

# 地中にある絶縁された大地帰路導体間の 相互インピーダンスの数値計算

大 矢 征・森 武 昭

Numerical Calculation of Mutual Impedance between Insulated Earth-Return  
Conductors below Surface of Earth

Susumu OHYA and Takeaki MORI

## Abstract

An analytical expression for the earth-return mutual impedance between two insulated parallel conductors below surface of earth has been obtained by Pollaczek. That results is expressed by an integral form and a Hankel's function. Since the calculation is very complicated, authors represent several figures to obtain the approximate value of the impedance in this paper. Furthermore, as the practical method, we discussed the approximate expansion equations by numerical calculation. These results must be available for practical purposes.

## 1. ま え が き

電力系統の大容量化や長距離化が進むと共に、情報量の増大による通信線網の拡充がはかられており、今後ますます電磁誘導電圧による障害が多発するものと予想される<sup>1)</sup>。特に都市部においては、電力線および通信線の地下ケーブル布設、あるいは共同溝を利用した併設などの事例が多くなってきているので、2導体とも地中にある場合の大地帰路相互インピーダンスの値を把握しておく必要がある。従来、2導体が大気中にある場合や、一方が地中に埋設された場合の大地帰路相互インピーダンスは、CarsonやPollaczekによって解析されている<sup>2),3)</sup>。そして、一方が地中にある場合の近似式については、著者らによって報告されている<sup>4),5),6)</sup>。ところが、2導体とも地中にある場合の値は、一方が地中にある場合の式に補正項を加えて求められるが、この計算は相当煩雑であり、実用的な取り扱い方法が未だ与えられていないのが現状である。

そこで、本論文では、2導体とも地中にある場合の大地帰路相互インピーダンスの値を、図および近似式を用いて表わし、その近似精度について検討を行った。こ

れらの図や近似式は、電磁誘導対策に携わる実務者がその概略値を知る際に有用である。

## 2. 地中導体間の大地帰路相互インピーダンス

### 2.1 厳密解について

一様な大地の中にあると仮定した無限長絶縁導体間の大地帰路相互インピーダンスについて、Pollaczekは円柱座標系を用いて電磁界方程式を低周波数領域について解析している<sup>3)</sup>。Fig. 1は2本の無限長導体 $C_1$ 、 $C_2$ が、それぞれ地中 $g_1$ 、 $g_2$  [m]の深さに、水平離隔距離 $x$  [m]で埋設されている状態を示す導体配置図である。 $C_2$ の地表面に対する影像を $C_2'$ とし、 $C_1C_2$ 間および $C_1C_2'$ 間を

$$\overline{C_1C_2} = r_{12} = \sqrt{x^2 + (g_1 - g_2)^2} \quad (\text{離隔距離})$$

$$\overline{C_1C_2'} = r_{12}' = \sqrt{x^2 + (g_1 + g_2)^2} \quad (\text{実効距離と呼ぶ})$$

とおくと、 $C_1C_2$ 間の単位長当りの大地帰路相互インピーダンス  $Z_m$  [ $\Omega/\text{km}$ ] は(1)式で表わされる。

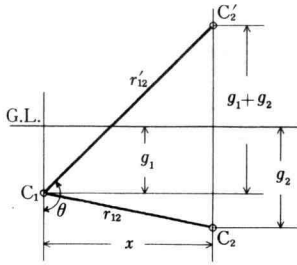


Fig. 1. Arrangement of two insulated parallel conductors below surface of earth.

$$\begin{aligned}
 Z_m &= Z_{mp} + Z_{mH} \\
 &= \frac{2j\omega \times 10^{-4}}{k^2} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{j\lambda s - (g_1 + g_2)\sqrt{s^2 - k^2}} \right. \\
 &\quad \cdot (-s - \sqrt{s^2 - k^2}) ds \\
 &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{j\lambda s - (g_1 + g_2)\sqrt{s^2 - k^2}} (s - \sqrt{s^2 - k^2}) ds \right\} \\
 &\quad + \pi\omega \times 10^{-4} \{ H_0^{(1)}(kr'_{12}) - H_0^{(1)}(kr_{12}) \}
 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで,  $k = \sqrt{\omega\mu\sigma} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \pi$  であり,  $\omega = 2\pi f$  [rad/s],  $f$  は周波数 [Hz],  $\mu$  は透磁率 [H/m],  $\sigma$  は大地導電率 [S/m],  $j = \sqrt{-1}$  である。

