

# 離散時間モデル規範形適応制御系の推定モデルの 次数と外乱の特性との関係について

河 合 敏 勝

Relations between Estimation Model Orders and Characteristics  
of Disturbances for Discrete-Time Model  
Reference Adaptive Control Systems

Toshikatsu KAWAI

## Abstract

This paper presents a design method of discrete-time model reference adaptive control systems for linear time invariant plants with unknown deterministic disturbances.

It is assumed that the disturbances are described by the  $nD$ -order polynomial function  $D(z^{-1})$  with unknown coefficients. Setting the estimation model order more  $2nD$ -orders than the order of a plant eliminates the effect of disturbances. Finally, to illustrate the relations between estimation model orders and characteristics of disturbances, computer simulation results of the adaptive control system for a plant with step and sinusoidal disturbance are presented.

## 1. ま え が き

今日のモデル規範形適応制御システム (MRACS, model reference adaptive control system) の基本的な設計法は、1974年に Monopoli<sup>1)</sup> によって確立された。この手法はプラントの入出力信号のみを用いる設計法であり、Augmented error signal および State variable filter などの新しい概念を導入し、リアプノフの直接法と Kalman-Yakubovich の補助定理を適用して誤差システムが漸近安定となるようにパラメータ調整則を決定する手法である。しかし、適応システムが複雑な非線形となるために、適応ループ内の有界性の証明はなされていなかったが 1980 年に Narendra<sup>2)</sup>, Goodwin<sup>3)</sup> らによって解決されてから MRACS の研究は急速な進展を示し様々な設計法<sup>4)-6)</sup> が提案されている。

MRACS の基本的な構成は、プラントの望ましい動特性を規範モデルで与え、そのモデルの動特性にプラントとコントローラとを結合した制御系の動特性が一致するように適応機構を働かし、コントローラを調整

する。そのため、コントローラをどのように設計するかが重要なポイントである。そのコントローラは、パラメータ調整則とコントローラ内の推定モデルの次数に依在するので、その選択が重要なポイントとなっている。

本論文では、プラントに未知確定外乱が加わった場合のコントローラ内の推定モデルの次数決定問題について、つまり、プラントの次数および外乱の型と推定モデルの次数との関係について検討する。ここで提案した次数決定問題の有効性を確認するためいくつかの数値実験を行った。

## 2. 問題の設定

適応制御の対象となるプラントとしてつぎの外乱を受ける離散時間系の制御問題を考える。

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + w(k) \quad (1)$$

ここで

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i z^{-i} \quad (2)$$

$$B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{nB} b_i z^{-i} \quad (d \geq 1, B(1) \neq 0) \quad (3)$$

$y(k)$ ,  $u(k)$  はプラントの出力および入力であり,  
 $z^{-1}$  は時間遅れ演算子を示す。

上式のプラントに対し、次の仮定を設ける。

- (1)  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  は互いに既約。
- (2)  $a_i$ ,  $b_i$  は未知パラメータ。
- (3)  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  の次数  $nA$ ,  $nB$  は既知。
- (4) むだ時間  $d$  は既知。
- (5)  $B(z^{-1})$  は漸近安定多項式。

外乱  $w(k)$  は、プラントに加わる未知確定外乱を表わしたもので、つぎの特性を持ったものとする。

$$D(z^{-1})w(k) = 0 \quad (4)$$

ここで、

$$D(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{nD} d_i z^{-i} \quad (5)$$

ただし、多項式  $D(z^{-1})$  の次数  $nD$  は既知で、そのパラメータ  $d_i$  は未知とする。

(1) 式のプラントに対応して、次式で記述されるような望ましい動特性を持った規範モデルを考える。

$$A_m(z^{-1})y_m(k) = B_m(z^{-1})r_m(k) \quad (6)$$

ここで、

$$A_m(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i z^{-i} \quad (7)$$

$$B_m(z^{-1}) = \sum_{i=d}^m \beta_i z^{-i} \quad (8)$$

ここで考える問題は、未知確定外乱を受ける場合にも、プラントの出力  $y(k)$  が望ましい動特性を持った規範モデルの出力  $y_m(k)$  に一致しうるような制御入力  $u(k)$  を適応的に合成することである。

