

KdV 方程式の係数符号と発生ソリトン

大 矢 征・中 野 義 映

Signs of the coefficients appearing in
the KdV Equations and their effects on
the solitary waves.

Susumu OHYA and Yoshiei NAKANO

Abstract

In this paper, the following theme is discussed, the effects of the signs of the three coefficients, α , δ^2 and U_0 appearing in the generalised KdV equation

$$u_t + \alpha u u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$$

with initial condition $U_0(x) = U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x$.

The combinations of α , δ^2 and U_0 among $\pm |\alpha|$, $\pm |\delta^2|$, $\pm |U_0|$ consist of 8 cases. However, the combinations just mentioned are essentially classified into only two groups. The first group produces solitons, and the second group a non-soliton and non-travelling wave train which consists of a great number of waves.

1. 緒 言

KdV 方程式の一般形は次式で表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1.1)$$

これに次式で表わされる初期値を入力することとする。

$$u_0(x) \equiv u(x, 0) = U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x \quad (1.2)$$

このとき発生するソリトンの性質は、原方程式中に含まれる 2 定数 α , δ^2 と初期条件式に含まれる 2 定数 U_0 , β との合計 4 定数によって定まる。本文ではこれら 4 定数の符号と発生するソリトンとの間の関係について述べている。

4 定数のうち β の正負の符号は sech^2 の性質上結果に影響しない。残りの 3 定数 α , δ^2 , U_0 の符号の影響を明らかにすることが本論文の目標である。

2. KdV 方程式の解

3 定数 α , δ^2 , U_0 の符号を論ずる前に KdV 方程式の解を明らかにする必要がある。

2.1 解析的 KdV 方程式

(1.1) 式で表わした方程式において、特に

$$\alpha = -6, \quad \delta^2 = +1$$

の場合には、これを解析的 KdV 方程式と呼ぶ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1)$$

初期条件は、 $U_0 > 0$ として

$$u(x, 0) = -U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x \quad (2.2)$$

これら (2.1), (2.2) に対する解は解析的に求められている¹⁾。その解は N 個 (N は整数) あり、その n 番目の解は次式で表わされる。

$$u_n(x, t) = -2k_n^2 \operatorname{sech}^2 [k_n(x - 4k_n^2 t)] \quad (2.3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \sqrt{-\lambda_n} \\ -\lambda_n &= \beta^2 \varepsilon_n^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ただし、

$$\varepsilon_n = s - n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

ε_n は正の実数である。

$$s = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{U_0}{\beta^2}} \right] \quad (2.5)$$

故に

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \left[-(1+2n) + \sqrt{1+4\frac{U_0}{\beta^2}} \right] \quad (2.6)$$

整数 N は ε_n によって決定される。 ε_n は正でなければならないが、 s は 1 より大であるので、 N は $\text{Int.}[s]^*$ によって決定される。

理解し易くするため U_0 , β の 2~3 の値の組合せの場合の s と k_n との値を示すと Table 1 のようになる。

Table 1. U_0 , β を与えたときの s と k_n

U_0	β	s	k_n
2	1	1	1
6	1	1, 2	1, 2
12	1	1, 2, 3	1, 2, 3
8	2	1	2
24	2	1, 2	2, 4
48	2	1, 2, 3	2, 4, 6
0.5	0.5	1	0.5
1.5	0.5	1, 2	0.5, 1
3	0.5	1, 2, 3	0.5, 1, 1.5

k_n を波定数と呼び、 $1/k_n$ は波幅定数 Δ_n を表わすものとする。波数条件は $4U_0/\beta^2$ により次表のようになる。

波数決定表

波 数	1	2	3	4	5
$4\frac{U_0}{\beta^2}$	8	24	48	80	120

KdV 方程式が (2.1) 式の代りに

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.7)$$

初期条件が (2.2) 式の代りに、 $U_0 > 0$ として

$$u(x, 0) = U_0 \text{sech}^2 \beta x \quad (2.8)$$

である場合にその解は (2.3) 式の代りに

$$u_n = 2k_n^2 \text{sech}^2 [k_n(x - 4k_n^2 t)] \quad (2.9)$$

となることは (2.1), (2.2), (2.3) の 3 式より容易に導くことができる。ただしこの場合の k_n , λ_n , ε_n , s 等は (2.4)~(2.6) と全く同一である。

