

ソリトンの伝播と衝突

大 矢 征・中 野 義 映

Propagation and Collision of Solitary Waves

Susumu OHYA and Yoshiei NAKANO

Abstract

Simulation experiments on the phenomena of propagation and collision of Solitons were carried out by employing the computer FACOM-M170F, and the phenomena were analysed using the *KdV* equation and a non-linear repeated L-C circuit. It has been confirmed that the results of the simulation experiments shows a satisfactory agreement with the theoretical results.

1. ま え が き

ソリトン波の伝播, 衝突等については, 特別な場合に対する理論的解析解が得られているが, 一般的には解析困難な場合が多い。本論文では *KdV* 方程式上でのソリトンの伝播, 衝突などのふるまいを電算機を用いてシミュレーション実験を行って調査した結果を述べている。同時に非線形静電容量を有するコンデンサ素子およびインダクタンス素子で構成される反復 L-C 回路網上のソリトン波の諸現象についても述べている。

2. *KdV* Eq. でのソリトン波

2.1 伝播に対する DC 分* の影響

$$KdV \text{ Eq. : } u_t + auu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{入力波 : } 1 \operatorname{sech}^2 7.57575x + DC \quad (2.2)$$

ここに

$$\alpha = 1, \delta = 0.022, l = 5.0[\text{m}], \Delta T = 0.207 \times 10^{-3} \quad (2.3)$$

$$1\text{TB} = 1/\pi[\text{s}]. \quad (2.4)$$

s, A_n, Δ_n などを求めると¹⁾,

$$s = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{U_0}{\beta^2}} \right] = 2: 2 \text{波条件} \quad (2.5)$$

$$A_n = \frac{12\delta^2}{\alpha} (\beta \epsilon_n)^2, \quad \Delta_n = \sqrt{\frac{12\delta^2}{\alpha A_n}} \quad (2.6)$$

より, 2波の振幅と波幅定数は次のようになる。

$$A_0 = 1.333, \quad A_1 = 0.333 \quad (2.7)$$

$$\Delta_0 = 0.066, \quad \Delta_1 = 0.132 \quad (2.8)$$

ここで, DC 分を

$$DC = -0.0, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, \\ -0.5, -1.0, +0.1, +0.5, +1.0 \quad (2.9)$$

とし, ほかに

$$DC = -0.111 \text{ (} A_1 \text{波の停止)}, \\ -0.444 \text{ (} A_0 \text{波の停止)} \quad (2.10)$$

と変化させてみた。

この結果 $A_0, A_1, \Delta_0, \Delta_1$ 等には DC 分の影響は殆んどなく, 唯 DC 分の増加により, 僅かに振幅が減少することが判明した。速度の方は次式

$$v_n = \frac{\alpha A_n}{3} + DC \quad (n=0, 1) \quad (2.11)$$

に従う変化を示した。

DC を $-1.0 \sim +1.0$ の範囲で変化させた場合の 2 ソリトンの伝播の速度, 振幅を求めた結果を Table 1 に示す。

DC = -0.444 では A_0 波が停止し, DC = -0.111 のとき A_1 波が停止した。これらの数値は次式によって定まる。

$$-(A_0/3) = -0.444 \cdots, \quad -(A_1/3) = -0.111 \cdots$$

従って

$$-0.444 < DC < -0.111$$

の式を満足する DC 分の範囲内では A_0 波と A_1 波と

* DC 分: 直流分の意で, $x \rightarrow \infty$ 点での解 U_∞ と同じものである。

Table 1. Effect of DC component.

入力波: $u_0(x) = \text{sech}^2 7.57575x + DC$ (2波条件)発生波: $u(x) = A_0 \text{sech}^2 \beta_0(x - v_0 t) + A_1 \text{sech}^2 \beta_1(x - v_1 t)$

DC	振 巾		速 度			
	A_0 OBS	A_1 OBS	v_0 OBS	v_{0cal} ($A_0/3 + DC$)	v_1 OBS	v_{1cal} ($A_1/3 + DC$)
-1.0	1.380	0.352	-0.554	-0.574	-0.884	-0.889
-0.5	1.368	0.341	-0.0559	-0.065	-0.387	-0.388
-0.4	1.358	0.340	0.0441	0.0347	-0.288	-0.290
-0.3	1.355	0.338	0.144	0.137	-0.188	-0.189
-0.2	1.352	0.335	0.243	0.238	-0.0888	-0.0893
-0.1	1.348	0.334	0.343	0.338	0.0107	0.0103
0.0	1.343	0.330	0.443	0.455	0.1102	0.1090
0.1	1.341	0.329	0.543	0.542	0.210	0.210
0.5	1.328	0.319	0.941	0.946	0.607	0.610
1.0	1.308	0.311	1.440	1.454	1.105	1.110
-0.111	1.348	0.334	0.332	0.327	-0.000	-0.001
-0.444	1.359	0.341	-0.000	-0.010	-0.332	-0.334