### 3. 制御系の構成

はじめに、前節の制御目的を達成するために必要となるコントローラの構造を決定する。まず、次式のような漸近安定多項式を導入する。

$$C(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{nC} c_i z^{-i} \quad (9)$$

そこで、 $C(z^{-1})$ ,  $A(z^{-1})$  と  $D(z^{-1})$  に対して、つぎの関係満足する多項式  $R(z^{-1})$ ,  $S(z^{-1})$  が一意に定まることに着目する。

$$C(z^{-1}) = R(z^{-1})D(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-d}S(z^{-1}) \quad (10)$$

ここで、

$$R(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} r_i z^{-i} \quad (11)$$

$$S(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{nA+nD-1} s_i z^{-i} \quad (12)$$

(10) 式の両辺に  $y(k+d)$  をかけて、(1) 式の両辺に  $D(z^{-1})$  をかけ、(4) 式を用いて外乱  $w(k)$  を消去したプラントの関係を代入すると

$$C(z^{-1})y(k+d) = R'(z^{-1})u(k) + S(z^{-1})y(k) = \theta^T \zeta(k) \quad (13)$$

ここで、

$$\begin{aligned} R'(z^{-1}) &= B(z^{-1})D(z^{-1})R(z^{-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{nR} r'_i z^{-i} \quad (nR = nB + nD + d - 1) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} r'_0 &= b_0, \quad r'_1 = b_0 d_1 + b_0 r_1 + b_1, \quad \dots, \quad r'_{nR} = b_{nB} d_{nD} r_{d-1} \\ \theta^T &= [r'_0, \dots, r'_{nR}, s_0, \dots, s_{nS}] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (nS &= nA + nD - 1) \\ \zeta^T(k) &= [u(k), \dots, u(k - nR), y(k), \dots, y(k - nS)] \quad (16) \end{aligned}$$

(13) 式は (1) 式のプラントの別表現であり、 $R'(z^{-1})$ ,  $S(z^{-1})$  の係数  $r'_i$ ,  $s_i$  はプラントの未知パラメータ  $a_i$ ,  $b_i$  および外乱の特性パラメータ  $d_i$  に関係したパラメータとなっている。

制御目的  $y(k) \rightarrow y_m(k)$  を達成するための制御入力  $u(k)$  は、実際のプラントでは、(15) 式のパラメータ  $\theta$  が未知であるので、可調整パラメータ  $\hat{\theta}(k)$  を導入し、そして (13) 式の左辺の  $y(k+d)$  を  $y_m(k+d)$  で置きかえることにより、つぎのように合成する。

$$C(z^{-1})y_m(k+d) = \hat{\theta}^T(k)\zeta(k) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \therefore u(k) &= -\frac{1}{\theta_1(k)} [C(z^{-1})y_m(k+d) \\ &\quad - \sum_{i=2}^N \hat{\theta}_i(k)\zeta_i(k)] \quad (18) \\ (N &= nA + nB + 2nD + d) \end{aligned}$$

ここで、(15), (16) 式に対応して

$$\hat{\theta}^T(k) = [\hat{\theta}_1(k), \hat{\theta}_2(k), \dots, \hat{\theta}_N(k)] \quad (19)$$

$$\zeta^T(k) = [\zeta_1(k), \zeta_2(k), \dots, \zeta_N(k)] \quad (20)$$

可調整パラメータ  $\hat{\theta}(k)$  の調整はつぎのようになされる。まず、(13)式の表現に対応して、つぎのように推定モデルを考える。

$$C(z^{-1})\hat{y}(k) = \hat{\theta}^T(k)\zeta(k-d) \quad (21)$$

(21)式より(13)式を引き、 $C(z^{-1})\hat{y}(k) - C(z^{-1})y(k) = \varepsilon(k)$  とおくと

$$\varepsilon(k) = \hat{\theta}^T(k)\zeta(k-d) - C(z^{-1})y(k) \quad (22)$$

上式の誤差信号  $\varepsilon(k)$  は、 $\hat{\theta}(k)$  を

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \Gamma(k-1)\zeta(k-d)\varepsilon(k) \quad (23)$$

