

# 非 $\text{sech}^2$ 波入力に対する $KdV$ 方程式の応答

大 矢 征・中 野 義 映

Response of  $KdV$  Equation to Input Wave of Non- $\text{sech}^2$ -form.

Susumu OHYA and Yoshiei NAKANO

## Abstract

For a given  $KdV$  equation,  
 $u_t + \alpha uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0,$   
with the initial condition

$$u_0(x) = A,$$

an analytical solution can not be obtained, if the initial wave is not of a  $\text{sech}^2$ -form. However, if there exists a wave  $u_0 = B$ , which has a  $\text{sech}^2$ -form and is able to produce the same solitary waves as  $A$  except for an oscillatory tail with a small amplitude, the wave  $B$  can be favourably adopted in place of  $A$  for the purpose of deriving an analytical solution to the  $KdV$  equation. In this paper,  $B$  is defined as "Soliton Equivalent Wave".

The authors have introduced a wave  $C$ , which has the same peak amplitude and the half value width as  $A$  and has a  $\text{sech}^2$ -form. It has been confirmed that the wave form of  $B$  is nearly equal to that of  $C$ .

## 1. 緒 言

$KdV$ 方程式 (以後  $KdV$ -Eq と略称) が与えられたとき, 初期条件として入力する波形が非  $\text{sech}^2$  波のときには, 電算機実験のみは可能であるが, 解析的取扱いは不可能である。例えば, 初期条件として, 入力波形  $A$  が Zabusky の実験<sup>1)</sup> のように

$$A = \cos \pi x$$

あるいは本実験のように

$$A = 0.5(1 + \cos \beta' x)^\alpha$$

のような場合には  $KdV$ -Eq の応答の解析ができない。

そこで, 本文では, 入力波形  $A$  に対応する近似  $\text{sech}^2$  波形  $B$  を求め, 近似的に  $KdV$ -Eq の応答すなわち解析解を導くことを試みている。

### ソリトン等価波の定義

ある  $KdV$ -Eq (または "らんぶ" 非線形梯子形反復回路網) に対して, 非  $\text{sech}^2$  波形  $A$  の波を初期値として入力したとき, 発生するソリトン波列が,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  及びさざ波であるとする。これらさざ波を除

外した波列  $B_1, B_2, \dots, B_n$  を発生せしめ得る入力波を  $B$  とするとき,  $B$  を元の  $A$  及びソリトン列  $B_1, B_2, \dots, B_n$  波に対するソリトン等価波と定義する。ただし  $B$  は  $\text{sech}^2$  波形を有するものとする。

例  $KdV$ -Eq が

$$u_t + uu_x + 0.022 u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

で, 初期値入力波  $A$  が

$$A = 3.0 \text{ sech } 18.556740x \quad (1.2)$$

であるとき, 波列

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= 4.09951 \text{ sech}^2 26.88688x \\ B_2 &= 1.1852217 \text{ sech}^2 14.07605x \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

ほかに僅少のさざ波

を発生したとする。

さざ波を除外して (1.3) 式の波を発生させるための  $\text{sech}^2$  形式の入力波  $B$  は

$$B = 2.997372 \text{ sech}^2 12.28242x \quad (1.4)$$

である。(1.4) 式で示す  $B$  は (1.1), (1.2) 式に対するソリトン等価波である。

## 2. ソリトン等価波の計算

ソリトン波列  $B_1, B_2, \dots, B_n$  が与えられたとする

と、これに対する等価波  $B$  は計算式によって求められる。これを誘導する前に  $KdV$  方程式と初期値が与えられたときの解を整理しておく必要がある。

## 2.1 一般形 $KdV$ 方程式とその解

簡単のために解が2波の場合について述べる。

$$KdV \text{ 方程式 } u_t + auu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{初期条件 } u_{(x,0)} = U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x \quad (2.2)$$

(解) 変数変換定数

$$a = \left(\frac{\alpha}{6}\right)^{1/2} \frac{1}{\delta}, \quad b = \left(\frac{\alpha}{6}\right)^{3/2} \frac{1}{\delta}, \quad c = \frac{\beta}{a} \quad (2.3)$$

新変数

$$X = ax, \quad T = bt, \quad (2.4)$$

を用いると

$$(2.1) \rightarrow u_T + 6uu_X + u_{XXX} = 0 \quad (2.5)$$

$$(2.2) \rightarrow u_0(X, 0) = U_0 \operatorname{sech}^2 cX \quad (2.6)$$

解は

$$u_n(X, T) = A_n \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{A_n}{2}} (X - 2A_n T) \quad (2.7)$$