第1項  $Z_{mp}$  について, Carson は Pollaczek と同時期に (2) 式を発表している<sup>2)</sup>。

$$Z_{mc} = \omega \times 10^{-4} \int_0^{\infty} 4(\sqrt{\nu^2 + j} - \nu) \cos x' \nu e^{-g'\sqrt{\nu^2 + j}} d\nu \quad (2)$$

ここで,  $x' = |k|x$ ,  $g' = |k|(g_1 + g_2)$  である。

(1) 式の第2項  $Z_{mH}$  は第1種ハンケル関数を用いて求められる。

## 2.2 近似式について

(1) 式の第1項を精度良く数値積分することは膨大な計算時間を要する。以下に2つの近似方法を示し, 第3章でこれらの近似計算値の精度について検討する。

### (1) Pollaczek が示した近似式

(1) 式の  $Z_{mp}$  の近似式として, Pollaczek は種々の条件における式を提案している。本論文では比較的浅く埋設された場合を想定して (3), (4) 式を用いる。

$$\begin{aligned}
 Z_{p1} &= j\omega \times 10^{-4} \left[ \left\{ \frac{(ky)^2}{2} + \frac{(kx - jky)^2}{8} - 1 \right\} \right. \\
 &\quad \cdot \ln \frac{\gamma(kx + jky)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left\{ \frac{(ky)^2}{2} + \frac{(kx + jky)^2}{8} - 1 \right\} \ln \frac{\gamma(-kx + jky)}{2} \\
 &+ 1 - \frac{4jky}{3} - \frac{1}{16} \{ 5(kx)^2 + 19(ky)^2 \} \} \quad (3)
 \end{aligned}$$

ここで,  $y = -(g_1 + g_2)$ ,  $\gamma = 1.78107 \dots$  (Bessel の定数) である。

$|kx| > 1$  の場合,

$$Z_{p2} = j\omega \times 10^{-4} \cdot e^{-jky} \left\{ -\frac{4}{(kx)^2} + \frac{12jky}{(kx)^4} \right\} \quad (4)$$

### (2) 実効距離を用いる方法<sup>6)</sup>

2 導体が比較的浅く埋設されている場合, 実効距離  $r'_{12} = \sqrt{x^2 + (g_1 + g_2)^2}$  の間隔で地面上にあるものと仮定して,  $\theta = 90^\circ$  のときの級数展開した近似式を用いて  $Z_{mp}$  を指定する方法である。この方法は, 実数部と虚数部が明確に分離されているので, 理解しやすい形となっている。

(a)  $r < 6$  のとき ( $r = |k|r'_{12}$ )

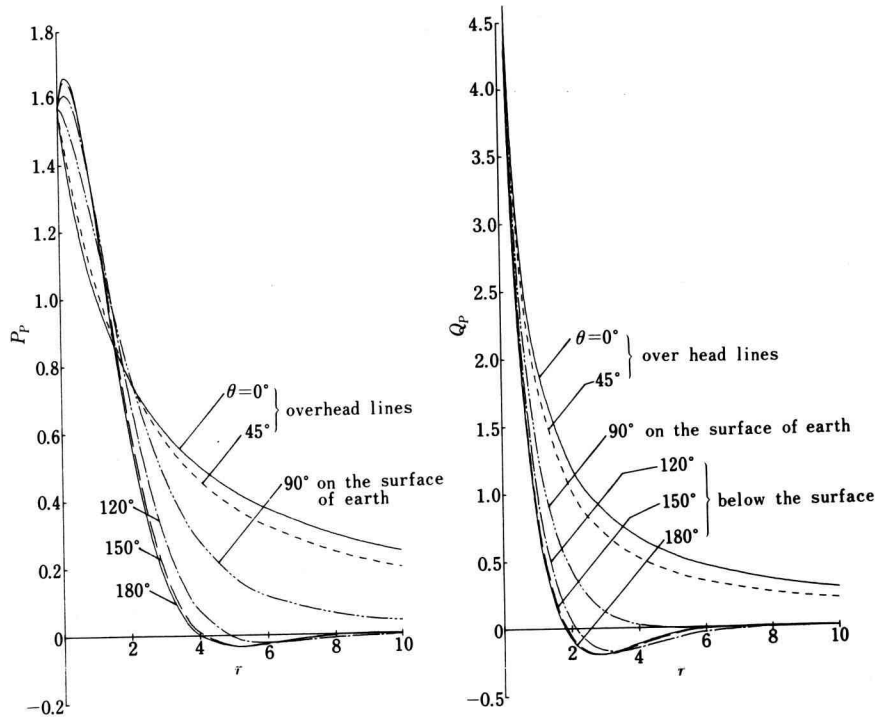
$$\begin{aligned}
 Z_{e1} &= 4\omega \times 10^{-4} \left\{ \frac{\pi}{8} (1 - S_4) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2}{\gamma r} \right) S_2 + \frac{1}{2} \sigma_2 \} \\
 &\quad + j4\omega \times 10^{-4} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{8} S_2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2}{\gamma r} \right) (1 - S_4) - \frac{1}{2} \sigma_4 \right\}
 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで,  $S_2, S_4, \sigma_2, \sigma_4$  は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
 S_2 &= - \sum_{n=2,6,10,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-2}{4}} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^n}{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}+1\right)!} \\
 S_4 &= \sum_{n=4,8,12,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-4}{4}} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^n}{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}+1\right)!} \\
 \sigma_2 &= - \sum_{n=2,6,10,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-2}{4}} \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{i+1}\right) - \frac{1}{n+2}}{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}+1\right)!} \left(\frac{r}{2}\right)^n \\
 \sigma_4 &= \sum_{n=4,8,12,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-4}{4}} \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{i+1}\right) - \frac{1}{n+2}}{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}+1\right)!} \left(\frac{r}{2}\right)^n
 \end{aligned}$$