ただし、

$$\Gamma(k-1) = \Gamma^T(k-1) > 0$$

なるパラメータ調整則により調整することによって、 $k \rightarrow \infty$  で  $\varepsilon(k) \rightarrow 0$  とさせることができる。また、このとき、入出力信号からなる  $\zeta(k)$  が有界ならば、 $\hat{\theta}(k)$  は一定値になる。推定パラメータが一定値におちつくと(17)、(21)式より  $k \rightarrow \infty$  で  $y(k) \rightarrow y_m(k)$  が達成されることがわかる。なお、(23)式のパラメータ調整則は、(22)式より明らかなように、 $\varepsilon(k)$  は  $\hat{\theta}(k)$  が与えられないと求められないので、このままの形では実行できない。これは、(22)、(23)式を組み合わせることによって、解決でき、つぎのような式になる。

$$\varepsilon(k) = \frac{\hat{\theta}^T(k-1)\zeta(k-d) - C(z^{-1})y(k)}{1 + \zeta^T(k-d)\Gamma(k-1)\zeta(k-d)} \quad (24)$$

上式の未知パラメータ  $\hat{\theta}(k)$  の調整のためのアルゴリズムとしては、いろいろなアルゴリズムが開発されている。その中で、収束性にすぐれた、また信号のいかにかわかわらずゲイン行列の発散を抑えることのできる最小2乗法形上限トレージン方式<sup>7)</sup>によるアルゴリズムを使用する。つぎのようなアルゴリズムである。

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \mu(k)\Gamma(k-1)\zeta(k-d)\varepsilon(k) \quad (25)$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{\lambda(k)} \left[ \Gamma(k-1) - \frac{\mu(k)\Gamma(k-1)\zeta(k-d)\zeta^T(k-d)\Gamma(k-1)}{1 + \mu(k)\zeta^T(k-d)\Gamma(k-1)\zeta(k-d)} \right] \quad (26)$$

$$\lambda(k) = \max \left\{ \lambda, \frac{1}{r_u} (tr\Gamma(k-1) - \frac{\mu(k)\|\Gamma(k-1)\zeta(k-d)\|^2}{1 + \mu(k)\zeta^T(k-d)\Gamma(k-1)\zeta(k-d)}) \right\} \quad (27)$$

ただし、 $\Gamma(-1) > 0$ ,  $r_u \geq tr\Gamma(-1)$   
 $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \mu(k) < \infty$

#### 4. 外乱の型およびプラントの次数と推定モデルの次数との関係

前節までの設計法は、外乱の項を消すために、プラントの両辺に外乱の特性を表わす多項式  $D(z^{-1})$  をかけて、拡大プラントにして、外乱を除去している。

その本手法と比較するために、外乱を受けないプラントについて考える。コントローラ構造を決める式は、(10)式に対応して

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})R(z^{-1}) + z^{-d}S(z^{-1}) \quad (28)$$

(28)式の両辺に  $y(k+d)$  をかけ、 $A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k)$  の関係を上式に代入すると、

$$C(z^{-1})y(k+d) = \theta^T(k)\zeta(k) \quad (29)$$

ここで

$$\theta^T = [b_0, \dots, b_{n_B}r_{d-1}, s_0, \dots, s_{n_A-1}] \quad (30)$$

$$\zeta^T(k) = [u(k), \dots, u(k-n_B-d+1), y(k), \dots, y(k-n_A+1)] \quad (31)$$

上式は、外乱を受けないプラントの別表現である。そこで、(13)式の外乱を受ける拡大系のプラントの次数は、(29)式の外乱を受けないプラントの次数より、 $2n_D$ 個だけ多くなっている。つまり、プラントの次数よりコントローラ内の推定モデルの次数を  $2n_D$ 個だけ多く取れば、外乱の除去ができる。その外乱の特性を表わす多項式  $D(z^{-1})$  の次数  $n_D$  は、外乱の型つまり、線形自由系の成分の外乱が多項式で記述できる成分の外乱かによって決まる。また、 $\hat{R}(k, z^{-1})$ ,  $\hat{S}(k, z^{-1})$  の次数は、プラントの多項式  $A(z^{-1})$ , 外乱の多項式  $D(z^{-1})$  の次数によって決定され、その  $\hat{r}_i(k)$ ,  $\hat{s}_i(k)$  の個数は、それぞれ  $(n_B + n_D + d)$ ,  $(n_A + n_D)$  であり、全部で、 $(n_A + n_B + 2n_D + d)$  となる。

