} \sin \theta + \ddot{\psi} \cos \theta \cos \varphi) \\ & \times \{ A - B + (I_x - I_z) \cos^2 \theta + (I_z - I_x) \sin^2 \theta \} \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots (5)$$

$z$  軸:

$$\begin{aligned} T_z = & \dot{\theta}(I_x - I_z) \sin 2\theta (\dot{\varphi} \sin \theta + \ddot{\psi} \cos \theta \cos \varphi) \\ & + (B + I_x \sin^2 \theta + I_z \cos^2 \theta) \\ & \times (\dot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta + \ddot{\psi} \cos \theta \cos \varphi \\ & - \ddot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - \ddot{\psi} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi) \\ & - \left( \dot{\varphi} \cos \theta - \ddot{\psi} \sin \theta \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \right) \\ & \times \left( \dot{\theta} + \ddot{\psi} \sin \varphi \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}} \right) \\ & \times (I_x \cos^2 \theta + I_z \sin^2 \theta) \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

外部トルク  $T_x, T_y, T_z$  は起立装置により発生するトルク  $M_x, M_y$  ジンバル、ジャイロ箱及び架台間の摩擦反力によるトルク  $F_x, F_y$ 、支点と重心との不一致により発生する重力によるトルク  $f_x, f_y$  等の総合和と考えられる。

起立トルク  $M_x, M_y$  は、(3) 式で示され、 $x$  軸  $y$  軸共に同一トルクと見なす。

$$\begin{aligned} M_x &= -k^2 n^2 \theta & \text{dyne} \cdot \text{cm} \\ M_y &= k^2 n^2 \varphi & \text{dyne} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

ただし

$$k = 0 \sim 1 \quad \text{絞り係数}$$

$$n = \text{ジャイロ回転子の回転数 r.p.s.}$$

又、摩擦トルク  $F_x, F_y$  は次のようにおける。

$$F_x = -T_\varphi \text{sign}(\dot{\varphi})$$

ここで、

$$\dot{\varphi} > 0 \text{ ならば } F_x = -T_\varphi$$

$$\dot{\varphi} = 0 \text{ ならば } F_x = 0$$

$$\dot{\varphi} < 0 \text{ ならば } F_x = T_\varphi$$

同様に、

$$F_y = -T_\theta \text{sign}(\dot{\theta})$$

$$\dot{\theta} > 0 \text{ ならば } F_y = -T_\theta$$

$$\dot{\theta} = 0 \text{ ならば } F_y = 0$$

$$\dot{\theta} < 0 \text{ ならば } F_y = T_\theta$$

この  $T_\theta, T_\varphi$  の実測値は  $0.6 \text{ grf} \cdot \text{cm}$  であった。

従って

$$T_\theta = T_\varphi = 0.6 \times 980 \doteq 590 \text{ dyne} \cdot \text{cm}$$

支点と重心点との不一致にもとづく重力によるトルク  $f_x, f_y$  は各  $\sin \varphi, \sin \theta$  に比例するとし、比例常数を  $\varepsilon$  とすれば、

$$f_x = m g \varepsilon \sin \varphi \doteq m g \varepsilon \varphi$$

$$f_y = m g \varepsilon \sin \theta \doteq m g \varepsilon \theta$$

実際問題として、 $f_x, f_y$  は極めて小さく、かつ機械的摩擦トルクと区別できないので、前述の測定値  $0.6 \text{ grf}$

・cmはこの両者を含む値と考えられる。

このような考察により、外部トルク  $T_x$ ,  $T_y$  は同一形式とし、次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} T_x &= -k^2 n^2 \theta - T_\phi \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \\ T_y &= k^2 n^2 \phi - T_\theta \operatorname{sign}(\dot{\theta}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