で表わされる。

$(X, T)$  を  $(x, t)$  変数に戻すと

$$(2.7) \rightarrow u_n(x, t) = A_n \operatorname{sech}^2 a \sqrt{\frac{A_n}{2}} \left( x - \frac{2b}{a} A_n t \right) \quad (2.8)$$

ここに

$$A_n = 2K_n^2 = 2(c\varepsilon_n)^2 = \frac{12\delta^2}{\alpha} (\beta\varepsilon_n)^2 \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_n = s - n \quad (2.10)$$

$$s = \frac{1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{U_0}{\beta^2}} \right] \quad (2.11)$$

$$K_n = \sqrt{\frac{A_n}{2}} \quad (2.12)$$

$$\text{一方 } K_n = c\varepsilon_n = \sqrt{\frac{6}{\alpha}} \delta \beta \varepsilon_n \quad (2.13)$$

$$A_n = \frac{1}{K_n} = \sqrt{\frac{12}{\alpha}} \frac{\delta^2}{A_n} \quad (2.14)$$

$$v_n = \frac{\alpha A_n}{3} \quad (2.15)$$

(2.8) 式を書きかえると

$$u_n = A_n \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{\alpha A_n}{12\delta^2}} \left( x - \frac{\alpha A_n}{3} t \right) \right] \quad (2.16)$$

## 2.2 ソリトン等価波の求め方

次のものが与えられているとする (2波ソリトンの例)

$$KdV \text{ Eq: } u_t + auu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (2.17)$$

これに  $A$  なる波形を初期値として入力し、次のソリトン波列  $B_1, B_2$  等が現われたとする。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= A_0 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{A_0} (x - v_0 t) \\ B_2 &= A_1 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{A_1} (x - v_1 t) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

およびさざ波

以上の条件のもとに、ソリトン等価波  $B$  を

$$B = U_0 \operatorname{sech}^2 \beta x \quad (2.19)$$

とするとき、 $U_0, \beta$  の値の求め方を述べる。

与えられたソリトン波列 (2.18) 式において、(2.12) により

$$K_0 = \sqrt{\frac{A_0}{2}}, \quad K_1 = \sqrt{\frac{A_1}{2}} \quad (2.20)$$

(2.13) により

$$K_0 = c\varepsilon_0, \quad K_1 = c\varepsilon_1 \quad (2.21)$$

しかも

$$\varepsilon_0 = s - 0, \quad \varepsilon_1 = s - 1 \quad (2.22)$$

$$\therefore \varepsilon_0 - \varepsilon_1 = 1 \quad (2.23)$$

(2.21) より

$$\begin{aligned} c(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) &= K_0 - K_1 \\ &= \sqrt{\frac{A_0}{2}} - \sqrt{\frac{A_1}{2}} \\ \therefore c &= \sqrt{\frac{A_0}{2}} - \sqrt{\frac{A_1}{2}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

(2.3) の  $c$  の定義により

$$\begin{aligned} \beta &= ac \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{6}} \frac{1}{\delta} \left( \sqrt{\frac{A_0}{2}} - \sqrt{\frac{A_1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

一方、(2.11) 式の  $U_0$  と  $s$  との関係を書きかえると

$$U_0 = 4s(s+1) \frac{3\delta^2}{2\alpha} \beta^2 \quad (2.26)$$

この式で  $U_0$  を求めるには  $s$  の値が必要である。(2.10) 式および、(2.21) 式より

$$\varepsilon_0 = K_0/c = s \quad (2.27)$$

この式により  $s$  が求まると (2.26) 式により  $U_0$  の値が得られる。

例題：—

$$KdV \text{ Eq } u_t + uu_x + 0.022^2 u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

$$\alpha = 1, \quad \delta = 0.022 \quad (2)$$

$$A = 3.0 \operatorname{sech} 18.55674059x \quad (3)$$

発生したソリトン波列

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= 4.09951 \operatorname{sech}^2 \frac{(x-1.382474t)}{0.371928549} \\ B_2 &= 1.1852217 \operatorname{sech}^2 \frac{(x-0.352923t)}{0.0710426326} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