最後に、適応制御の目標でもある未知次数プラントに関連して、今までの論文では、プラントの次数は既知としてコントローラの構造を決定していた。逆に、コントローラの構造を決めて、そのコントローラからどのようなプラントが取扱えるかという問題も重要である。本手法のコントローラで、推定パラメータ  $\hat{r}_i(k)$ ,  $\hat{s}_i(k)$  の個数をそれぞれ  $N_r$  個、 $N_s$  個と決めた場合、次の両不等式を満足するプラントを取り扱うことができる。

$$N_r \geq (n_B + n_D + d) \quad (32)$$

$$N_s \geq (n_A + n_D) \quad (33)$$

## 5. 数値計算例

外乱を除去するのに、本手法の推定モデルの次数の決め方の有効性を検討するために、(ステップ外乱)および(ステップ外乱+正弦波外乱)が加わるプラントを例にとって数値実験を行った。

この実験では、推定モデルの次数を

$$Ns=4$$

$$Nr=4$$

と決めた。そのため、未知パラメータを推定する可調整パラメータ  $\hat{\theta}(k)$  は

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^T(k) &= [\hat{\theta}_1(k), \hat{\theta}_2(k), \hat{\theta}_3(k), \hat{\theta}_4(k), \\ &\quad \hat{\theta}_5(k), \hat{\theta}_6(k), \hat{\theta}_7(k), \hat{\theta}_8(k)] \\ \zeta^T(k) &= [u(k), u(k-1), u(k-2), u(k-3), \\ &\quad y(k), y(k-1), y(k-2), y(k-3)]\end{aligned}$$

となる。

制御対象に対応して、規範モデルとしてはつぎのものをを用いた。

$$(1-1.33z^{-1}+0.5z^{-2})y_m(k)=0.17z^{-1}r_m(k)$$

ここで、規範入力  $r_m(k)=\pm 1$  で周期 100 の矩形波を用いた。

上の  $\hat{\theta}(k)$  を調整するパラメータ調整アルゴリズムの諸条件としては、

$$\hat{\theta}^T(-1)=[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

(ステップ外乱)の場合

$$\Gamma(-1)=1000\mathbf{I}, r_u=tr\Gamma(-1)=8000, \lambda=0.8, \mu=1$$

(ステップ外乱+正弦波外乱)の場合

$$\Gamma(-1)=10^{40}\mathbf{I}, r_u=tr\Gamma(-1)=10^{40}\times 8, \lambda=0.8, \mu=1$$

とした。

以上のようにコントローラを決め、このコントローラでどのぐらいの外乱を受けるプラントが取扱えるかについて検討する。

### 5.1 (ステップ外乱)の場合

プラントに加える外乱としては、

$$\begin{aligned}0 \leq k \leq 80 & \quad w(k)=3 \\ 80 < k < 130 & \quad w(k)=4 \\ 130 < k \leq 200 & \quad w(k)=2.5\end{aligned}$$

とした。この外乱では、(5)式の  $D(z^{-1})$  の次数は  $n_D$

$=1$  となる。そして、推定モデルの次数  $N_s, N_r$  がそれぞれ 4 次と決めたため、このコントローラでステップ外乱が作用する場合に取扱えるプラントの領域は、(32), (33) 式より

$$3 \geq n_B + d, 3 \geq n_A$$

となる。

#### (i) 推定モデルの次数に余裕のある場合

制御対象として、1 次系 ( $n_A=1, n_B+d=2$ ) の未知プラントを考えた。

$$(1-1.2z^{-1})y(k)=(2.8z^{-1}-1.5z^{-2})u(k)$$

上のプラントは極を  $z=1.2$  (不安定根) に、零点を  $z=0.53$  にもつ。

Fig. 1(c) は推定パラメータの挙動を示す。この図より、推定値  $\hat{\theta}_7(k), \hat{\theta}_8(k)$  は、ほぼ全領域において零であるためまだ 2 次だけ余裕がある。同図 (a) は規範モデルの出力とプラントの出力の挙動を示す。これより、制御初期と外乱を変化させた場合に乱れを生じているが望ましい規範モデルに追従している。また、同図 (b) は合成された制御入力を示す。

