

# 可変容量ダイオードの非直線性の表現式

大矢 征・中野 義映

## An Expression of Non-linearity of Variable Capacitance Diode

Susumu OHYA and Yoshiei NAKANO

### Abstract

It was found by using the least-square method to capacitance of diodes as a function of applied voltage that the variable capacitance of diodes can be expressed by the following non-linear formula;

$$C = C_0 \left(1 + \frac{V}{V_0}\right)^{-a}$$

where  $a$  and  $V_0$  are two constants. The calculated value of  $C$  agrees accurately to the measured capacitance in a wide voltage range.

### 1. ま え が き

ソリトン現象はプラズマ中の波動や、神経系における刺激の伝わり方など広い分野で観測される非線形分散波動現象であり、この現象を電気回路でシミュレートする場合に、非線形素子として可変容量ダイオードが用いられる。このダイオードの接合容量  $C$  はバイアス電圧  $V$  により非直線的に変化し、この特性を表す実験式として (1) 式が用いられている<sup>1)</sup>。

$$C = \frac{C_0 V_0}{V} \log \left(1 + \frac{V}{V_0}\right) \quad (1)$$

ここで、 $C_0$  は  $V=0V$  における容量であり、 $V_0$  とともに最小 2 乗法により求める未知数である。しかしながら、著者らが測定した素子の特性はこの式で近似できない。

本論文では、ダイオードの  $C-V$  特性を示す式 (2) を仮定し、

$$C = C_0 (1 + V/V_0)^{-a} \quad (2)$$

非線形のための最小 2 乗法を適用して、定数  $V_0$ ,  $a$  を決定した ( $C_0$  は実測値を用いる)。(2) 式は非常に良く測定値を近似している。また、別稿<sup>2)</sup>で示すように、ソリトン現象を記述する  $K-dV$  方程式への変換に (2) 式を用いた場合も、(1) 式と同様に解析解が得られる。

### 2. $C-V$ 特性式の推定法

可変容量ダイオードの  $C-V$  特性が (2) 式で表される場合の最小 2 乗法による定数  $V_0$ ,  $a$  の求め方を述べる。いま、 $V_0$  および  $a$  の近似値を  $V_{00}$  および  $a_0$  とおくと

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= V_{00} + \Delta V_0 \\ a &= a_0 + \Delta a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

と表すことができる。(2) 式が  $V_0$  と  $a$  に関して偏導関数をもつとして、 $\Delta V_0$  と  $\Delta a$  に関する 1 次のテーラー展開をとると

$$\begin{aligned} F(V_0, a) &\simeq F(V_{00}, a_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial V_0}\right)_0 \Delta V_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_0 \Delta a \\ &\equiv C_0 \left(1 + \frac{V}{V_{00}}\right)^{-a_0} + \frac{C_0 a_0}{V_{00}^2} V \left(1 + \frac{V}{V_{00}}\right)^{-a_0-1} \Delta V_0 \\ &\quad - C_0 \left(1 + \frac{V}{V_{00}}\right)^{-a_0} \ln \left(1 + \frac{V}{V_{00}}\right) \Delta a \end{aligned} \quad (4)$$

となる。この式を次式で表すものとする。

$$F(V_0, a) \equiv F_0 + F_1 \Delta V_0 + F_2 \Delta a \quad (5)$$

(5) 式は  $\Delta V_0$  と  $\Delta a$  に関して線形であるので、通常の最小 2 乗法を適用することができる。 $n$  組の測定値  $V_i$ ,  $C_i$  ( $i=1 \sim n$ ) を用いたデータを表すために、(5) 式の  $F$  に下添字  $i$  をつける。残差  $r_i$  は

$$r_i = F_i(V_0, a) - C_i \quad (6)$$

であるから、残差平方和  $S$  は (7) 式となる (以下  $\sum_{i=1}^n$  を  $\Sigma$  で表す)。

$$S = \sum r_i^2 = \sum (F_{0i} + F_{1i} \Delta V_0 + F_{2i} \Delta a - C_i)^2 \quad (7)$$