以後便宜上本論文では解析的 KdV 方程式、同初期

条件、同解として (2.7), (2.8), (2.9) の 3 式を用いることとし、これらを基礎式として論を進めることとした。尚

振幅 A_n は

$$A_n = 2k_n^2 \quad (2.10)$$

波幅定数 Δ_n は

$$\Delta_n = \frac{1}{k_n} \quad (2.11)$$

速度 v は

$$v = 4k_n^2 \quad (2.12)$$

2.2 一般形 KdV 方程式

α , δ^2 , U_0 が正の定数であるとき、方程式

$$u_t + \alpha u u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0^* \quad (2.13)$$

とし、初期条件は

$$u(x, 0) = U_0 \text{sech}^2 \beta x \quad (2.14)$$

を印加したとする。 β は実数である必要があるが正負によって $u(x, 0)$ は変化しない。この場合には変数 x , t を次の関係式により、新変数 X , T に変換して、 X , T に関する解析的 KdV 方程式に変換することができる。

$$\text{変数変換} \quad X = \alpha x, \quad a = \sqrt{\frac{\alpha}{6}} \frac{1}{\delta} \quad (2.15)$$

$$T = b t, \quad b = \left(\frac{\alpha}{6}\right)^{3/2} \frac{1}{\delta} \quad (2.16)$$

$$\text{また} \quad c = \beta/a = \sqrt{\frac{6}{\alpha}} \delta \beta \quad (2.17)$$

とすると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial X} &= a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial X^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial T} \end{aligned} \right\}$$

これらを (2.13) に代入して

$$\begin{aligned} b \frac{\partial u}{\partial T} + \alpha a u \cdot \frac{\partial u}{\partial X} + a^3 \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} &= 0 \\ \therefore u_T + 6u \cdot u_X + u_{XXX} &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

初期条件は

$$u_0(X) = U_0 \text{sech}^2 \beta \left(\frac{X}{a}\right) = U_0 \text{sech}^2 cX \quad (2.19)$$

(2.18), (2.19) は解析的 KdV 方程式であるから解は次のように表わされる。

* $\text{Int.}[s]$ は s が非整数のとき s より得られる切り上げ整数、例えば $s=3.8$ のとき、 $\text{Int.}[s]=4$, すなわち $N=4$ となる。

* u_t , u_x 等の下添文字は、その変数に関する微分を表わす。例えば $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, 以下同様

Table 2. α, δ^2, U_0 の符号の組合せ

ケース	α	δ^2	U_0	KdV 方程式	初期条件式
ケース①	+	+	+	$u_t + \alpha u u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$	$+ U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x$
ケース②	-	-	+	$u_t - \alpha u u_x - \delta^2 u_{xxx} = 0$	$+ U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x$
ケース③	-	+	-	$u_t - \alpha u u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$	$- U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x$
ケース④	+	-	-	$u_t + \alpha u u_x - \delta^2 u_{xxx} = 0$	$- U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x$
ケース⑤	+	+	-	$u_t + \alpha u u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$	$- U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x$
ケース⑥	-	-	-	$u_t - \alpha u u_x - \delta^2 u_{xxx} = 0$	$- U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x$
ケース⑦	-	+	+	$u_t - \alpha u u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$	$+ U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x$
ケース⑧	+	-	+	$u_t + \alpha u u_x - \delta^2 u_{xxx} = 0$	$+ U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x$

$$s = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{U_0}{c^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{U_0}{\beta^2}} \right] \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_n = s - n$$

$$= \frac{1}{2} \left[-(1+2n) + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{U_0}{\beta^2}} \right] \quad (2.21)$$

$$n=0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

$$K_n = \sqrt{-\lambda_n} = c \varepsilon_n \quad (2.22)$$

$$= \sqrt{\frac{6}{\alpha}} \delta \beta \varepsilon_n = \frac{1}{\alpha} (\beta \varepsilon_n) = \frac{1}{\alpha} k_n \quad (2.23)$$

以上のパラメータを用いながら発生するソリトンの振幅を A_n で表わすと

$$A_n = 2K_n^2 = \frac{12\delta^2}{\alpha} (\beta \varepsilon_n)^2 \quad (2.24)$$