#### (ii) 推定モデルの次数が限界の場合

制御対象として、3 次系 ( $n_A=3, n_B+d=3$ ) の未知プラントを考えた。

$$A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k)$$

ただし、

$$\begin{aligned}A(z^{-1}) &= 1-1.6z^{-1}+0.53z^{-2}+3.13z^{-3} \\ B(z^{-1}) &= 1.8z^{-1}+0.3z^{-2}-z^{-3}\end{aligned}$$

上のプラントは極を  $z=1.3 \pm j1.2$  (不安定根), 1 に、零点を  $z=-0.83, 0.66$  にもつ。

Fig. 2(c) は、推定パラメータの挙動を示す。この図より、推定値  $\hat{\theta}_8(k)$  が零でない一定値を示しているため、これ以上の次数のプラントは取扱えないことがわかる。同図 (a) は、規範モデルの出力とプラントの出力の挙動を示す。また、同図 (b) は合成された制御入力を示す。

#### (iii) 推定モデルの次数よりオーバーした場合

制御対象として、4 次系 ( $n_A=4, n_B+d=3$ ) の未知プラントを考えた。

$$A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k)$$

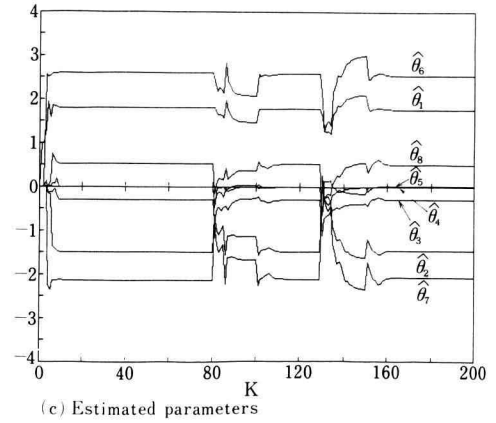
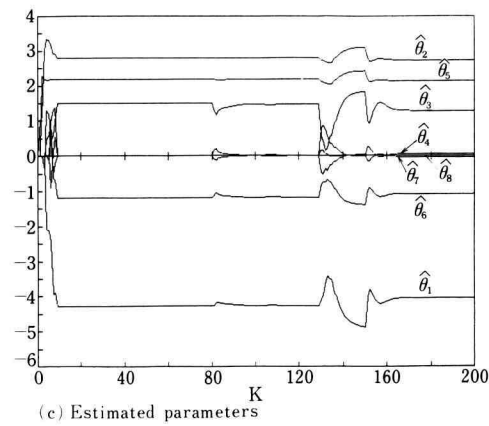
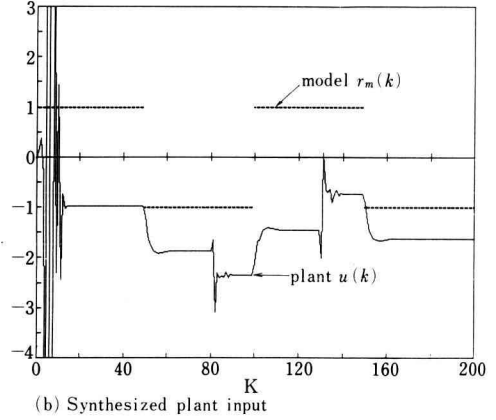
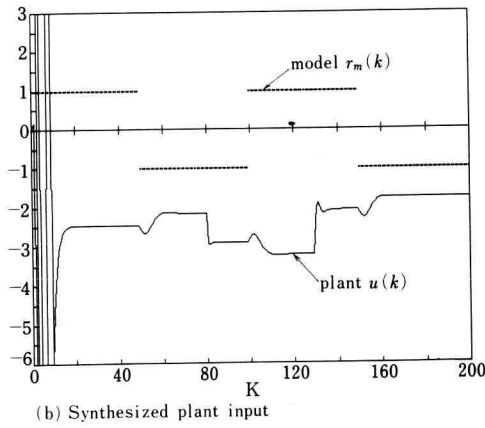
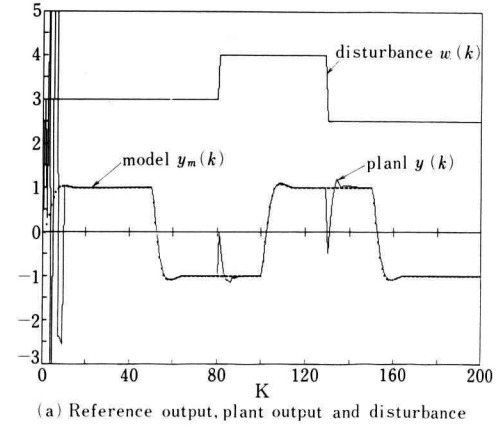
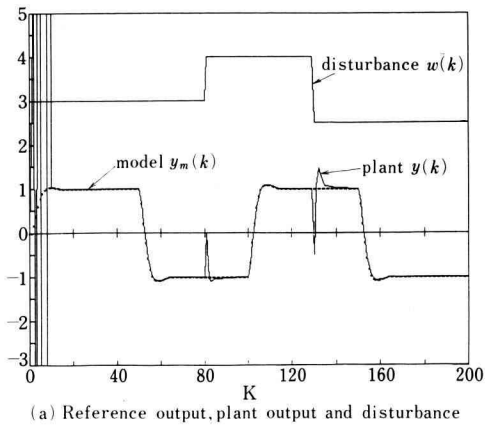