運動方程式を簡易化するため、航空機の運動により、次の2種の場合にわけて考える。

#### 4. 航空機が直線運動している場合

この時は運動方程式 (4), (5), (6) 中で次のようにおいて簡化する。

$$\ddot{\psi} = 0, \quad \ddot{\psi} = 0$$

従って、 $x$  軸については

$$\begin{aligned} T_x &= \dot{\theta} \phi (I_z - I_x) \sin 2\theta \cos \theta + (A + I_x \cos^2 \theta \\ &\quad + I_z \sin^2 \theta) \times (\dot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \sin \theta) \\ &\quad + I_0 \omega_0 \dot{\theta} + \dot{\theta} \phi \sin \theta (B - A + I_x \sin^2 \theta \\ &\quad + I_z \cos^2 \theta) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$y$  軸:

$$\begin{aligned} T_y &= A \ddot{\theta} - I_0 \omega_0 \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta \\ &\quad \times \{A - B + (I_x - I_z) \cos^2 \theta + (I_z - I_x) \sin^2 \theta\} \\ &\quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$z$  軸:

$$\begin{aligned} T_z &= \dot{\theta} \phi (I_x - I_z) \sin 2\theta \sin \theta + (B + I_x \sin^2 \theta \\ &\quad + I_z \cos^2 \theta) (\dot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \cos \theta) - \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \\ &\quad \times (I_x \cos^2 \theta + I_z \sin^2 \theta) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

実際問題として、 $\dot{\phi}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  は微小でそれらの相乗積は省略可能であり、三角関数  $\sin \theta = \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$  等と置くことができるので、上式は更に簡化される。

$z$  軸まわりについては微小項なので無視するが、トルク  $T_z$  は  $x$  軸,  $y$  軸まわりの運動により、ジンバル一架台間の軸と軸受相互に及ぼすトルクである。従って、(8)式, (9)式は次のようになる。

$x$  軸:

$$(A + I_x) \ddot{\phi} + I_0 \omega_0 \dot{\theta} = T_x$$

$y$  軸:

$$A \ddot{\theta} - I_0 \omega_0 \dot{\phi} = T_y$$

外部トルク  $T_x$ ,  $T_y$  に (7) 式を用いて、

$$(A + I_x) \ddot{\phi} + I_0 \omega_0 \dot{\theta} = -k^2 n^2 \theta - T_\phi \operatorname{sign}(\dot{\phi})$$

$$A \ddot{\theta} - I_0 \omega_0 \dot{\phi} = k^2 n^2 \phi - T_\theta \operatorname{sign}(\dot{\theta})$$

ジャイロ回転子の回転数  $n$  は普通 200 r.p.s. 以上であり、 $\dot{\phi}$ ,  $\ddot{\theta}$  もそれ程大きくなく、又、係数の絶対値は

$$A + I_x \ll I_0 \omega_0$$

$$A \ll I_0 \omega_0$$

としてこの項を省略すると、

$x$  軸:

$$I_0 \omega_0 \dot{\theta} = -k^2 n^2 \theta - T_\phi \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dots\dots\dots (11)$$

$y$  軸:

$$-I_0 \omega_0 \dot{\phi} = k^2 n^2 \phi - T_\theta \operatorname{sign}(\dot{\theta}) \dots\dots\dots (12)$$

かりに、

$$\dot{\phi} > 0$$

として、この条件のもとに (11) 式をとり

$$\theta = \frac{T_\phi}{k^2 n^2} (1 - e^{-\frac{k^2 n}{2\pi I_0} t}) \dots\dots\dots (13)$$

ただし初期条件として

$$t=0 \text{ に於て } \theta=0$$

かつ

$$\omega_0 = 2\pi n$$

同ように (12) 式もとくことができる。

つまり、 $x$  軸まわりにジャイロ箱が負の方向に回転すれば、ジンバル軸  $X-X$  まわりの機械摩擦トルクにより、(13) 式に示すような回転運動を誘発され、次式の取れん値  $\theta_f$  をとる。