注: 添字 cal は計算値, 同 OBS は実験値

は逆方向に進むので, 見掛け上の正面衝突を起すことになる。

2.2 追 突

KdV Eq. においては2波の正面衝突は起らない。Table 1に見る通り, DC 分の大きさにより v_0 が正, v_1 が負になると見掛け上は正面衝突のような衝突をするが, 実質的には追突と変らない。

2波の追突は, それらの速度差(相対速度)によって発生するのであるから振幅の相等しい2波が相互に追突することはあり得ない。

追突の現象は分裂現象の逆現象であることが計算機実験によって確かめられる。分裂は次のように集約される。

$$KdV \text{ Eq: } u_t + auu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (2.12)$$

$$\text{初期条件: } u_0 = U_0 \text{sech}^2 \beta x \quad (2.13)$$

$$s = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{U_0}{\beta^2}} \right] = 2 \quad (2\text{波分裂}) \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_n = 2, 1 \quad (n=0, 1) \quad (2.15)$$

$$\text{分裂第1波: } A_0 \text{sech}^2 \beta_0(x - v_0 t): \text{ソリトン} \quad (2.16)$$

$$\text{分裂第2波: } A_1 \text{sech}^2 \beta_1(x - v_1 t): \text{ソリトン} \quad (2.17)$$

$$A_n = \frac{12\delta^2}{\alpha} (\beta \varepsilon_n)^2 \quad (2.18)$$

$$A_n = \sqrt{\frac{12\delta^2}{\alpha A_n}} \quad (2.19)$$

$$v_n = \frac{\alpha A_n}{3} \quad (2.20)$$

次に, この分裂の逆現象として, 追突の現象の解を試みる。(2.16), (2.17)の2波をそれぞれ相異なる位置に置いて, 伝播させると, これら2波の相対速度によって, 2波の間の距離は短縮していき, 遂には追突が発生して, (2.13)で示される波形の波ができる。

いま第1波としては(2.16)を用い, 第2波としては, (2.17)の代りに

$$A_2 \text{sech}^2 \beta_2(x - v_2 t): \text{ソリトン} \quad (2.21)$$

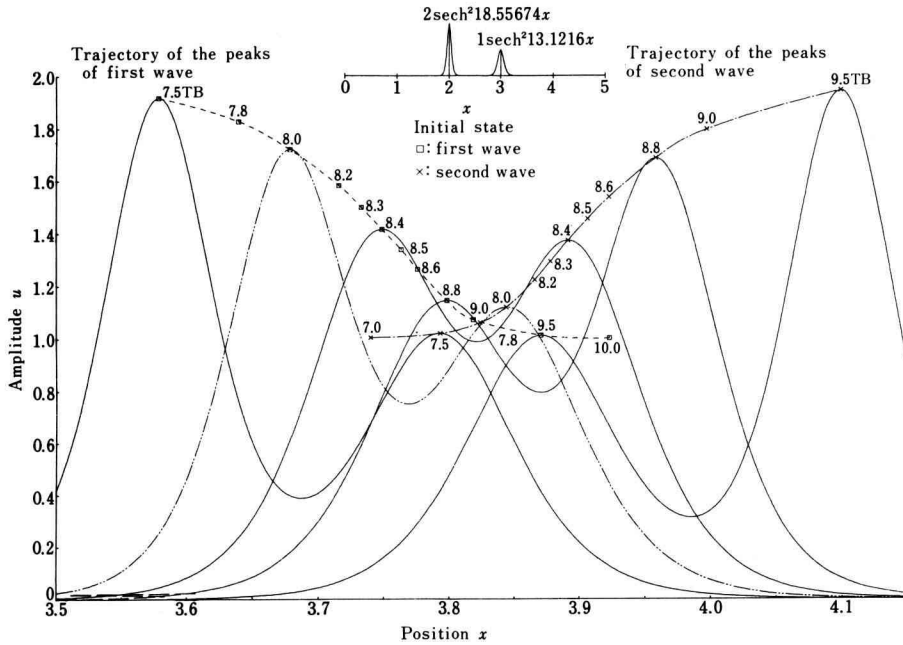
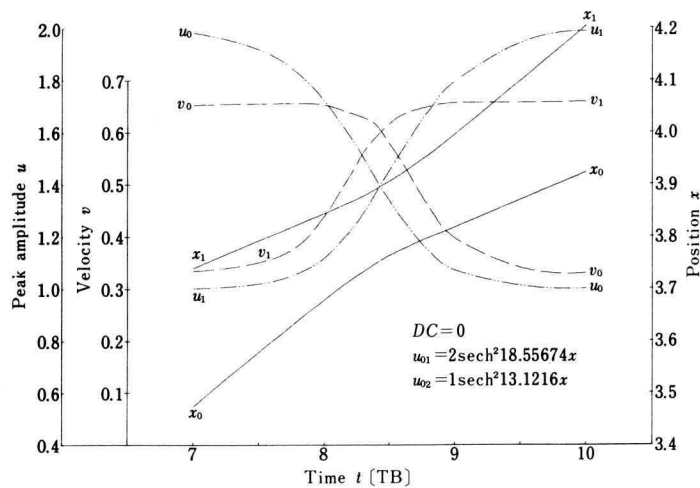
を用いたとする。 $A_0 > A_2 > A_1$ の場合には追突によって発生する波は, もちろん(2.13)とは異なるが, ピークが双峰性の波形(2瘤駱駝の瘤のような)の波を発生する(Fig. 1~Fig. 3)。もし $0 < A_2 \leq A_1$ ならば, 単峰性の波となる(Fig. 4)。