解は

$$u_n(X, T) = 2K_n^2 \operatorname{sech}^2 [K_n(X - 4K_n^2 T)] \quad (2.25)$$

$$\therefore u_n(x, t) = 2K_n^2 \operatorname{sech}^2 \left[\alpha K_n \left(x - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) K_n^2 t \right) \right]$$

$$= 2K_n^2 \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\alpha}{6\delta^2}} K_n \left(x - \frac{2}{3} \alpha K_n^2 t \right) \right] \quad (2.26)$$

振幅 A_n を用いて解を表わすと

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{A_n \alpha}{12\delta^2}} \left(x - \frac{\alpha A_n}{3} t \right) \right] \quad (2.27)$$

$$\text{波幅定数} \quad A_n = \sqrt{\frac{12\delta^2}{\alpha A_n}} \quad (2.28)$$

$$\text{速 度} \quad v_n = \frac{\alpha A_n}{3} \quad (2.29)$$

波数条件表

波 数	1	2	3	4	5
$\frac{2}{3} \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{U_0}{\beta}$	8	24	48	80	120

3. KdV 方程式と初期条件との3定数の符号

3定数 α, δ^2, U_0 の符号を特に正の数と限定しない場合について、その正負の影響を吟味する。理解を助けるため、以下の式では、 α, δ^2, U_0 を表わすにその絶対値を用いて表わすことにする。すなわち

$$\alpha = \pm |\alpha|, \delta^2 = \pm |\delta^2|, U_0 = \pm |U_0|$$

これら3定数の符号の組合せは Table 2 のように8ケのケースとして示すことができる。

これら8ケのケースのうちソリトンが発生するのは①～④の4ケースで、⑤～⑧の4ケースでは(2.20)式による s が虚数を含むのでソリトンが発生しない。

これら8ケースの各方程式、初期条件式に変数変換(2.15), (2.16), (2.17)を用いると、

$$u_T \pm 6u \cdot u_X \pm u_{XXX} = 0 \quad (3.1)$$

$$u_0(X) = \pm |U_0| \operatorname{sech}^2 cX \quad (3.2)$$

の組合せとなるが、ケース①, ②では

$$u_0(X) = + |U_0| \operatorname{sech}^2 cX$$

となつて、発生ソリトンは正波である。

ケース③, ④では

$$u_0(X) = - |U_0| \operatorname{sech}^2 cX$$

となつて発生ソリトンは負波となる。

ケース⑤～⑧では ψ に対するシュレディンガー方程式は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + (\lambda + (\pm |U_0| \operatorname{sech}^2 cX)) \psi = 0 \quad (3.3)$$

$$(-\psi_{,xx} + u\psi = \lambda\psi)$$

となり、従つて s を求める式は

Table 3. 各ケースの a , b , c 及び s

ケース	①	②	③	④	
初期値振巾	$+ U_0 $	$+ U_0 $	$- U_0 $	$- U_0 $	s
a	$\sqrt{\frac{ a }{6} \cdot \frac{6}{ \delta }}$	$\sqrt{\frac{ a }{6} \cdot \frac{1}{ \delta }}$	$j\sqrt{\frac{ a }{6} \cdot \frac{1}{ \delta }}$	$-j\sqrt{\frac{ a }{6} \cdot \frac{1}{ \delta }}$	(2.20)式
b	$\left(\frac{ a }{6}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{ \delta }$	$-\left(\frac{ a }{6}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{ \delta }$	$-j\left(\frac{ a }{6}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{ \delta }$	$-j\left(\frac{ a }{6}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{ \delta }$	(2.20)式
c	$\sqrt{\frac{6}{ a }} \delta \beta$	$\sqrt{\frac{6}{ a }} \delta \beta$	$-j\sqrt{\frac{6}{ a }} \delta \beta$	$j\sqrt{\frac{ a }{6}} \delta \beta$	(2.20)式
発生ソリトン	正波	正波	負波	負波	
進行方向	右進	左進	右進	左進	

$$s = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{|a|}{|\delta|^2} \frac{|U_0|}{\beta^2}} \right] \quad (3.4)$$

となるので s は複素数となる。

各ケースの変換定数 a , b , c , s 等の性質は Table 3 のように表示される。

ケース①～④ではソリトン波を発生して、進行波であるが、ケース⑤～⑧では静止波形となる。その概略を表示すると Table 4 に示すようになる。

$(\alpha \cdot U_0) > 0$ ならば右進波となり $(\alpha \cdot U_0) < 0$ ならば左進波となる ((2.29) 式より)。また振幅 A_n の符号は (δ^2/α) の符号によって定まる ((2.24) 式より)。