$$\theta_f = \frac{T_\phi}{k^2 n^2}$$

(13) 式より  $\theta_f$  の 63% に達する時間  $t_f$  は次式より求まる。

$$\frac{k^2 n}{2\pi I_0} t_f = 1$$

$$\therefore t_f = \frac{2\pi I_0}{k^2 n}$$

これをこの場合の時定数と称し絞り係数  $k$  をパラメータとして第 10 図に示した。図から明らかなように

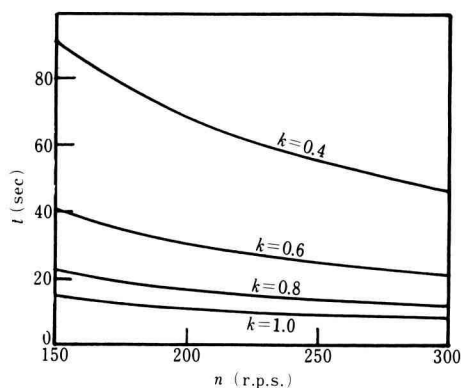


Fig. 10 The correct time constant at  $\frac{\theta}{\theta_f} = 0.63$

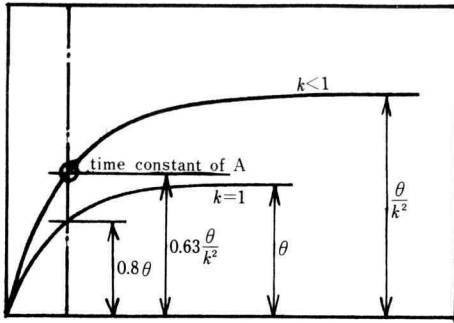


Fig. 11 The time process of motion

$k$  が小さい程時定数は小さくなるが同時に収れん値も  $k^{-2}$  倍になる。 $k=1$  と  $k<1$  なる場合との時間経過を第 11 図に示した。 $k<1$  の時、収れん値の 63% に達した時  $k=1$  ではその収れん値の 80% 近くに達していることがわかる。

実例：

$$T_{\varphi} = 590 \text{ dyne} \cdot \text{cm} (0.6 \text{ grf} \cdot \text{cm})$$

$$n = 250 \text{ r.p.s. とする。}$$

Case 1  $k=1$  とした場合

$$\text{収れん値} = 0.54 \text{ 度}$$

$$63\% \text{ に至る時間} = 19 \text{ 秒}$$

Case 2  $k=0.8$  とした場合

$$\text{収れん値} = 0.84 \text{ 度}$$

$$63\% \text{ に至る時間} = 30 \text{ 秒}$$

このように見ると絞り係数  $k$  が 1 より小さいとジャイロの性能が劣化するように思えるが、後述するように旋回誤差に対してはこの時定数が大きいことは極めて有利なことが理解される。

ここに述べた収れん値は機械摩擦が起立トルクと釣り合って発生するもので、これは角度 0 点付近の不感帯を示すものである。これを今後中央不感角度と称しよう。

今、起立時間を初期値  $\theta_0$  より中央不感角度  $\theta_f$  まで起き上がるに要する時間  $t_0$  として定義すると式 (11) に於て

$$T_{\varphi} = 0$$

と置いて計算する。つまり

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{k^2 n^2}{I_0 \omega_0} \theta$$

$$\therefore t_0 = -\frac{I_0 \omega_0}{k^2 n^2} \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\theta} = \frac{I_0 \omega_0}{k^2 n^2} \ln \frac{\theta_0}{\theta_f}$$

$$= \frac{2\pi I_0}{k^2 n} \ln \frac{\theta_0}{\theta_f} \quad \because \omega_0 = 2\pi n$$

$$\theta_f = \frac{T_{\varphi}}{k^2 n^2} \text{ を代入して}$$

$$t_0 = \frac{2\pi I_0}{k^2 n} \ln \frac{\theta_0 k^2 n^2}{T_{\varphi}}$$

この  $t_0$  は回転数  $n$  が次の値の時極値（最大）をとる。

$$\ln \frac{\theta_0 k^2 n^2}{T_{\varphi}} = 2$$

$$\therefore n = \frac{e}{k} \sqrt{\frac{T_{\varphi}}{\theta_0}} \quad \text{ただし } e = 2.72$$