Fig. 1. Simulation result for 1-order plant with step disturbance.

Fig. 2. Simulation result for 3-order plant with step disturbance.

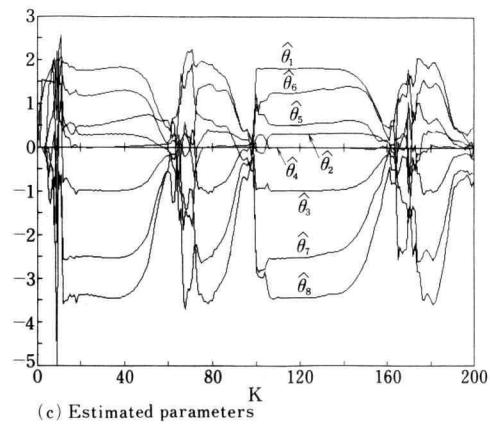
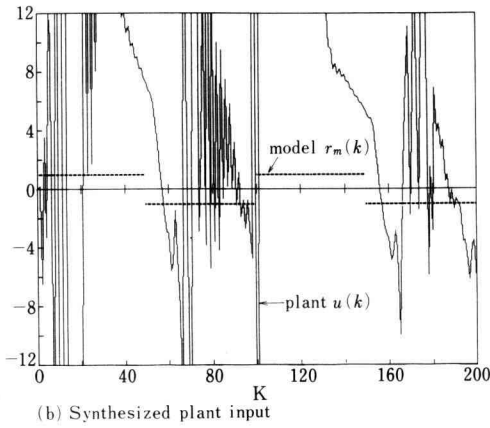
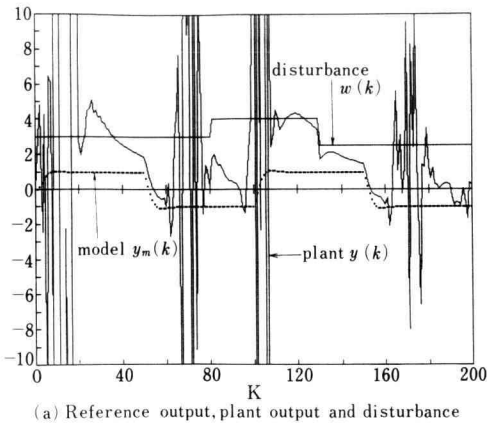


Fig. 3. Simulation result for 4-orders plant with step disturbance.