ここで,  $\partial S / \partial (\Delta V_0) = 0$  と  $\partial S / \partial (\Delta a) = 0$  を考えると,

$$\frac{\partial S}{\partial (\Delta V_0)} = 2 \sum [F_{1i}^2 \Delta V_0 + F_{1i} F_{2i} \Delta a - F_{1i} (C_i - F_{0i})] = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial (\Delta a)} = 2 \sum [F_{1i} F_{2i} \Delta V_0 + F_{2i}^2 \Delta a - F_{2i} (C_i - F_{0i})] = 0 \quad (9)$$

となる。 $R_i = C_i - F_{0i}$  において (8), (9) 式の連立方程式を解くと

$$\Delta V_0 = \frac{\sum (F_{1i} \cdot R_i) \cdot \sum (F_{2i})^2}{\sum (F_{1i})^2 \cdot \sum (F_{2i})^2} \cdot \frac{-\sum (F_{2i} \cdot R_i) \cdot \sum (F_{1i} F_{2i})}{-(\sum (F_{1i} \cdot F_{2i}))^2} \quad (10)$$

$$\Delta a = \frac{\sum (F_{1i})^2 \cdot \sum (F_{2i} \cdot R_i)}{\sum (F_{1i})^2 \cdot \sum (F_{2i})^2} \cdot \frac{-\sum (F_{1i} F_{2i}) \cdot \sum (F_{1i} R_i)}{-(\sum (F_{1i} \cdot F_{2i}))^2} \quad (11)$$

となる。この  $\Delta V_0$  と  $\Delta a$  を (3) 式に代入して新しい  $V_0$  および  $a$  の値を決定し、その値を近似値  $V_{00}$  および  $a_0$  において前述の計算を繰り返す。 $\Delta V_0$  と  $\Delta a$  の値が  $V$  と  $a$  に比して十分小さな値となれば、 $V_0$  および  $a$  は (2) 式の定数の近似値となる。

### 3. 数値計算例

3 種類の変容量ダイオード (1S 1658, 1S 2688, 1S 2094) について, YHP 製 LCZ メータ (4726A) を使用して, 20 kHz, 50 mV の条件で C-V 特性を測定した。バイアス電圧  $V$  を 0 V から 15 V まで 1 V おきに印加した場合の容量の測定値を Fig. 1 に示す。また, 2 で述べた最小 2 乗法によって求めた (2) 式の定数  $V_0$ ,  $a$  は Table 1 のとおりである。この値を用いた (2) 式による曲線は Fig. 1 に示すように, 測定値を非常に良く近似している。測定値と近似値との差  $\epsilon$  を Fig. 2 に示した ( $\epsilon$  の添字は Table 1 の case による)。Fig. 2 (a) は 1S 1658 と 1S 2094 の場合であり, すべて  $|\epsilon| < 0.1$  pF である。(b) は 1S 2688 の場合で, 太線は (a) と同様に 16 点測定した場合の測定値と近似値との差  $\epsilon_2$  である。細線は 0-2 V を 0.1 V ずつ, 2-4 V を 0.2 V ずつ, 4-10 V を 0.5 V ずつ, 10-15 V を 1 V ずつ合計 48 点を不等間隔に測定した場合の差  $\epsilon'_2$  を示す。このときの最小 2 乗

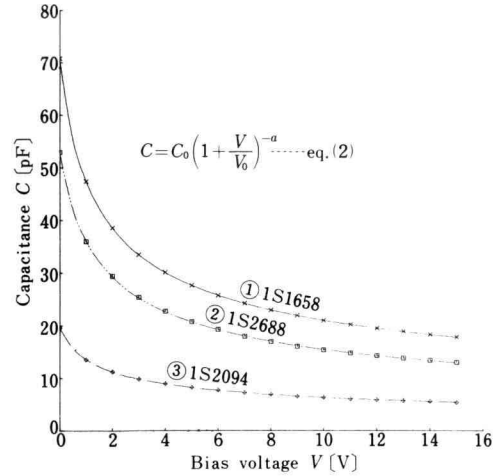
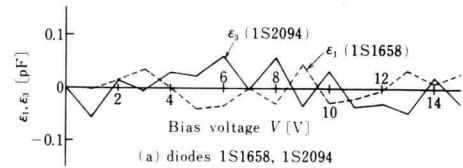