(2.17)式のような A_1 の値を臨界値(critical value)と呼ぶこととした。

計算機実験(1)

第1波: $2.0 \text{sech}^2 18.55674x$: ソリトン

第2波: $1.0 \text{sech}^2 13.1216x$: ソリトン

Fig. 1 (a) Overtaking phenomenon of two Solitons, when $DC=0.0$.Fig. 1 (b) Time variations of two Solitons, x : position, u : peak amplitude, v : velocity $1TB=1/\pi$ [s].

The suffix 0 denotes "of the first wave", and the suffix 1 denotes "of the second wave".

When the peak amplitude of Soliton with the lower height exceeds the critical value, two peaks with the same height appear at collision.

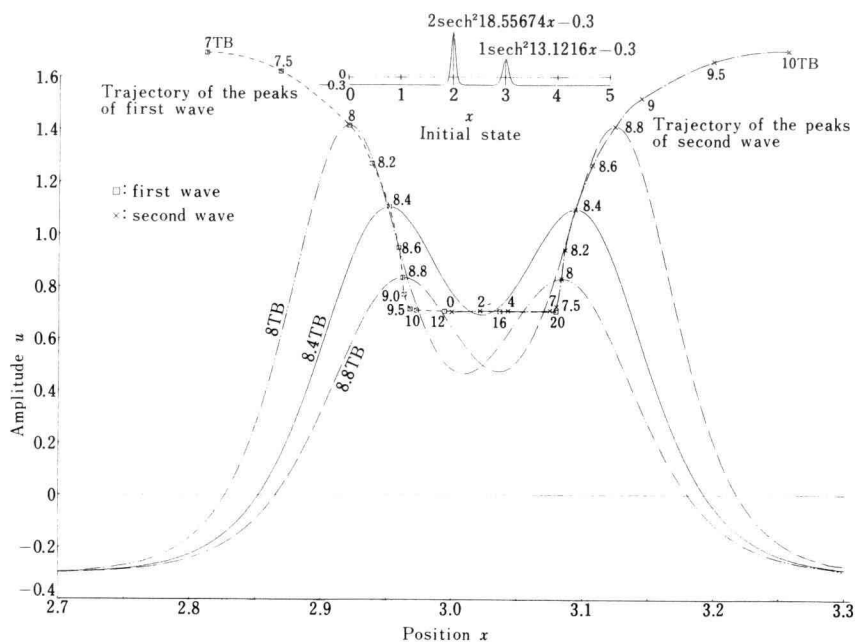
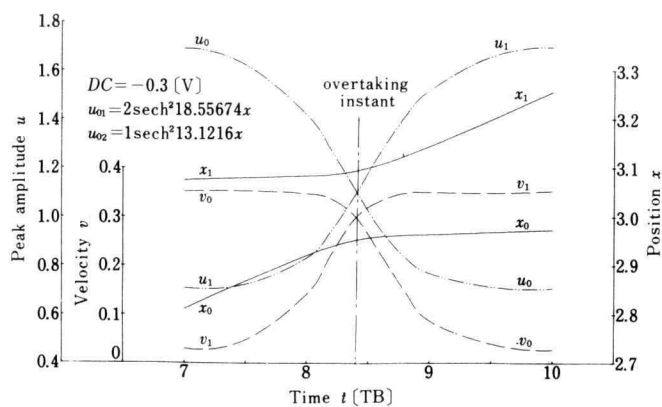
Fig. 2 (a) Overtaking phenomenon of two Solitons, when $DC = -0.3$.

Fig. 2 (b) Time variation of two Solitons,
 x : position, u : peak amplitude, v : velocity.
 The suffix 0 denotes "of the first wave", and the suffix 1 denotes "of the second wave".

