

N次元巡回型デジタルフィルタの 安定性判別の一方法

高橋 貞良・木名瀬 亮

A Method for Testing the Stability of N-dimensional Recursive Digital Filters

Sadayoshi TAKAHASHI and Akira KINASE

Abstract

An N-dimensional recursive digital filter is structurally stable if and only if the denominator of its transfer function has no zeros in the closed polydomain $\bigcap_{i=1}^N |z_i| \leq 1$. In this paper, the discussion on a unit disk is translated to that on the unit circle.

1. ま え が き

2次元巡回型デジタルフィルタの安定性判別方法については、正実関数の理論やStrumの方法を用いてかなり具体的に判別する方法が述べられている³⁾。本論文においては、従来の実関数を用いる方法とは異なる複素関数における偏角の原理を用いる方法により一般のN次元巡回型デジタルフィルタの安定性判別を行なうことを提案している。

2. 理 論

[定理1] N次元巡回型デジタルフィルタが安定であるための必要十分条件は、伝達関数の分母多項式を

$B(z_1, z_2, \dots, z_N)$ とするとき、次式が成立することである。

$$B(z_1, z_2, \dots, z_N) \neq 0, |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1, \dots, |z_N| \leq 1.$$

次にこの定理1を実際に判別しやすい次の形に変形する。

[定理2]¹⁾ (Huangの定理の拡張)

N次元巡回型デジタルフィルタが安定であるための必要十分条件は、伝達関数の分母多項式を、 $B(z_1,$

$z_2, \dots, z_N)$ とすると、次の一連の式が成立することである。

$$B(z_1, 0, \dots, 0) \neq 0, |z_1| \leq 1 \quad (1)$$

$$B(z_1, z_2, 0, \dots, 0) \neq 0, |z_1| = 1, |z_2| \leq 1 \quad (2)$$

\vdots

$$B(z_1, z_2, \dots, z_N) \neq 0, |z_1| = 1, |z_2| = 1, \dots, |z_N| \leq 1 \quad (N).$$

この定理2に偏角の原理を適用する。まず偏角の原理を述べる。

[定理3]⁴⁾ (偏角の原理)

$f(z)$ は長さの有限なJordan曲線Cで囲まれた閉領域 \bar{D} で有理型とし、C上では $f(z)$ は正則で零点はないとする。このときCの内部にある $f(z)$ の零点の数をN、極の数をPとすれば、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

である。ただしCの正の方向に積分するものとする。この定理でとくに右辺が整数で、離散的な値をとることに注意する必要がある。

定理3を用いると定理2のi番目の条件は、次のように書きかえられる。

[補題]

$B(z_1, z_2, \dots, z_N)$ をN次元巡回型デジタルフィルタの分母多項式とすると、

$$\left. \begin{aligned} & B(z_1, z_2, \dots, z_i, 0, \dots, 0) \neq 0 \\ & |z_1|=1, |z_2|=1, \dots, |z_{i-1}|=1, |z_i| \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots (i)$$

が成立するための必要十分条件は、次の (I), (II) が成立することである。

$$(I) \quad \begin{aligned} & B(z_1, z_2, \dots, z_i, 0, \dots, 0) \neq 0 \\ & |z_1|=1, |z_2|=1, \dots, |z_i|=1 \end{aligned}$$

(II) $|z_1|=1, |z_2|=1, \dots, |z_{i-1}|=1$ なる任意の z_1, z_2, \dots, z_{i-1} に対して、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z_i|=1} \frac{DB(z_1, z_2, \dots, z_i, 0, \dots, 0)}{B(z_1, z_2, \dots, z_i, 0, \dots, 0)} dz_i = 0$$

ただし

$$\begin{aligned} & DB(z_1, z_2, \dots, z_i, 0, \dots, 0) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_i} B(z_1, \dots, z_i, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

とくに (II) の積分値は式 (i) が成立しない場合は、(I) の条件の下で正の整数値しかとらないことに注意されたい。これは計算機利用の明確な数値判別に役立つ。補題を用いて実際に具体例の計算を行う。

3. 具 体 例

簡単な計算機プログラムを用いて計算した結果

$$(i) \quad B(z_1, z_2) = 1.0 + 0.5z_1 + 0.5z_2 + 0.2z_1z_2$$

のとき安定

$$(ii) \quad B(z_1, z_2) = 1.0 + 1.2z_1 + 0.5z_2 + 0.2z_1z_2$$

とすると、不安定

$$(iii) \quad B(z_1, z_2) = 1.0 + z_1 + z_2 + z_1z_2$$

とすると、条件 (I) が満足されないため不安定以上のことが確かめられた。

4. む す び

実多変数多項式の正值問題に帰着させて判別する方法も結局、高次1変数多項式の根を求めることに帰着される。この場合、例えば $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ が常に正または零であることを判別するにしても、E.I. Jury らは100次程度の1変数多項式の方程式を解くことによって判別を可能にしている²⁾。計算機を用いて誤差を考慮しながら100次程度の方程式を解くことはさほど簡単とは思われない。本稿においては、ただ計算機 $D\bar{O}$ ループの回数を増やすことにより、簡単なアルゴリズムで判別できる方法を提案した。

5. 謝 辞

本文の具体例計算において、本学の計算センター室員、貝瀬氏と星野さんに、お手伝いいただいたことに感謝します。

文 献

- 1) 高橋, 辻井: N次元デジタルフィルタの安定性判別と多変数多項式の極値問題, 信学論(A), 57-A, 10, pp. 746-752 (昭49-10).
- 2) T.A. Bicart and E.I. Jury; "Real Polynomials: Nonnegativity and Positivity", IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-25, 9, pp. 676-684 (1978)
- 3) 三浦, 古賀: "2次元巡回型デジタルフィルタの安定性の一判定法について", 信学論(A), J67-A, 8, pp. 782-788 (昭和59-8)
- 4) 辻 正次: "複素関数論", pp. 167-168, 槇書店 (1978)