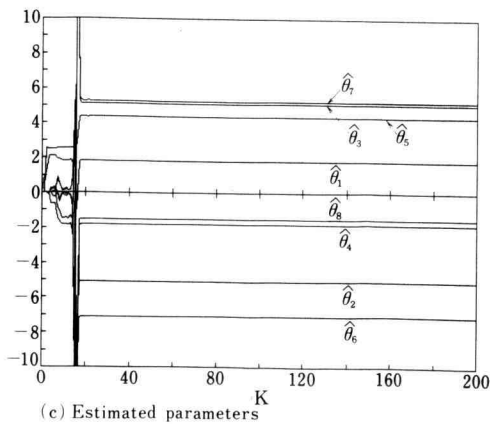
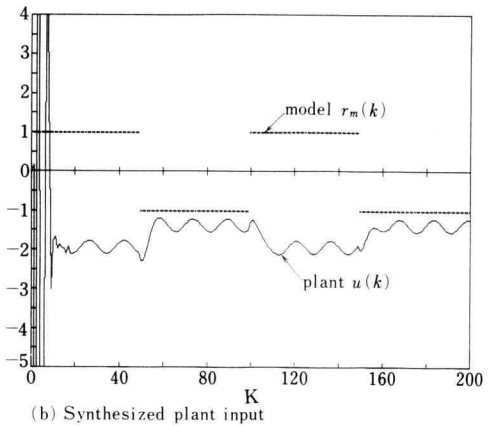
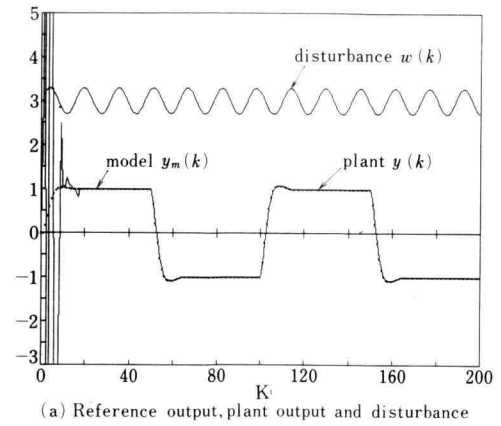


Fig. 4. Simulation result for 1-order plant with Sinusoidal disturbance.

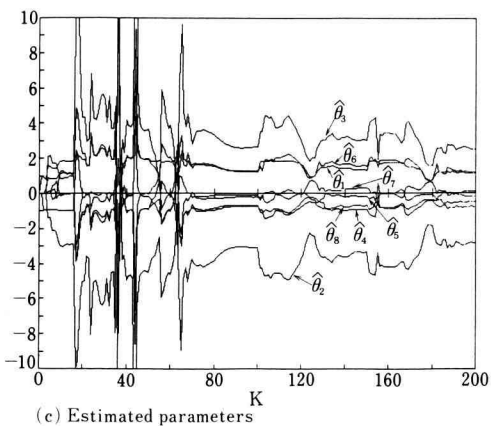
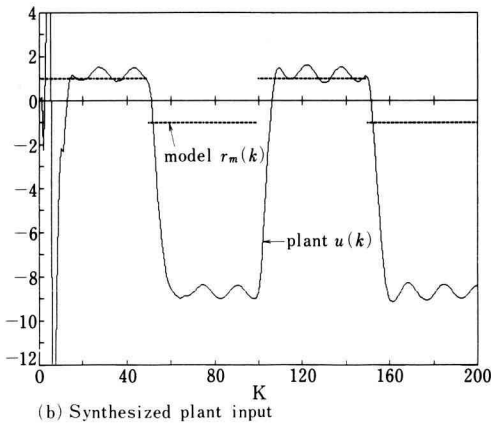
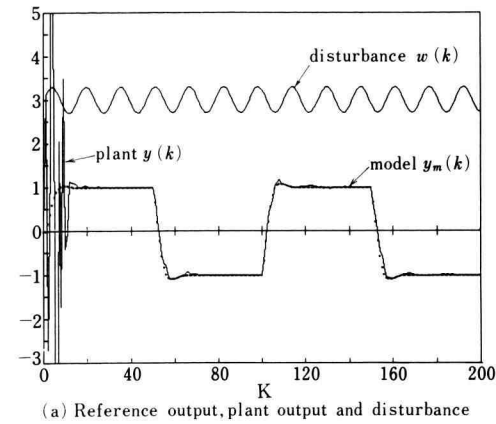


Fig. 5. Simulation result for 2-order plant with sinusoidal disturbance.