4. s が実数で発生するソリトン波形

s が実数の場合にはソリトンを発生し、これは進行波である。

ケース①の場合すなわち

$$u_t + |a| u u_x + |\delta^2| u_{xxx} = 0$$

$$u_0(x) = +|U_0| \operatorname{sech}^2 \beta x$$

において、 $\alpha = +1$, $\delta^2 = +0.022^2$

$$U_0 = +2.0, \quad \beta = 18.5567405$$

の場合の $t = 1.0 \text{ TB} = 1/\pi [\text{s}]$

における波形を示すと Fig. 1 のようになる。 β の値は発生ソリトンの 1 波条件より決定したものである。電算機による計算結果と理論値とを比較すると Table 5 のようになる。

Table 4. α , δ^2 , U_0 等の各符号と波のふるまい

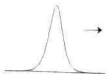

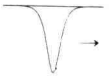

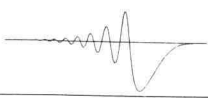
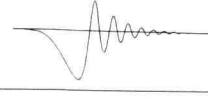


	α	δ^2	U_0	s	ソリトン波又は静止波
ケース①	+	+	+	実数	 右進正
ケース②	-	-	+	実数	 左進正
ケース③	-	+	-	実数	 右進負
ケース④	+	-	-	実数	 左進負
ケース⑤	+	+	-	虚数	
ケース⑥	-	-	-	虚数	
ケース⑦	-	+	+	虚数	
ケース⑧	+	-	+	虚数	

Table 5. 電算機実験結果と理論値

	理 論 値	電算機実験
振 幅	$U_0 = 2.0$	2.0063
波 幅	$1/\beta = 0.05389$	0.05392
速 度	$\alpha A/3 = 0.6667$	0.6622

5. s が複素数となる場合の波形

s が複素数の場合は、進行波とならない。唯時間の経過と共に波連は成長して、波数も増加して行くので多少の移動がある。

Table 4 のケース ⑧ の場合すなわち

$$u_t + |\alpha| u u_x - |\delta|^2 u_{xxx} = 0$$

$$u_0 = +|U_0| \operatorname{sech}^2 \beta x$$

において、 $\alpha = +1$, $-|\delta|^2 = -0.022^2$,

$$U_0 = +2.0, \beta = 18.5567405$$

の場合における波形を示すと Fig. 2, Fig. 3 のようになる。 β の値は 4 のケース ① の場合の値に合わせたものである。

(A) 振幅変化 振幅は位置座標によって変化する。Fig. 3 の波連の各+側波高値のうち i 番目の波高値を u_i とし、その位置座標を x_i とするとき u_i が次式で表わされるとする。

$$u_i = u_0 \left(\cosh \frac{x_i}{V_{10}} \right)^{a_1}$$

ただし a_1, V_{10} は各定数である。電算機実験による u_0, u_i, x_i に対して最も近似した u_i を得られる a_1, V_{10} を最小自乗法によって求めると $u_0 = 0.7738$ に対して

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1.0215 \\ V_{10} &= 0.69089 \end{aligned} \right\}$$

となる。すなわち

$$u_i = 0.7738 \left(\cosh \frac{x_i}{0.69089} \right)^{1.0215}$$

(B) 波長の変化 これも位置座標によって変化する。Fig. 3 の各波の i 番目の波長を λ_i とし、その位置座標を x_i とするとき、 λ_i が次式で表わせるとする。