(b)  $r > 6$  のとき

$$Z_{e2} = \frac{4\omega \times 10^{-4}}{r^2} + j0 \quad (6)$$


 Fig. 2. Characteristics of  $r-P_p$  and  $r-Q_p$  ( $Z_{pm} = (P_p + jQ_p) \times \omega \times 10^{-4}$  [ $\Omega/\text{km}$ ]).

なお,  $Z_{mH}$  の近似は Hankel 関数を級数展開した (7) 式を用いて近似できる。

$$H_0^{(1)}(u) = J_0(u) + jY_0(u) \quad (7)$$

ここで,  $J_0(u)$ ,  $Y_0(u)$  はそれぞれ第 1 種および第 2 種の 0 次ベッセル関数で, 次のように表わせる。

$$J_0(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{2}\right)^{2n} / n! \quad (8)$$

$$Y_0(u) = \frac{2}{\pi} \left[ J_0(u) \ln \frac{\gamma u}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^{2n}}{n!} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i}\right) \right] \quad (9)$$

特に,  $r$  がごく小さな値のときは

$$Z_{mH} = 0 + j\omega \times 10^{-2} \times 2 \ln \frac{r'_{12}}{r_{12}} \quad (10)$$

で近似できる。

### 3. 数値計算結果

#### 3.1 Pollaczek の式の図表示

(1) 式の第 1 項  $Z_{mp}$  を  $(P_p + jQ_p) \times \omega \times 10^{-4}$  [ $\Omega/\text{km}$ ] とおくと,  $P_p$ ,  $Q_p$  は  $r$  と  $\theta = \tan^{-1} \{ |x| / -(g_1 + g_2) \}$  を用いて Fig. 2 のように表わすことができる。 $\theta = 90^\circ$  の場合は 2 導体が地表面上にあるときで, この値は 2 導体が大気中にあるときの計算式で, 高さを 0 とした場合の値と一致する。 $90^\circ < \theta < 180^\circ$  は地中の場合,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  は大気中の場合であり,  $r=0$  のときは,  $P_p = \pi/2$ ,  $Q_p = 21.79$  となる。

第 2 項  $Z_{mH}$  を  $(P_H + jQ_H) \times \omega \times 10^{-4}$  [ $\Omega/\text{km}$ ] とおくと,  $P_H$ ,  $Q_H$  は Fig. 3 で表わせる。この値はパラメータに  $\theta$  をとることができないので,  $r_{12}/r'_{12}$  をパラメータとしている。なお, 2 導体のうち一方でも地表面上にある場合は,  $P_H$ ,  $Q_H$  ともに 0 になる。