従ってこの時の最大起立時間  $t_{\max}$  は次の式で示される

$$t_{\max} = \frac{4\pi I_0}{ke} \sqrt{\frac{\theta_0}{T_{\varphi}}}$$

実例： $\varphi_0 = 20^\circ$

$$T_{\varphi} = 590 \text{ dyne} \cdot \text{cm} (0.6 \text{ grf} \cdot \text{cm}) \text{ とすると}$$

$$n = \frac{112}{k}$$

$$t_{\max} = 107 \text{ sec}$$

## 5. 航空機が定常旋回運動をしている場合

定常旋回角度  $\dot{\psi}$  を次のようにおく

$$\dot{\psi} = \Omega_0, \quad \ddot{\psi} = 0$$

又  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$ , は小さい値で相乗積以上の項は省略できるものとすれば運動方程式 (4) 式及び (5) 式より次の運動方程式を得る。

$x$  軸；

$$(A + I_x) \ddot{\varphi} + \Omega_0 \{I_0 \omega_0 + \Omega_0 (B - A + I_z)\} \varphi + \{I_0 \omega_0 + \Omega_0 (B - A - 2A + I_z - I_x)\} \dot{\theta} = T_x$$

$y$  軸；

$$A \ddot{\theta} + \Omega_0 \{I_0 \omega_0 + \Omega_0 (B - A - I_x + I_z)\} \theta - \{I_0 \omega_0 + \Omega_0 (B - 2A + I_z - I_x)\} \dot{\varphi} = T_y$$

$z$  軸まわりの式では各項が自乗項以下の微小量であるので取りあげない。

外部トルク  $T_x$ ,  $T_y$  は (7) 式を用いる。ただし  $T_y$  の振子の傾角は遠心力により  $\alpha$  だけ傾くので  $(\varphi - \alpha)$  とする。ここに  $\alpha$  は、航空機が定常的な釣り合い旋回をしている時のバンク角で次式で示される。

$$\tan \alpha = \frac{R \dot{\psi}^2}{g}$$

ただし  $R$  = 旋回半径,  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ , 普通この値は小さいとして



$$\alpha \doteq \frac{R\dot{\psi}^2}{g}$$

従って  $T_x$ ,  $T_y$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} T_x &= -k^2 n^2 \theta - T_\phi \text{sign}(\dot{\phi}) \\ T_y &= k^2 n^2 (\varphi - \alpha) - T_\theta \text{sign}(\dot{\theta}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7')$$

これらの式で旋回角速度  $\Omega_0$  は小さいから  $\Omega_0^2 \doteq 0$  において

$$\begin{aligned} (A + I_x)\ddot{\phi} + I_0\omega_0\Omega_0\dot{\phi} + I_0\omega_0\dot{\theta} \\ = -k^2 n^2 \theta - T_\phi \text{sign}(\dot{\phi}) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\ddot{\theta} + I_0\omega_0\Omega_0\dot{\theta} - I_0\omega_0\dot{\phi} \\ = k^2 n^2 (\varphi - \alpha) - T_\theta \text{sign}(\dot{\theta}) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

この特性方程式  $\Delta$  :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} (A + I_x)s^2 + I_0\omega_0\Omega_0 & I_0\omega_0s + k^2 n^2 \\ -I_0\omega_0s - k^2 n^2 & As^2 + I_0\omega_0\Omega_0 \end{vmatrix} \\ &= (As^2 + \Omega_0 I_0\omega_0)\{(A + I_x)s^2 + \Omega_0 I_0\omega_0\} \\ &\quad + (I_0\omega_0s + k^2 n^2)^2 \\ &= A(A + I_x)s^4 + I_0^2\omega_0^2 \left(1 + \frac{\Omega_0(2A + I_x)}{I_0\omega_0}\right)s^2 \\ &\quad + 2I_0\omega_0k^2 n^2 s + k^4 n^4 + \Omega_0^2 I_0^2\omega_0^2 \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ただし  $\omega_0 = 2\pi n$