さざ波

が観測されたという。この場合のソリトン等価波を求めよ。

$$\text{解} \quad a = \sqrt{\frac{\alpha}{6}} \frac{1}{\delta} = 18.55674048 \quad (5)$$

$$K_0 = \sqrt{\frac{A_0}{2}} = 1.431696546 \quad (6)$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{A_1}{2}} = 0.769812217 \quad (7)$$

$$c = K_0 - K_1 = 0.661884329 \quad (8)$$

$$\beta = ac = 12.282415 \quad (9)$$

$$\varepsilon_0 = K_0/c = 2.163061555 \quad (10)$$

$$\varepsilon_1 = K_1/c = 1.163061555 \quad (11)$$

$$s = \varepsilon_0 = 2.163061555 \quad (12)$$

$$U_0 = s(s+1)(\beta/a)^2 \quad (13)$$

$$= 2.997372508 \quad (14)$$

$$v_0 = \frac{\alpha A_0}{3} = 1.366503 \quad (15)$$

$$v_1 = \frac{\alpha A_1}{3} = 0.3950739 \quad (16)$$

(15), (16) のソリトンの速さは (4) 式の観測値と僅かな差違があった。以上の結果ソリトン等価波は

$$B = 2.997372508 \operatorname{sech}^2 12.282415x \quad (17)$$

尚上述の結果の検算として本例題の (1) で示される

KdV Eq に初期値として (17) で示される入力波を印加すると、このとき現われるソリトン波列が (4) 式で示されているものと一致するのは当然である。

### 2.3 ソリトン等価波の波形

原波  $A$  に対するソリトン等価波  $B$  を

$$B = U_0 \operatorname{sech}^2 \beta_0 x \quad (2.28)$$

とする。また、波形  $A$  と同一振幅 ( $U_0$ ), 同一半値幅を有する sech<sup>2</sup> 波を  $C$ , すなわち

$$C = U_1 \operatorname{sech}^2 \beta_1 x \quad (2.29)$$

とすると、 $C$  と  $B$  とはその振幅及び半値幅が近似していることが分かった。

1 例として前述例題をあげると

$$A = 3.0 \operatorname{sech} 18.55674047x \quad (2.30)$$

$A$  のソリトン等価波  $B$  は

$$B = 2.997372508 \operatorname{sech}^2 12.282415x \quad (2.31)$$

$A$  と同一の高さ、同一の半値幅を有する sech<sup>2</sup> 波の  $C$  は

$$C = 3.0 \operatorname{sech}^2 12.41909172x \quad (2.32)$$

いま半値幅を  $w$  で表わし、半値高さとなる  $x$  座標を  $x_0$  とすると

$$w = 2x_0 \quad (2.33)$$

上記  $A, B$  および  $C$  の 3 波のそれぞれの高さ  $U$  と  $x_0$  は表 1 に示すとおりになる。

表 1.  $U, \beta, x_0$  の比較

	$A$	$B$	$C$
$U$	3.0	2.997372508	3.0
$\beta$	18.55674047	12.282415	12.41909172
$x_0$	0.070969241	0.070969247	0.0717589812