#### 3.2 近似計算とその精度

2.2 節で述べた近似式 (3)~(6) に  $Z_{mH}$  を加えた値

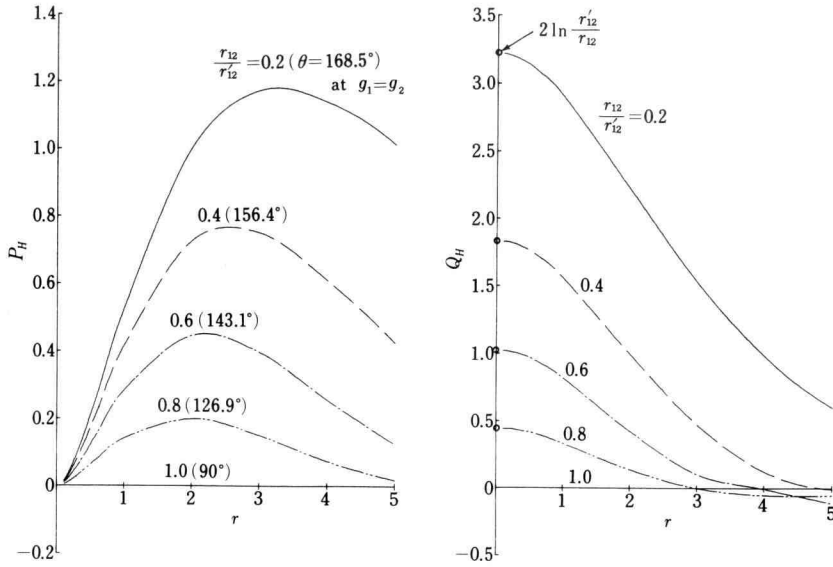


Fig. 3. Characteristics of  $r$ - $P_H$  and  $r$ - $Q_H$  ( $Z_{mH} = (P_H + jQ_H) \times \omega \times 10^{-4}$  [ $\Omega/\text{km}$ ]).

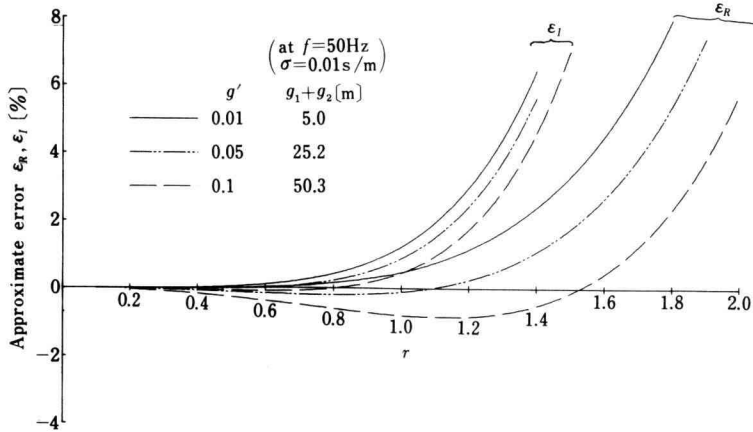


Fig. 4. Approximate error vs.  $r$  at eq. (3)

(総称  $Z_{ap}$  とする)が (1) 式の  $Z_m$  をどの程度近似しているかを検討するため、実数部と虚数部のそれぞれについて、(11), (12) 式を用いて近似誤差率として算出した。

$$\epsilon_R = \frac{\text{Re}(Z_{ap}) - \text{Re}(Z_m)}{\text{Re}(Z_m)} \times 100 [\%] \quad (11)$$

$$\epsilon_I = \frac{\text{Im}(Z_{ap}) - \text{Im}(Z_m)}{\text{Im}(Z_m)} \times 100 [\%] \quad (12)$$

Fig. 4 は (3) 式を用いたときの  $r$  に対する  $\epsilon_R$  と  $\epsilon_I$  を  $g'$  をパラメータとして示したものである。 $r < 1$  では  $\epsilon_R, \epsilon_I$  とも  $\pm 2\%$  以内となり、非常に良く近似しているといえる。実際の深さは  $f=50\text{ Hz}$ ,  $\sigma=0.01\text{ S/m}$  のときには、 $g'=0.01, 0.05, 0.1$  に対して  $g_1+g_2=5, 25.2, 50.3\text{ m}$  である。一方、(4) 式による近似は、実数部は  $r < 6$  で  $\pm 4\%$  以内となる。虚数部は  $r < 4$  では

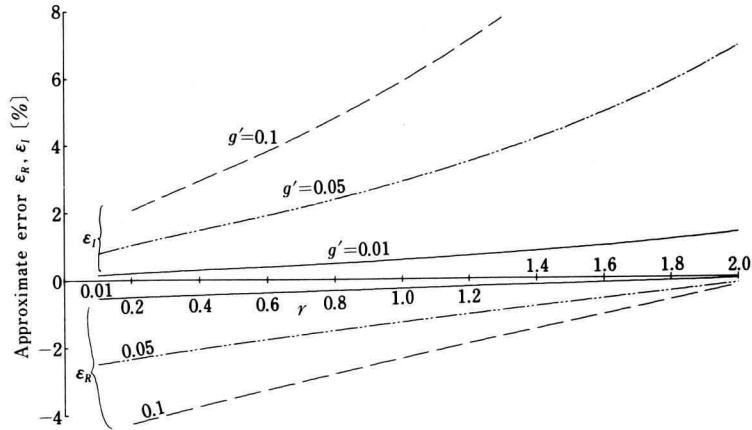


Fig. 5. Approximate error vs.  $r$  at eq. (5)