(16) 式は  $s^4$ ,  $s^2$  項より出る絶対値の大きい根と  $s^2$ ,  $s$  及び常数項より出る絶対値の小さい根に分けられる。

1) 絶対値の小さい根  $S_1$

$$\begin{aligned} I_0^2\omega_0^2 \left(1 + \frac{\Omega_0(2A + I_x)}{I_0\omega_0}\right)s^2 + 2I_0\omega_0k^2 n^2 s \\ + k^4 n^4 + \Omega_0^2 I_0^2\omega_0^2 = 0 \\ \therefore S_1 = -\frac{k^2 n^2}{I_0\omega_0} \pm i\Omega_0 \quad \text{ただし } i = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

2) 絶対値の大きい根  $S_2$

$$\begin{aligned} A(A + I_x)s^4 + I_0^2\omega_0^2 \left(1 + \frac{\Omega_0(2A + I_x)}{I_0\omega_0}\right)s^2 = 0 \\ \therefore S_2 = \pm iI_0\omega_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{\Omega_0(2A + I_x)}{I_0\omega_0}}{A(A + I_x)}} \\ \doteq \pm i \frac{I_0\omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}} \end{aligned}$$

実際に次の値を入れて  $S_1$ ,  $S_2$  根を求める。

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\pi n = 400\pi, \quad \Omega = \frac{\pi}{180} (1^\circ/\text{sec}) \\ k &= 0.8, \quad I_0 = 760, \quad A = 2200, \quad I_x = 2700 \\ \therefore S_1 &= -0.027 \pm 0.0175i \\ S_2 &= \pm 290i \end{aligned}$$

計算機による正確な根は次のような値である。

$$\begin{aligned} S_1 &= -0.02716 \pm 0.0177i \\ S_2 &= 0.027 \pm 298i \end{aligned}$$

即ち、我々の推論は正しいと云える。ただし絶対値の

大きい根  $S_2$  は  $\frac{d\theta}{dt}$  又は  $\frac{d\varphi}{dt}$  に関する根であり計算機によるこれに対する根は  $\theta$  或いは  $\varphi$  についての根であるから実数部をもっている。

上の根を参考にして運動方程式を解く。 $T_\theta$ ,  $T_\phi$  は省略すると

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0 I_0\omega_0\dot{\phi} + I_0\omega_0\dot{\theta} + k^2 n^2 \theta = 0 \\ I_0\omega_0\dot{\phi} + k^2 n^2 \varphi - \Omega_0 I_0\omega_0 \theta = k^2 n^2 \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

これを解いて

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_s e^{-\frac{k^2 n^2}{I_0\omega_0} t} \sin(\Omega_0 t + \gamma) - \frac{k^2 n^2 \Omega_0 I_0\omega_0}{\Omega_0^2 I_0^2\omega_0^2 + k^4 n^4} \alpha \\ &\dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_s e^{-\frac{k^2 n^2}{I_0\omega_0} t} \sin(\Omega_0 t + \delta) + \frac{k^4 n^4}{\Omega_0^2 I_0^2\omega_0^2 + k^4 n^4} \alpha \\ &\dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ただし  $\theta_s$ ,  $\varphi_s$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  は積分常数

又絶対値の大きい根に対応する微分方程式は近似的に次のようにおける

$$\begin{aligned} (A + I_x)\ddot{\phi} + I_0\omega_0\dot{\theta} = 0 \\ A\ddot{\theta} - I_0\omega_0\dot{\phi} = 0 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \dot{\theta}_e \sin\left(\frac{I_0\omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}} t + \sigma\right) \\ \therefore \theta_2 &= \frac{\dot{\theta}_e \sqrt{A(A + I_x)}}{I_0\omega_0} \cos\left(\frac{I_0\omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}} t + \sigma\right) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \dot{\varphi}_e \sin\left(\frac{I_0\omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}} t + \eta\right) \\ \therefore \varphi_2 &= \frac{\dot{\varphi}_e \sqrt{A(A + I_x)}}{I_0\omega_0} \cos\left(\frac{I_0\omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}} t + \eta\right) \end{aligned}$$

ただし  $\dot{\theta}_e$ ,  $\dot{\varphi}_e$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$  は積分常数

本来の解  $\theta$ ,  $\varphi$  はこの両者の和である。つまり

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1 + \theta_2 \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned}$$