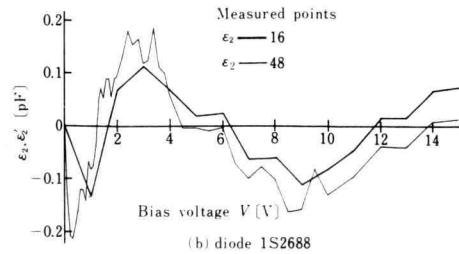
Fig. 1. Measured points and calculated curves of eq. (2). (cf. Table 1)

Table 1. Constants  $a$ ,  $V_0$  in eq. (2) of variable Non-linear capacitance of diodes.

case	diode	Measured $C_0$ [pF]	$V_0$ [V]	$a$
①	1S1658	70.8	0.6668	0.4379
②	1S2688	52.9	0.8103	0.4743
③	1S2094	19.6	0.7275	0.4177



(a) diodes 1S1658, 1S2094



(b) diode 1S2688

Fig. 2. Differences of measured capacitance and calculated Value.  
 $\epsilon = (\text{measured value}) - (\text{calculated value})$

Table 2. Error factor of capacitance calculated using eq. (2) (unit %).

Voltage $V$ [V]	① 1S1658	② 1S2688	③ 1S2094
0	0.000	0.000	0.000
1	-0.006	-0.364	-0.424
2	0.036	0.241	0.124
3	0.107	0.448	-0.057
4	-0.002	0.309	0.339
5	-0.142	0.085	0.256
6	-0.132	0.132	0.766
7	-0.002	-0.343	-0.073
8	-0.132	-0.344	0.816
9	0.205	-0.683	-0.539
10	-0.137	-0.526	0.470
11	-0.097	-0.305	-0.607
12	-0.023	0.113	-0.524
13	0.179	0.119	-0.811
14	0.045	0.494	0.353
15	0.163	0.563	-0.539

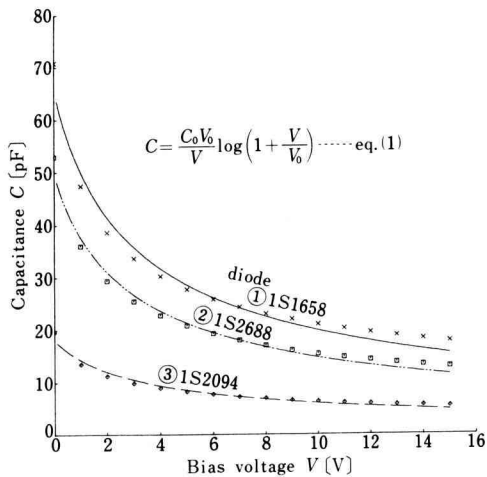
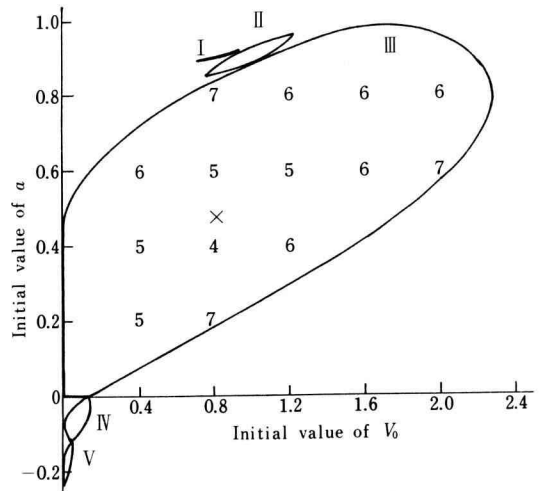


Fig. 3. Measured points and calculated curves of eq. (1). (cf. Table 3)

法による  $V_0$  は 0.7953 V であり,  $a$  は 0.4699 である。 $|\epsilon_2|$  の最大値は約 0.21 pF であるが, 測定器の表示が小数点以下 1 桁 (0.1 pF) であることを考えると, 良く近似しているといえる。 $\epsilon$  と近似値との比を誤差率と呼ぶと, Table 2 に示すように, どの素子の場合もこの値は  $\pm 1\%$  未満である。