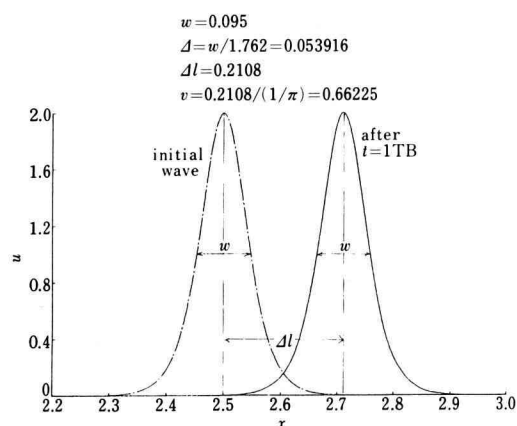
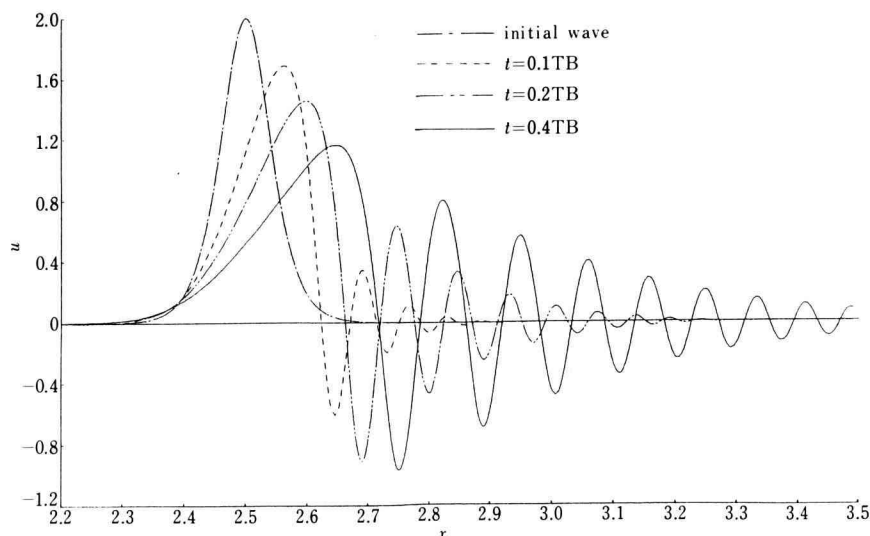
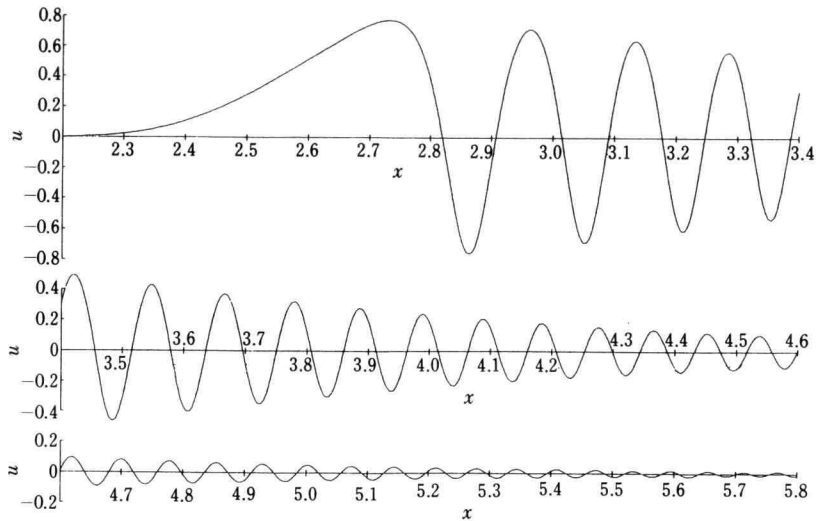
Fig. 1. Soliton in case ① $t=1TB=1/\pi$ [s]

Fig. 2. Wave form in case ⑧

Fig. 3. Wave form in case ⑧ ($t=1.0TB$)

$$\lambda_i = \lambda_0 \left(1 + \frac{x_i}{V_{20}} \right)^{a_2}$$

ただし, a_2 , V_{20} は各定数である。電算機実験による λ_0 , λ_i , x_i に対して最も近似した λ_i を得られる a_2 , V_{20} を最小自乗法を用いて求めると, $\lambda_0=0.2294$ に対して,

$$a_2=0.77248$$

$$V_{20}=0.61156$$

となる。すなわち

$$\lambda_i = 0.2294 \left(1 + \frac{x_i}{0.61156} \right)^{0.77248}$$

となった。

6. 結 言

α , δ^2 , U_0 なる 3 定数の符号の組合せは 8 ケの場合を生ずるが, 本質的には case ① と case ⑧ の 2 つといえる。case ① は普通の KdV 方程式として, ソリトンの発生となる。case ⑧ は進行しない多数波よりなる波連を発生する。後者の性質や解析的取扱いは今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) 中野・大矢: 応用物理, 第 49 巻, 12 号, p. 1244 (1980).