しかし我々の場合

$$\frac{\sqrt{A(A + I_x)}}{I_0\omega_0} \doteq \frac{1}{298} = 0.0034$$

なる故、 $\theta_2 \doteq 0$ ,  $\varphi_2 \doteq 0$  と見なして支障はない。従って  $\theta$  及び  $\varphi$  は  $\theta_1$ ,  $\varphi_1$  のみ含まれるとして、

$$\theta = \theta_1, \quad \varphi = \varphi_1$$

(18) 式, (19) 式の初期条件を次のようにおき、積分常数をきめる。

$$\theta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = 0$$

従って

$$\theta = \frac{k^2 n^2 \alpha}{\sqrt{\Omega_0^2 I_0^2\omega_0^2 + k^4 n^4}} e^{-\frac{k^2 n^2}{I_0\omega_0} t} \sin(\Omega_0 t + \gamma)$$

$$-\frac{k^2 n^2 Q_0 I_0 \omega_0}{Q_0^2 I_0^2 \omega_0^2 + k^4 n^4} \alpha \dots\dots\dots (21)$$

$$\varphi = \frac{k^4 n^4 \alpha}{Q_0^2 I_0^2 \omega_0^2 \sqrt{1 + \frac{k^4 n^4}{Q_0^2 I_0^2 \omega_0^2}}} e^{-\frac{k^2 n^2}{I_0 \omega_0} t} \sin(Q_0 t + \delta) \\ + \frac{k^4 n^4}{Q_0^2 I_0^2 \omega_0^2 \left(1 + \frac{k^4 n^4}{Q_0^2 I_0^2 \omega_0^2}\right)} \alpha \dots\dots\dots (22)$$

ただし

$$\tan \gamma = \frac{Q_0 I_0 \omega_0}{k^2 n^2}$$

$$\tan \delta = \frac{I_0 \omega_0}{k^2 n^2} Q_0$$

これより  $\theta$  及び  $\varphi$  は結局次の収れん値に至る。

$$\frac{k^2 n^2 I_0 \omega_0 Q_0}{Q_0^2 I_0^2 \omega_0^2 + k^4 n^4} \alpha$$

及び

$$\frac{k^4 n^4}{Q_0^2 I_0^2 \omega_0^2 + k^4 n^4} \alpha$$

このうち  $\theta$  の収れん値は次の  $k$  の値に対し極値となる、つまり

$$k=0 \quad \text{収れん値}=0 \dots\dots\dots \text{極小値}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\pi Q_0 I_0}{n}} \quad \text{収れん値} = \frac{1}{2} \alpha \dots \text{極大値}$$

これに対する  $\varphi$  の収れん値は次の通り

$$k=0 \quad \text{収れん値}=0$$

$$k = \sqrt{\frac{2\pi Q_0 I_0}{n}} \quad \text{収れん値} = \frac{1}{2} \alpha$$

ただしこの収れん値は極値ではない。

(20) 式, (21) 式より  $\theta, \varphi$  は時定数  $\frac{k^2 n^2}{I_0 \omega_0}$  によってゆ

くりと収れん値に近づき、その過程は旋回角速度と同じ角速度にて動揺する。又極大値

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha$$

及び

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha$$

をとる時の絞り係数  $k$  について実例をあげると

$$n=200, \quad Q_0 = \frac{\pi}{180} (=1^\circ/\text{sec}), \quad I_0 = 760 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$$

の場合

$$k=0.65$$

旋回誤差は絞り係数  $k$  によって静的特性としては収れん値を、動的特性としては振動項の減衰時定数値を適当に選ぶことができる。

$k=0$ , つまり全く起立装置を用いない場合では次の

運動方程式による。(14) 式, (15) 式に於て  $k=0$  とおけば

$$(A + I_x) \ddot{\varphi} + I_0 \omega_0 Q_0 \dot{\varphi} + I_0 \omega_0 \dot{\theta} = -T_\varphi \text{sign}(\dot{\varphi})$$

$$A \ddot{\theta} + I_0 \omega_0 Q_0 \dot{\theta} - I_0 \omega_0 \dot{\varphi} = -T_\theta \text{sign}(\dot{\theta})$$