$DC = 0.0, -0.3, -0.5$

図示: Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3

計算機実験 (2)

第1波: $2.0 \operatorname{sech}^2 18.55674x$: ソリトン

第2波: $0.5 \operatorname{sech}^2 9.278370x$: ソリトン (臨界値)

$DC = 0.0$

図示: Fig. 4

2.3 Zabusky の実験²⁾

これは狭い領域に数多いソリトンを発生させたもので、その追突は頻繁に多数回発生し現象は極めて複雑となる。

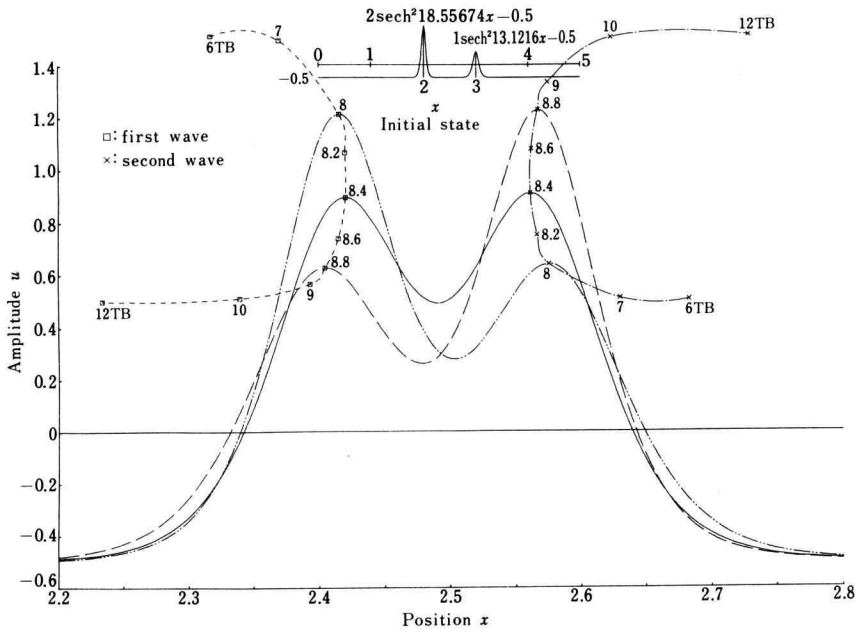
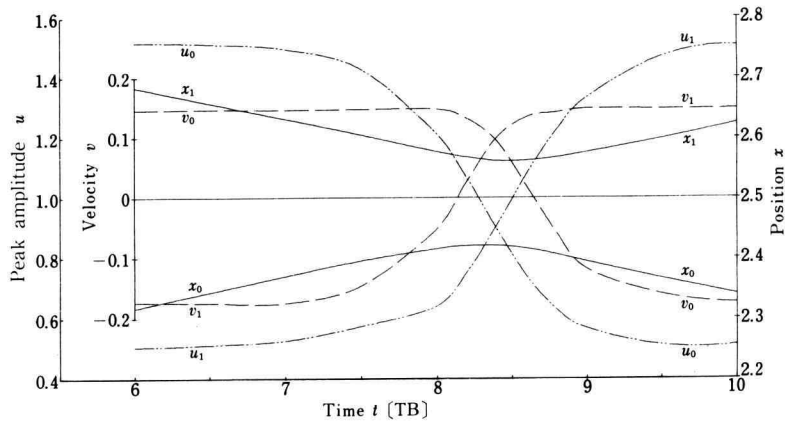
Fig. 3(a) Overtaking phenomenon of two Solitons, when $DC = -0.5$.

Fig. 3(b) Time variation of two Solitons,
 x : position, u : peak amplitude, v : velocity.
 The suffix 0 denotes "of the first wave", and the suffix 1 denotes "of the second wave".

初期条件: $u_0(x) = \cos \pi x$ ($x=0 \sim 2$ の領域) の場合。

これは約 15 波のソリトンに分裂するが, 3.6 TB (= $3.6/\pi$ 秒) あたりまでの比較的干渉の少ない時間領域では 9 波の分裂が認められる。この場合の 7.2 TB までの各波の振幅の変化を示すと Fig. 5 のようになる。

