

3次元巡回型デジタルフィルタの 安定性判別について

高 橋 貞 良・木名瀬 亮

A Test of the Stability of the Three-Dimensional Recursive Digital Filter

Sadayoshi TAKAHASHI and Akira KINASE

Abstract

Stability conditions for three-dimensional recursive digital filters are reduced from the problem of testing the positivity of certain polynomials of two variables. By applying Strum's theorem to the polynomials of two variables, an example of the method of testing the stability conditions of the three-dimensional recursive digital filters can be obtained.

1. ま え が き

2次元以上の多次元巡回型デジタルフィルタの安定性判別方法は、結局、多変数多項式の正值問題に帰着されることが知られている¹⁾。E.I. Jury らは、この多変数多項式の正值問題に対して、ラグランジュの未定係数法を用いて、問題を解こうとしているが、結局かなり高次の方程式を解くことになり、さほど簡単でないように思える²⁾。これに対し、三浦、古賀らは2次元巡回型デジタルフィルタの場合には、問題が2変数多項式の正值問題に帰着させられることを示し、この2変数多項式にStrumの定理を拡張して用い、良い結果を導いている³⁾。筆者らは、文献(1)において、Huangの定理の拡張を示し、 N 次元巡回型デジタルフィルタの安定性判別方法が、 $(N-1)$ 変数多項式の正值問題に帰着されることを示した。したがって、特に3次元巡回型デジタルフィルタの場合には、文献(1)の方法を用いれば、2変数多項式の正值問題に帰着させることができ、この多項式に、三浦、古賀らの提案しているStrumの定理の拡張を適用すれば、3次元巡回型デジタルフィルタの安定性判別が、より簡単に求まることになる。以下に基本となる定理を挙げる。

2. 理 論

[定理(Strum)]⁴⁾ 方程式 $f(x)=0$ が、 $a < x \leq b$ なる区間において持つ実根を、単根、複根の区別なしに数えて、その数を N_0 とする。 $f(x)$ と $f'(x)$ から Euclid の互除法によって得られる関数列を、

$$f(x), f'(x), f_2(x), \dots, f_l(x) \text{ とする。}$$

但し、

$$f_{h-1}(x) = g_h(x)f_h(x) - f_{h+1}(x) \quad (h=1, \dots, l-1)$$

$$f_0(x) = f(x), f_1(x) = f'(x)$$

このとき、 $x=a$ および $x=b$ における符号の変化の数を各々 $V(a)$ および $V(b)$ とすれば、

$$N_0 = V(a) - V(b)$$

となる。

[定理 (Huang の定理の拡張)]¹⁾ 3次元巡回型デジタルフィルタが安定であるための必要十分条件は、伝達関数の分母多項式を $B(z_1, z_2, z_3)$ とすると、次の三つの式が成立することである。

$$B(z_1, 0, 0) \neq 0, |z_1| \leq 1 \quad (1)$$

$$B(z_1, z_2, 0) \neq 0, |z_1|=1, |z_2| \leq 1 \quad (2)$$

$$B(z_1, z_2, z_3) \neq 0, |z_1|=1, |z_2|=1, |z_3| \leq 1 \quad (3)$$

この定理の各々の条件(1), (2), (3)が定数の条件、

一変数多項式の正性判別の問題、二変数多項式の正性判別の問題に置き換えられる。

3. 具 体 例

3次元巡回型デジタルフィルタの基本となる双一次の係数を持つフィルタに対して安定性の条件を求める。分母多項式を次のようにおく。

$$B(z_1, z_2, z_3) \triangleq 1 + az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_1z_2 + ez_2z_3 + fz_3z_1 + gz_1z_2z_3$$

但し、 a, b, c, d, e, f, g は定数である。

Huang の定理の条件 (1), (2), (3) を文献 (1) の方法で求めると、

条件 (1) に対しては、

$$|a| < 1 \dots\dots\dots (1)'$$

条件 (2) に対しては、

$$g(x) = \{(1-a)^2 - (b-d)^2\}x^2 + \{(1+a)^2 - (b+d)^2\} \dots\dots (2)'$$

$$\text{但し, } (1-a)^2 \neq (b-d)^2$$

となる関数が任意の実数 x に対して常に正となることが条件となる。

条件 (3) に対しては、

$$f(x, y) = Ax^2y^2 + Bx^2 + Cy^2 + Dxy + E \dots (3)'$$

但し、 $A \cdot B \cdot C \cdot E \neq 0$

$$A = (c - e - f + g)^2 - (1 - a - b + d)^2$$

$$B = (c + e - f - g)^2 - (1 - a - b - d)^2$$

$$C = (c - e + f - g)^2 - (1 + a - b - d)^2$$

$$D = 8(d + fe - ab - cg)$$

$$E = (c + e + f + g)^2 - (1 + a + b + d)^2$$

なる関数 $f(x, y)$ が任意の実数 x, y に対して常に負となることが求める条件となる。これらの関数 $g(x)$, $f(x, y)$ が $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ なる区間に

実根を持たない条件は、Strum の定理の拡張を用いて求めることができる。

(但し、 $f(x, y)$ は常に負、 $g(x)$ は常に正の条件である。)

(1)', (2)', (3)' 式より $B(z_1, z_2, z_3)$ が満足しなければならない条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} |a| < 1, \left| \frac{1-a}{b-d} \right| > 1, \left| \frac{1+a}{b+d} \right| > 1 \\ A < 0, B < 0, C < 0, E < 0 \\ D^2 < 4BC + 4AE + 8\sqrt{ABCD} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

4. む す び

3次元巡回型デジタルフィルタの安定性判別についても、Huang の定理の拡張を用いれば、2変数多項式に対する Strum の定理の拡張が適用でき、わりあい簡単にフィルタの安定性判別が可能となることを示した。4次元以上の場合については、多変数関数についての困難な問題が残されているが、今後の検討課題と思われる。

文 献

- 1) 高橋, 辻井: "N次元デジタルフィルタの安定性判別と多変数多項式の極値問題", 信学論(A), **57-A**, 10, pp. 746-752 (昭49-10).
- 2) T.A. Bicart and E.I. Jury: "Real Polynomials: Nonnegativity and Positivity", IEEE Trans. Circuits and Systems, **CAS-25**, 9, pp. 676-684 (1978).
- 3) 三浦, 古賀: "2次元巡回型デジタルフィルタの安定性の一判定法について", 信学論(A), **J67-A**, 8, pp. 782-788 (昭59-8).
- 4) 高木貞治: "代数学講義", pp. 81-85, 共立出版(昭58-04).