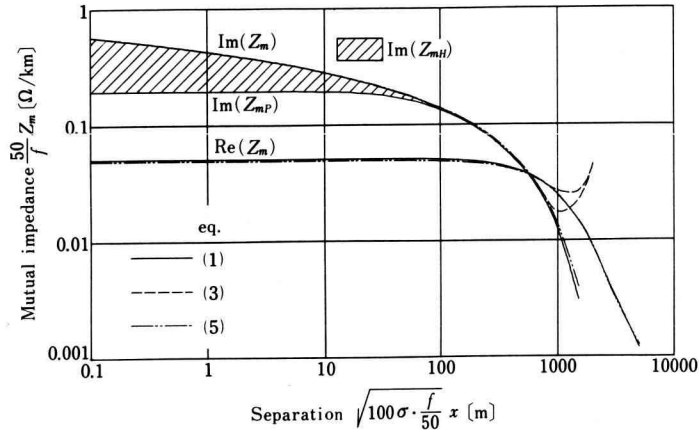


Fig. 6. The unit length mutual impedance between two infinite parallel wires ( $g_1 = g_2 = 20$  m).

$Z_m \approx 0$  となるため  $\varepsilon_I$  は大きくなるが、この値は無視して良い。

Fig. 5 は (5) 式による  $r$  と  $\varepsilon_R$ ,  $\varepsilon_I$  の関係である。 $g' = 0.01$  のように極めて浅い場合は非常に良く (1) 式を近似しているが、 $g' = 0.1$  となると  $r = 1$  でも虚数部は 5% 以上差がある。(6) 式は (4) 式のところで述べたことと全く同様である。

$Z_{ap}$  を求めるのに  $Z_{mH}$  を加える代りに (10) 式の  $Z_{mH}$  を用いると、 $g' = 0.1$  のときの実数部が  $r < 0.6$  で約 0.5~0.8% 差が生ずる。ほかの場合は約 0.2% 以内の差である。

Fig. 6 は  $f = 50$  Hz,  $\sigma = 0.01$  を基準とした  $g_1 = g_2 = 20$  m ( $g' = 0.08$ ) のときの水平距離  $x$  に対する大

地帰路相互インピーダンス  $Z_m$  (実線) である。破線は (3) 式による近似であり、2 点鎖線は (5) 式による近似である。(3) 式による長距離での近似を除けば、全体として良く近似できている。なお、斜線を施した部分は  $Z_{mH}$  の虚数部を示す。

#### 4. む す び

地中にある絶縁された 2 導体間の大地帰路相互インピーダンス  $Z_m$  は (1) 式により計算できるが、この計算は非常に煩雑である。

本稿では、次の 2 つの方法でこの概略値を知ることができることを示した。

(1) Fig. 2 から  $Z_{mp}$  を求め, Fig. 3 から  $Z_{mH}$  を求めて和をとる。

(2)  $Z_{mp}$  の近似式として,  $r \leq 1$  のときは (3) 式を用いる。特に浅い場合 ( $g' \leq 0.05$ ) には, (5) 式を用いることにより  $r$  が大きいところも近似できる。

なお,  $Z_{mH}$  は  $g' \leq 0.1$  ではほぼ (10) 式で近似できるが,  $g' > 0.1$  では (7) 式を用いて求める必要がある。

$r > 1$  で  $g' > 0.05$  の場合に用いることのできる一般的な近似式の導出は今後の課題である。

### 参 考 文 献

- 1) 電気学会・電子通信学会：誘導調査特別委員会報告書「情報化社会と省エネルギー時代の電磁誘導対策問題」(昭 58 年)
- 2) J.R. Carson : Bell system Tech. J., Vol. 5, p. 539 (1926)
- 3) F. Pollaczek : E.N.T., Vol. 3, p. 339 (1926)
- 4) 森・高橋・大矢：「架空電力線と地中通信線との間の大地帰路相互インピーダンス」昭 57 電気学会全大 No. 1175
- 5) S. Takahashi, S. Ohya and T. Mori : Reserch Report of Ikutoku Tech. Univ. B-7, p. 173 (1982)
- 6) S. Takahashi, S. Ohya, T. Mori and A. Kinase : *ibid.*, B-8, p. 129 (1983)
- 7) 大矢・森：「地中にある絶縁導体間の大地帰路相互インピーダンス」昭 60 電気学会全大 No. 1113