著者等はその初期条件を変えて, $x = -2.5 \sim +2.5$ の領域として実験を試みた。すなわち,

$$u_0(x) = \cos \pi x, \quad -1 < x < +1$$

$$u_0(x) = 0, \quad -2.5 < x < -1$$

$$u_0(x) = 0, \quad +1 < x < +2.5$$

とした。このようにすれば, Zabusky の場合に比して

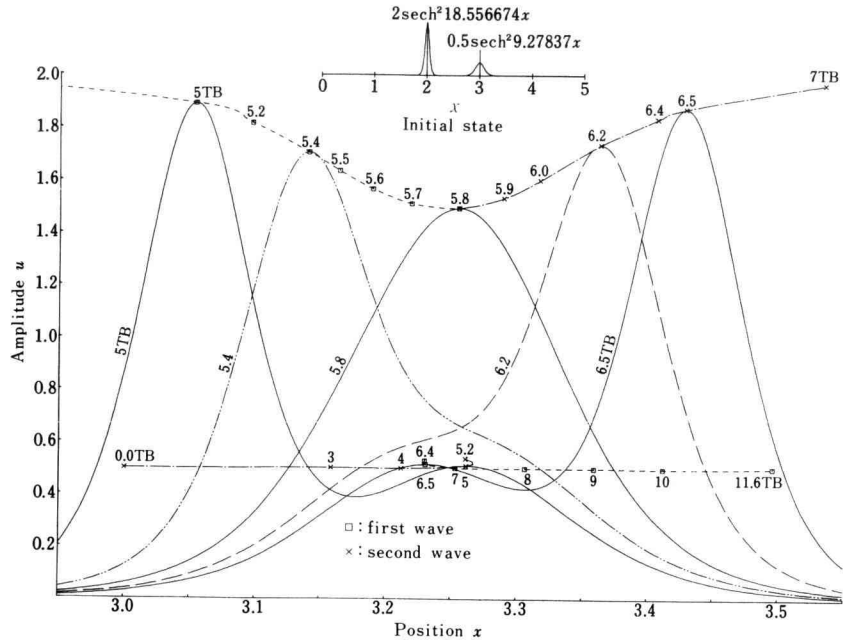


Fig. 4 (a) Overtaking phenomenon of two Soliton, which produces one Solitary wave, when $DC=0$.

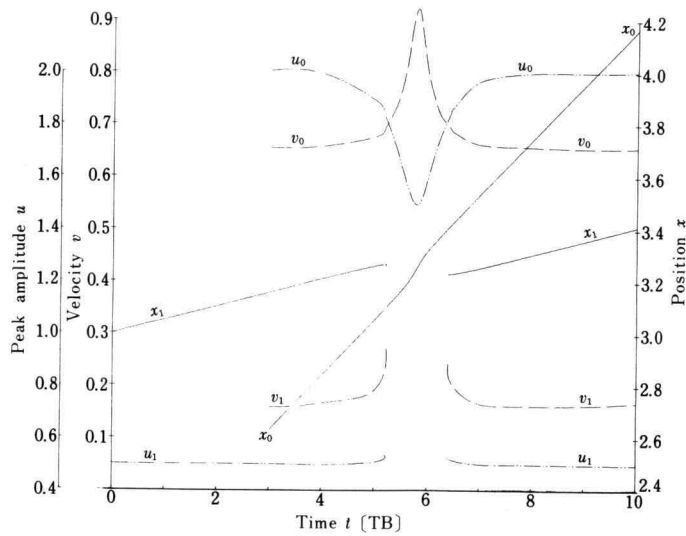


Fig. 4 (b) Time variation of two Solitons,
 x : position, u : peak amplitude, v : velocity.
 The suffix 0 denotes "of the first wave", and the suffix 1 denotes "of the second wave".
 When the peak amplitude of lower height Soliton is under critical value, its trajectory vanishes at the near region of colliding instant.

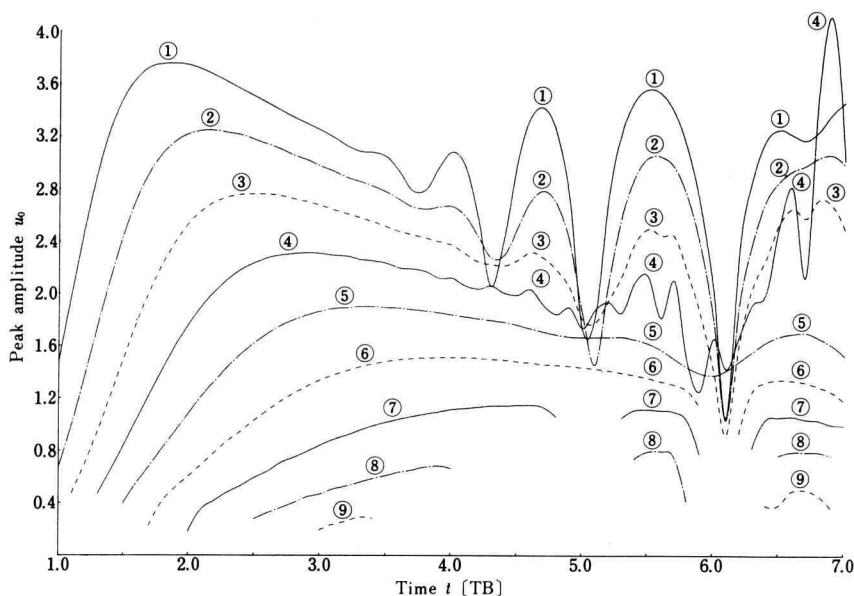


Fig. 5. Peak variations of 9 Solitons produced from initial wave of $\cos \pi x$, in Zabusky Experiments.