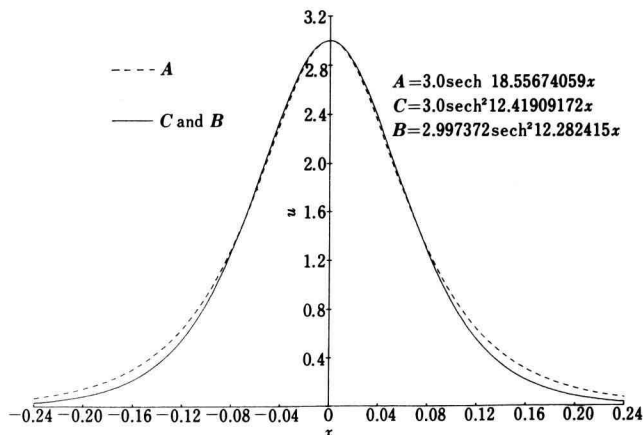


Fig. 1. Wave-forms of  $A, B$ , and  $C$

表2.  $A, C, B$  の数値

	非 sech <sup>2</sup> 波 $A$	同振巾, 同半値巾波 $C$	ソリトン等価波 $B$
$x$	3.0 sech 18.55674059 $x$	3.0 sech <sup>2</sup> 12.41909172 $x$	2.997372508 sech <sup>2</sup> 12.28241572 $x$
0.01	2.949077	2.954201	2.952605
0.02	2.804617	2.822273	2.823536
0.03	2.588433	2.619279	2.624602
0.04	2.328532	2.366391	2.376173
0.05	2.051674	2.086575	2.100461
0.06	1.778755	1.800802	1.817900
0.07	1.523485	1.525642	1.544818
0.08	1.293232	1.272383	1.292476
0.09	1.090718	1.047348	1.067351
0.10	0.915701	0.852856	0.871997
0.11	0.766280	0.688400	0.706155
0.12	0.639788	0.551723	0.567790
0.14	0.444099	0.348791	0.361235
0.16	0.307293	0.217307	0.226449
0.18	0.212310	0.134161	0.140644
0.20	0.146580	0.082364	0.086849
0.22	0.101164	0.050391	0.053439
0.24	0.069809	0.030764	0.032810

この結果,  $B$  の高さと半値幅とは  $C$  従って原波  $A$  振巾  $A_n$  ;  
のそれらに近似していることが分かった。

$A, B, C$  の3者の波形を比較すると Fig. 1 のようになり,  $B$  と  $C$  とはこの例では極めて接近しているため, 図上で区別して表わすことができない。

$A$  が与えられたとき  $C$  を求めることは簡単であるから, 実用上は多少の誤差を容認すれば,  $B$  の値を, この  $C$  で代用できることが分かる。

$$A_n = \frac{12\delta^2}{\alpha} [\beta \varepsilon_n] \quad (3.6)$$

波巾定数  $\Delta_n$  ;

$$\Delta_n = \sqrt{\frac{12\delta^2}{\alpha A_n}} \quad (3.7)$$

速度  $v_n$  ;

$$v_n = \frac{\alpha A_n}{3} \quad (3.8)$$

### 3. $B$ を $C$ で代用した場合の誤差の1例

$$\alpha=1, \quad \delta=0.022$$

$$KdV \text{ Eq: } u_t + uu_x + 0.022^2 u_{xxx} = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{初期条件 } A = 1 + \cos \pi x \quad (3.2)$$

初期条件として  $A$  式の場合の  $C$  は

$$C = 2 \operatorname{sech}^2 \underbrace{1.762747174x}_{\beta} \quad (3.3)$$

となる。(3.1), (3.3) を基礎として  $A_n, \Delta_n$  および  $v_n$  を計算すると

$$s = \frac{1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{U_0}{\beta^2}} \right] \\ = 14.39606148 : N=15 \text{ 波} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_n = s - n \quad (n=0, 1, \dots, (15-1)) \quad (3.5)$$

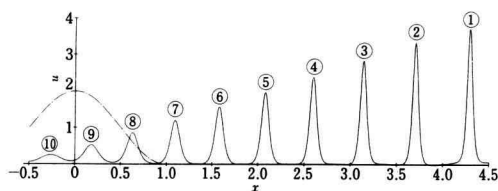
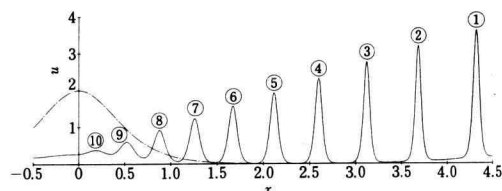
(3.6)~(3.8) 式を使用して  $C$  に対する計算結果, (3.3) 式に対する計算機実験結果および, (3.2) 式に対する計算機実験結果を並記すれば表3に示すようになる。また,  $A$  に対する計算機実験の結果の波形を Fig. 2 に,  $C$  に対する計算機実験の結果を Fig. 3 に示す。

計算機の計算容量の上で,  $t=10 \text{ TB}=10/\pi[\text{s}]$  までの計算しかできず, この時間ではソリトンの完全分離には不十分であった。ゆえに No. 9, 10 以上の低振幅波の計算結果が表記されていない。

表3の結果  $C$  と  $A$  との計算機実験結果には多少の誤差が認められる。しかし,  $C$  の計算機実験結果と理論式 (3.6), (3.7), (3.8) による計算結果との間にも同程度の食違があることを考えれば, この程度の誤差は止むを得ないものと思われる。