この特性方程式  $\Delta$  は

$$\Delta = \begin{vmatrix} (A + I_x) s^2 + I_0 \omega_0 Q_0 & I_0 \omega_0 s \\ -I_0 \omega_0 s & A s^2 + I_0 \omega_0 Q_0 \end{vmatrix}$$

これより根  $S$  は次の値をとる。

$$S = \pm i I_0 \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{Q_0(2A + I_x)}{I_0 \omega_0}}{A(A + I_x)}}$$

$$\doteq i \frac{I_0 \omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = a' \sin\left(\frac{I_0 \omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}} t + \gamma_\theta\right)$$

$$-\frac{T_\varphi \text{sign}(\dot{\varphi})}{I_0 \omega_0}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = b' \sin\left(\frac{I_0 \omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}} t + \gamma_\varphi\right)$$

$$+\frac{T_\theta \text{sign}(\dot{\theta})}{I_0 \omega_0}$$

ただし  $a', b', \gamma_\theta, \gamma_\varphi$  は初期条件による値。これより

$$\theta = a \cos\left(\frac{I_0 \omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}} t + \gamma_\theta\right)$$

$$-\frac{T_\varphi \text{sign}(\dot{\varphi})}{I_0 \omega_0} t + \theta_0$$

$$\varphi = b \cos\left(\frac{I_0 \omega_0}{\sqrt{A(A + I_x)}} t + \gamma_\varphi\right)$$

$$+\frac{T_\theta \text{sign}(\dot{\theta})}{I_0 \omega_0} t + \varphi_0$$

ただし  $\theta_0, \varphi_0$  は初期条件による値。

この式に於て振動項は極めて早い角速度の動揺であるが振幅  $a, b$  が微小量であるから無視できる。注意しなくてはならぬのはジンバル、架台、ジャイロ箱支持軸等の間に存在する機械的摩擦トルク  $T_\varphi, T_\theta$  によるもので、これは時間と共に発散し、いわゆる“駒倒れ”現象である。従って  $k=0$  とすることはできない。

## 6. 結 論

以上の考察により絞り係数  $k$  はジャイロ回転子、それは同時に送風器をかね起立装置の空気源になるが、その回転数  $n$  を修飾する。従って  $k$  の値により起立トルクは変ることになる。しかしジャイロ効果をもたらず回転に対しては全く影響を与えないから、力学的に云うと慣性力に付随する項には影響なく、入力として

の外部トルクに影響する。このことは静的性能よりも、むしろ動的性能に影響を与えることになる。

例えば機械的摩擦によりプレセッションする場合、中央の収れん値、これは同時に起立トルクと機械摩擦との釣合によって発生する零点付近の不感区域の大きさを示す角度であるが、これは絞り係数  $k$  によって増大する傾向にあり、従って不感帯を大きくする。そして、その運動の時定数は  $\frac{1}{k^2}$  倍に増大するから注意を要する。

しかし定常旋回時に於ける旋回誤差の改善には極めて効果があって定常誤差も減少でき、かつ時定数も大きいので比較的短時間の旋回には殆ど誤差を発生しないように絞り係数をとることもできる。

以上に述べたようにこの形式のジャイロ水平儀、つまり空気反力による起立装置を持ちその空気源をジャイロ回転子により得る方式のものでは、絞り係数  $k$  の

値を適当に選ぶことにより極めて広範囲な性能を持ったものを設計することが可能である。

この研究は農林水産航空協会から本学に依託されたもので、同協会市川事務局長にはお世話になり、又技術的援助については日本航空電子工業株式会社顧問秋田千秋氏に親切な御指導を得た。ここに関係された皆様の御好意を感謝する。

## 引用文献

- 1) Aerodynamics of the helicopter: Gessow & Myers 著, Frederick Ungar 社発行
- 2) Inertial Guidance, George R. Petman 著, Wiley 社発行
- 3) A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion, Andrew Gray, Dover 社発行