ただし,

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 - 0.5z^{-1} - 1.23z^{-2} \\ &\quad + 2.54z^{-3} + 3.44z^{-4} \\ B(z^{-1}) &= 1.8z^{-1} + 0.3z^{-2} - z^{-3} \end{aligned}$$

上のプラントは極を  $z = 1.3 \pm j1.2$  (不安定根), 1.1, 1 に, 零点を  $z = -0.83, 0.66$  にもつ。

Fig. 3 (c) は推定パラメータの挙動を示す。この図より, 推定値  $\hat{\theta}_1(k), \dots, \hat{\theta}_s(k)$  はそれぞれ振動的になっているため, 推定モデルの次数よりプラントの次数が高次になっていることがわかる。また, 同図 (a) は, 規範モデルの出力とプラントの出力の挙動を示す。これより, プラントが規範モデルに追従していない。その合成された制御入力も乱れ, 同図 (b) に示す。

## 5.2 (ステップ外乱+正弦波外乱) の場合

プラントに加える外乱としては,

$$w(k) = 3 + 0.3 \sin(0.4k)$$

とした。この外乱では, (5) 式の  $D(z^{-1})$  の次数は,  $n_D = 3$  となる。そして, 推定モデルの次数  $N_s, N_r$  をそれぞれ 4 次と決めているため, このコントローラで (ステップ外乱+正弦波外乱) が作用する場合に, 取扱えるプラントの領域は, (32), (33) 式より,

$$1 \geq n_B + d, 1 \geq n_A$$

となる。

### (i) 推定モデルの次数が限界の場合

制御対象として, 1 次系 ( $n_A = 1, n_B + d = 1$ ) の未知プラントを考えた。

$$(1 - 1.5z^{-1})y(k) = 1.8z^{-1}u(k)$$

上のプラントは極を  $z = 1.5$  (不安定根) にもつ。

Fig. 4 (c) は推定パラメータの挙動を示す。この図より, 推定値  $\hat{\theta}_s(k)$  が零でない一定値を示しているため, これ以上の次数のプラントは取扱えないことがわかる。同図 (a) は規範モデルの出力とプラントの出力の挙動を示す。この図から, 制御初期に乱れを生じているだけで望ましい規範モデルに追従している。また, 同図 (b) は合成された制御入力を示す。

### (ii) 推定モデルの次数よりオーバーした場合

制御対象として, 2 次系 ( $n_A = 2, n_B + d = 2$ ) の未知プラントを考えた。

$$(1+2z^{-1}+0.95z^{-2})y(k)=(1.8z^{-1}-z^{-2})u(k)$$

に深く感謝いたします。

上のプラントは極を  $z=-0.77, -1.22$  (不安定根) に、零を  $z=0.55$  にもつ。

Fig. 5 (c)は推定パラメータの挙動を示す。この図から、推定値  $\hat{\theta}_1(k), \dots, \hat{\theta}_8(k)$  はそれぞれ振動的になっている。つまり、推定モデルの次数よりプラントの次数が高次になっていることがわかる。同図 (a) は、規範モデルの出力とプラントの出力の挙動を示す。この図からもプラントが規範モデルに乱れながら追従している。この時の合成された制御入力、同図 (b) に示す。

## 6. あ と が き

本論文は、未知確定外乱を受けるプラントを対象としたモデル規範形適応制御系の設計法である。そのプラントの外乱を除去するのに、外乱の特性を表わす多項式  $D(z^{-1})$  の次数  $n_D$  が既知であれば、推定モデルの次数を  $2n_D$  だけ多くとることによって、外乱の除去ができることが明らかになった。

最後に、日頃ご指導いただく本学教授前川高登博士

## 参 考 文 献

- 1) R.V. Monopoli: Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, IEEE Trans. Automatic Control, AC-19-5, 474/484 (1974)
- 2) K.S. Narendra, Y.H. Lin and L.S. Valavani: Stable Adaptive Controller Design-Part II: Proof of Stability, IEEE Trans. Automatic Control, AC-25-3, 440/448 (1980)
- 3) G.C. Goodwin and K.S. Sin: Adaptive filtering Prediction and Control, Prentice-Hall (1984)
- 4) I.D. Landau: Adaptive Control-The Model Reference Approach, Marcel Dekker
- 5) I.D. ランダウ, 富塚誠義: 適応制御システムの理論と実際, オーム社 (1981)
- 6) 市川, 金井, 鈴木, 田村: 適応制御, 昭晃堂(1984)
- 7) 新中, 鈴木: 適応システムのためのパラメータ調整アルゴリズム, 計測自動車制御学会論文集, 21-7, 691/697 (1985)