干渉は起り難く (別論文⁴⁾の Fig. 2) なり ① ② ③ ④ ……の諸波の振幅は 0~10 TB の時間領域で殆んど一定不変となった。すなわち各波の peak 値は当初は増大していくが、一度 peak が最大値に達すると、このあとは最大値を保持して不変であることが分かった。

3. 非線形反復回路網でのソリトン波

3.1 反対方向に進む 2 ソリトンの衝突

単独に進行しているソリトン波では電圧 V と電流 I とは殆んど同位相で、 $V/I=z$ とすると、 z はそのソリトンに関しては殆んど一定値である。 z をインピーダンスと仮称する。

2 つの同一波形のソリトン波 (q) の電流 (I) が正值ならば右進し、同じく負値ならば左進する。この場合は 2 つのソリトンは正面衝突を起こし、電圧 (V) は 2 倍の大きさとなるが電流は 0 となる。

計算機実験：電気回路：Fig. 6 case (a) 参照

第 1 波： $q_{01}(x)=0.1 \operatorname{sech}^2 0.40(x-100.0)$ 右進

第 2 波： $q_{02}(x)=0.1 \operatorname{sech}^2 0.40(x-120.0)$ 左進

線 路： $L=4 \times 10^{-6}[\text{H}/\text{m}]$

$C_0=134 \times 10^{-12}[\text{F}/\text{m}]$

非線形定数： $a=0.40, b=0.60$

$V_0=0.6408986[\text{V}]$

x のきざみ $\Delta x=0.5[\text{m}/\text{段}]$

t のきざみ $\Delta t=0.116 \times 10^{-8}[\text{s}]$

の条件では

$$\alpha = \frac{a}{2} = 0.20, \delta^2 = (\Delta x)^2 / 24 = 0.5^2 / 24$$

となり、得られた衝突波形 $q_0(x)$ は

$$q_0(x) = 0.2 \operatorname{sech}^2 0.40(x-110.0)$$

半値幅 $w=4.42, \Delta=4.42/1.762=2.5085$

$\beta=1/\Delta=0.398642$

速度 $v=43.637 \times 10^6[\text{m}/\text{s}]$

$$\text{速度 (計算): } v_{\text{cal}} = \frac{h}{\sqrt{hL \cdot hC_0}} \left(1 + \frac{aA}{6}\right) = 43.348 \times 10^6[\text{m}/\text{s}]$$

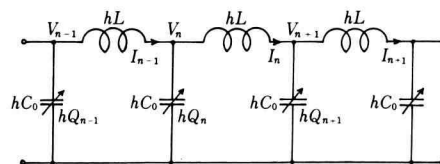


Fig. 6. Non-linear repeated lumped circuit.

case (a): $hL=2 \times 10^{-6} [\text{H}/\text{段}]$,

$hC_0=67 \times 10^{-12} [\text{F}/\text{段}]$

case (b): $hL=1 \times 10^{-6} [\text{H}/\text{段}]$,

$hC_0=33.5 \times 10^{-12} [\text{F}/\text{段}]$,

$h \equiv \Delta x=0.5 [\text{m}/\text{段}]$

となる。

初期状態とその $0.99 \text{ TB} = 2.292 \times 10^{-6} [\text{s}]$ 後の波形 (q, V, I の3波) を Fig. 7 に示す。図を見ると分かるように I は右進波では正值, 左進波では負値となっている。

3.2 同方向に進む2ソリトンの追突

KdV Eq. で行った計算機実験と殆んど同様のことが観察された。唯ソリトンの速度差が非常に小であるため, 追突するには非常に時間がかかり, 大量の計算を必要とすることになる。

計算機実験: 電気回路 Fig. 6 case (b)