Table 3. Constants  $C_0$ ,  $V_0$  in eq. (1) of variable Non-linear capacitance.

case	diode	Measured $C_0$ [pF]	Calculated $C_0$ [pF]	$V_0$ [V]
①	1S1658	70.8	65.629	1.470
②	1S2688	52.9	49.783	1.419
③	1S2094	19.6	18.059	1.769

Fig. 4. Computable ranges of initial value  $a_0$  and  $V_{00}$  and convergence numbers of the computation.

一方, (1) 式を用いた近似式には分母に  $V$  があるため, 0 V の測定値を用いる代りに 0.1 V の値を使用して, 非線形最小 2 乗法近似を行った。この結果は Fig. 3 に示すとおり測定値との間にはかなりの違いがある。3 種のダイオードの  $C_0$  および  $V_0$  を Table 3 に示したが,  $C_0$  の実測値との差は大きく約 6.3-8.5% である。容量の誤差率は Table 4 に示すように十数%に達する場合もある。

非線形の最小 2 乗法は初期値の選定により計算不能となる場合が生ずる。Fig. 4 は 1S 2688 について最小 2 乗法を適用した場合の収束可能領域と収束回数を示したものである。収束条件としては, (3) 式の  $\Delta V_0$  と  $\Delta a$  が共に  $10^{-5}$  以下となる場合とした。収束値は図中の  $\times$  印で示し, 初期値を領域 III とした場合には図中に示した回数で収束する。すなわち,  $\times$  印付近では 4 回以内の反復で収束し, 境界線の近くでは約 9 回で収束する。初期値を領域 II とした場合は領域 IV を経由して領域 III に入り, また, 初期値を I とした場合は領域 V と

Table 4. Error factor of capacitance calculated using eq. (1) (unit %).

Voltage $V$ [V]	① 1S1658	② 1S2688	③ 1S2094
0	6.261	8.534	7.880
0.1	3.727	- 5.312	4.737
1	- 4.460	- 4.990	- 5.322
2	- 5.347	- 6.474	- 6.829
3	- 4.668	- 6.257	- 6.046
4	- 3.651	- 4.671	- 4.704
5	- 2.457	- 3.198	- 3.119
6	- 0.896	- 1.000	- 1.290
7	0.176	- 0.080	0.685
8	1.715	2.581	2.388
9	2.886	2.938	4.545
10	4.542	5.713	5.958
11	6.239	6.260	7.730
12	8.122	8.000	9.501
13	9.533	9.299	11.376
14	11.320	12.178	12.838
15	12.741	12.730	14.546

領域 IV を經由して領域 III に入り,  $V_0, a$  が求められる。これらの領域外の値を初期値とした場合は  $V_0$  が負となる場合が生じて,  $V_0, a$  の近似値は求まらない。

#### 4. む す び

可変容量ダイオードの C-V 特性は非直線的であるので, 仮定した近似式によっては通常の最小 2 乗法を用いて定数を決定することが困難である。本論文は非線形最小 2 乗法を適用して C-V 特性の近似式を求めたものである。実測した特性を従来から用いられている (1) 式で近似した場合, 容量についての誤差率は  $V=0$  V で 6.3-8.5%, 15 V では 12.7-14.5% と非常に大きい。これに対して, 本論文で著者らが提案した (2) 式を用いた場合の誤差率は最大でも 1% 以下であり, (2) 式は C-V 特性の非常に良い表現式であるといえる。

非線形最小 2 乗法における, 初期値による収束可能領域の 1 例を示したが, その境界の決定方法は今後の課題である。

#### 文 献

- 1) R. Hirota and K. Suzuki: Proceeding of the IEEE, Vol. 61, No. 10, p. 1483 (1973).
- 2) 尾田他: 「工学のためのコンピュータプログラミング」, 実教出版 (1980).
- 3) 大矢・中野: 幾徳工業大学研究報告, B-9, p. 35 (1985).