表3. 理論式の結果と計算機実験結果

	式(3.6)(3.7)(3.8)による計算結果			計算機実験の結果( $t = 10 \text{ TB} = 3.18309886$ における)					
	$C = 2 \text{sech}^2 1.762747174x$			$C = 2 \text{sech}^2 1.762747174x$			$A = (1 + \cos \pi x)$		
$n$	振巾 $A_n$	波巾定数 $\Delta_n$	速度 $v_n$	振巾 $A_n$	波巾定数 $\Delta_n$	速度 $v_n$	振巾 $A_n$	波巾定数 $\Delta_n$	速度 $v_n$
波番号									
1	3.740 <sub>193</sub>	0.0394 <sub>636</sub>	1.246 <sub>66</sub>	3.631 <sub>1</sub>	0.0414	1.272 <sub>66</sub>	3.735 <sub>2</sub>	0.0408 <sub>6</sub>	1.256 <sub>323</sub>
2	3.238 <sub>627</sub>	0.0423 <sub>48</sub>	1.079 <sub>542</sub>	3.198 <sub>1</sub>	0.0443	1.082 <sub>28</sub>	3.338 <sub>6</sub>	0.0431 <sub>3</sub>	1.093 <sub>274</sub>
3	2.273	0.0457 <sub>6424</sub>	0.924 <sub>33</sub>	2.764 <sub>1</sub>	0.0471	0.916 <sub>560</sub>	2.859 <sub>6</sub>	0.0465 <sub>4</sub>	0.941 <sub>064</sub>
4	2.343	0.0497 <sub>80</sub>	0.781 <sub>00</sub>	2.343 <sub>7</sub>	0.0499	0.771 <sub>58</sub>	2.416 <sub>2</sub>	0.0499 <sub>4</sub>	0.796 <sub>39</sub>
5	1.950 <sub>49</sub>	0.0545 <sub>684</sub>	0.650 <sub>16</sub>	1.935 <sub>8</sub>	0.0567 <sub>5</sub>	0.640 <sub>57</sub>	1.994 <sub>9</sub>	0.0550 <sub>5</sub>	0.658 <sub>00</sub>
6	1.593 <sub>3</sub>	0.06037 <sub>60</sub>	0.531 <sub>100</sub>	1.575 <sub>7</sub>	0.0624	0.522 <sub>92</sub>	1.587 <sub>7</sub>	0.0624 <sub>3</sub>	0.523 <sub>70</sub>
7	1.272 <sub>2</sub>	0.0675 <sub>67</sub>	0.424 <sub>066</sub>	1.251 <sub>7</sub>	0.0687	0.417 <sub>99</sub>	1.213 <sub>1</sub>	0.0703 <sub>7</sub>	0.402 <sub>3</sub>
8	0.987 <sub>2</sub>	0.0767 <sub>025</sub>	0.329 <sub>066</sub>	0.922 <sub>1</sub>	0.0800	0.330 <sub>97</sub>	0.864 <sub>1</sub>	0.0828 <sub>6</sub>	0.286 <sub>5</sub>
9				0.595 <sub>3</sub>	0.113 <sub>5</sub>	0.255 <sub>726</sub>	0.532 <sub>4</sub>	0.108 <sub>97</sub>	0.177 <sub>5</sub>
10							0.256 <sub>4</sub>	0.149 <sub>3</sub>	0.072 <sub>57</sub>
11									

Fig. 2. Wave train of Solitons produced by  $A=(1+\cos \pi x)$  at time 10 TB referred to the starting time.Fig. 3. Wave train of Solitons produced by  $C=2.0\text{sech}^2 1.762\ 747x$  at 10TB referred to the starting time ( $1\text{TB}=1/\pi[\text{s}]$ ).

以上の結果  $A$  の計算機実験結果はソリトン等価波  $B$  に対するそれと同程度であるので、 $B$  によって発生するソリトン波列(従って  $A$  のそれら)と  $C$  によって発生するソリトン波列は近似的に等しいといって差支えない。

#### 4. 結 言

$KdV$  方程式に対して初期条件として入力する波形  $A$  が  $\text{sech}^2$  の形でない場合には、その解を解析的に求

めることができなかった。しかしこの  $A$  と高さならびに半値巾が同じ値を有する  $\text{sech}^2$  波  $C$  を初期値として採用すれば解析的に解が求められ、この解は  $A$  を入力した場合の解と近似したものになることが確かめられた。

#### 参 考 文 献

- 1) N.J. Zabusky and M.D. Kruskal: Physical Review Letters, Vol. 15, No. 6, p. 240 (1965).