第1波の電荷式: $q_{01}(x)$

$$= 0.4 \operatorname{sech}^2 0.80(x - 100.0) \quad (1 \text{ 波条件})$$

第2波の電荷式: $q_{02}(x)$

$$= 0.2 \operatorname{sech}^2 0.565685425(x - 107.0) \quad (1 \text{ 波条件})$$

第1波の電流, 第2波の電流共に正值

線路: $L = 2 \times 10^{-6} [\text{H/m}]$,

$$C_0 = 67 \times 10^{-12} [\text{F/m}]$$

非線形定数 $a = 0.4, b = 0.6$

$$V_0 = 0.6408986 [\text{V}]$$

x きざみ $\Delta x = 0.5 [\text{m/段}]$

t きざみ $\Delta t = 0.116 \times 10^{-8} [\text{s}]$

$$\alpha = a/2 = 0.20, \delta^2 = (\Delta x)^2/24 = 0.5^2/24$$

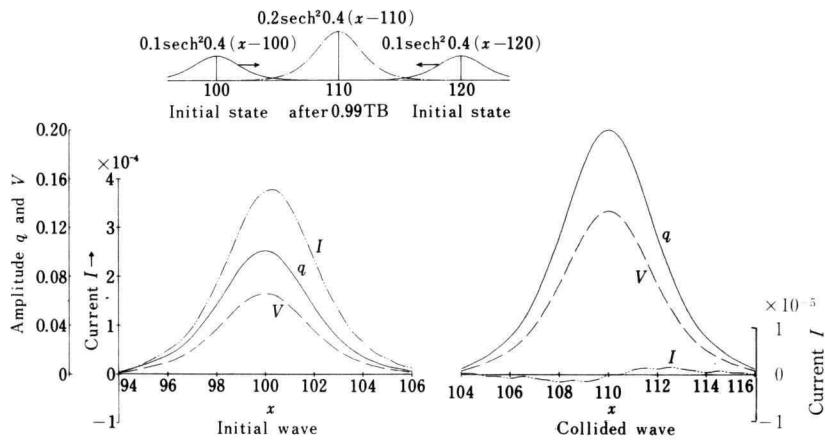


Fig. 7. Head-on collision of two solitons with the same wave forms.

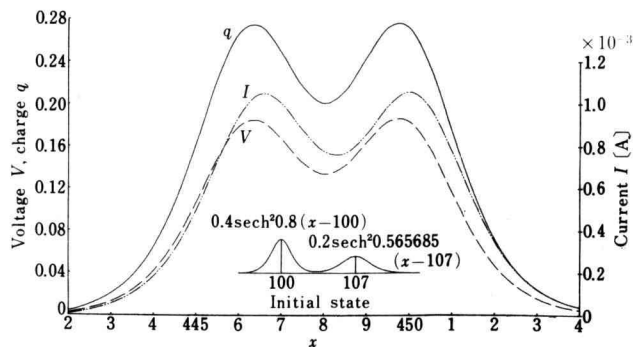
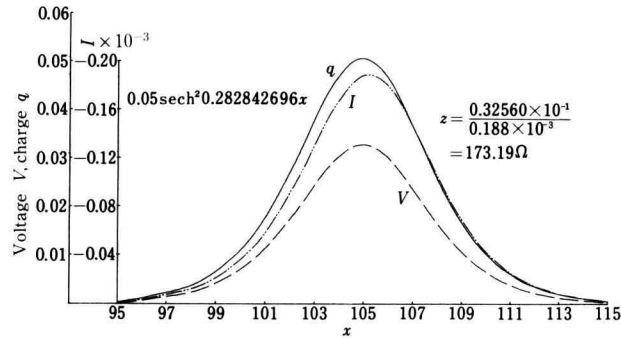


Fig. 8. Overtaking phenomenon of two Solitons travelling in the same direction.
Time $t = 16.9 \text{ TB}$ referred to the starting time, $1 \text{ TB} = 200 \times \Delta T = 2.31516 \times 10^{-6} [\text{s}]$
 x : position of equivalent uniform line, $x = n \cdot \Delta x$, n : number of stages,
 Δx : equivalent line length of one section.

* $1 \text{ TB} = 200 \times \Delta T = 2.315167 \times 10^{-6} [\text{s}]$

Fig. 9. A single Soliton wave form at $t=1.0TB$ Table 2. Relation between U_0 , β , z_{OBS} , z_{cal} and k .

振巾 U_0	1/ (波巾定数) β	インピーダンス (実験値) $z_{OBS} [\Omega]$	角周波数 ω_1	波 数 k	インピーダンス 計算値 $z_{cal} = z_0 [1 - \sin^2(\frac{k}{2})]^{-1/2}$
0.05	0.2828 426 96	173.19	4.369×10^7	0.1605	173.33
0.10	0.400	174.79	6.199×10^7	0.2270	173.89
0.20	0.565 685 425	176.21	8.825×10^7	0.3209	175.02
0.25	0.632 455 532	176.87	9.899×10^7	0.3588	175.59
0.3	0.692 820 323	177.75	10.880×10^7	0.3982	176.26
0.4	0.800	179.98	12.645×10^7	0.4539	177.32
0.5	0.894 427 910	181.77	14.229×10^7	0.5074	178.49
0.6	0.979 795 897	182.22	15.688×10^7	0.5558	179.67
0.7	1.058 300 524	184.00	17.054×10^7	0.6002	180.85
0.8	1.131 370 850	186.54	18.347×10^7	0.6418	182.07
0.9	1.200	188.71	19.584×10^7	0.6807	183.29
1.0	1.264 911 064	189.24	20.773×10^7	0.7174	184.52
1.2	1.385 640 646	190.60	23.040×10^7	0.7862	187.04
1.6	1.600	192.66	27.261×10^7	0.9077	192.22

のとき得られた結果は Fig. 8 に示すように、2 瘤の山が現われた。この両ピークが同じ高さになった時点が追突瞬時である。

3.3 インピーダンスの測定 Fig. 6 case (b)

1 波条件を満足するソリトン

$$u_0(x) = U_0 \operatorname{sech}^2 \beta(x - vt)$$

を用いて、 U_0 を 0.1~3.2 の範囲で変化させて、電圧 V 、電流 I のピーク値を求めて、その比からインピーダンス z_{OBS} を求めた。

$$z_{OBS} = \frac{V_{\text{peak}}}{I_{\text{peak}}}$$

実験結果の 1 例は Fig. 9 に示す通り V_{peak} と I_{peak} との間には、 $1 \times \Delta x$ 分の“ずれ”が認められるが、こ

れは計算のアルゴリズムによるもので止むを得ない。

その結果は Table 2 に示すように集約される。この表中 $\omega_1 = 2\pi f$ で、 f の求め方は次の通りである。速度を v 、半値幅を w 、半周期を T とすると

$$v = v_M \left(1 + \frac{aU_0}{6} \right)$$

$$\beta v T = \operatorname{sech}^{-1}(\sqrt{0.5}) = 0.881373587$$

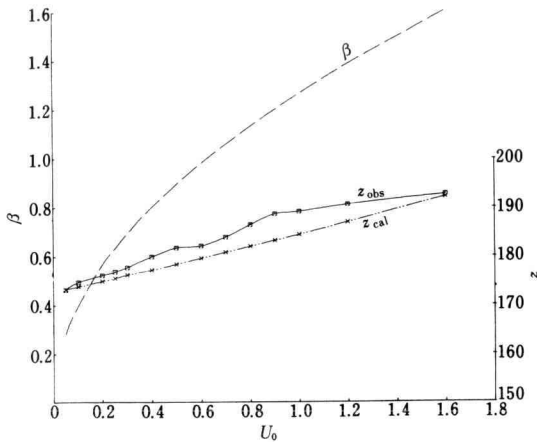
$$\omega_1 \equiv 2\pi f = 2\pi / 4T$$

k を波数、 λ を波長とすれば

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{w}$$

$$w = 2Tv = \frac{2}{\beta} (0.881373587)$$

インピーダンス z を表わす式³⁾は

Fig. 10. z_{obs} , z_{cal} and β vs. U_0 .

$$z = z_0 / \sqrt{1 - \frac{1}{4} \omega^2 (hL \cdot hC_0)}$$

$$\omega = \omega_c \sin\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{hL \cdot hC_0}}$$

故に

$$z = z_0 / \left[1 - \sin^2\left(\frac{k}{2}\right) \right]^{1/2}$$

ここに

$$z_0 = \sqrt{hL/hC_0} = \sqrt{2 \times 10^{-6} / 67 \times 10^{-12}} = 172.7737 \Omega$$

を用いた。

この結果を Fig. 10 に示す。

4. 結 言

KdV 方程式および Non-linear Repeated LC Circuit を用いて、シミュレーション実験を行なった。その結果は理論的結果とかなりよい一致を示すことが認められた。

この実験を行なうに当っては幾徳工業大学内に新設された FACOM M-170 F システムを中心とする電子計算センターに負うところが大きく、この設置に尽瘁された大学長谷下市松博士、電子計算センター所長木名瀬亮博士をはじめとする各委員の諸氏に感謝の意を表したい。

またソリトン研究の当初、多数の資料と示唆を戴いた東京工業大学助教授南一夫博士、本学講師荻原照男博士にもお礼を申し上げたい。

参 考 文 献

- 1) 中野・大矢：応用物理，第 49 巻，12 号，p. 1244 (1980).
- 2) N.J. Zabusky and M.D. Kruskal：Physical Review Letters, Vol. 15, No. 6, p. 240 (1965).
- 3) H. Nagashima and Y. Amagishi：J. Phy. Soc. Japan, Vol. 45, No. 2, August, p. 680 (1978).
- 4) 大矢・中野：幾徳工業大学研究報告，B-9，p. 43 (1985).