

有限 Fuzzy 代数の数え上げ

巽 久行, 小林だいご*, 向殿 政男**, 木名瀬 亮

Enumerating Finite Fuzzy Algebra

Hisayuki TATSUMI, Daigo KOBAYASHI*, Masao MUKAIDONO**
and Akira KINASE

Abstract

A fuzzy algebra is obtained from a Boolean algebra by replacing the complementary law in the axioms of a Boolean algebra with Kleene's law, where Kleene's law is a weaker condition than the complementary law. A set of complete and independent axioms, comprising six axioms, for a fuzzy algebra is already clarified. Therefore, we can judge whether any given model satisfies a fuzzy algebra by simply examining each axiom of it. Based on the above complete and independent axioms for a fuzzy algebra, we enumerate the finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$.

1. ま え が き

通常の集合論では, ある元がその集合に属するか属さないかのいずれかであると定義されている。これをある元がその集合に属するときその所属度を1に, 属さないときを0として, 1と0との間の任意の無限所属度 $[0, 1]$ を認めるように拡張した集合論を, fuzzy 集合論と呼ぶ。fuzzy 集合論は, 実社会でのあいまいさを定量的に取り扱う手段として L.A. Zadeh により提案され¹⁾, 現在, その研究が盛んに行われている。又, 従来の古典2値論理では, すべての命題は真か偽かのいずれかであるとされている。これを, 命題が取り得る真理値を, 真(1)と偽(0)との間の任意の無限真理値 $[0, 1]$ に拡張した論理を, fuzzy 論理と呼ぶ。通常の集合論には2値論理が対応しており, これらを代数系として眺めた場合, ブール代数の1つのモデルとなっている。同様に, fuzzy 集合論には fuzzy 論理が対応しており, これらを満たす代数系を fuzzy 代数と呼ぶ。即ち, fuzzy 集合論や fuzzy 論理は, fuzzy 代数の1つのモデルとなっている。

ある代数系で成立する等式のなかには, 他の等式か

ら導かれるものが存在する。よって, その代数系で成立する全ての等式を導くことが出来るような集合を求めることは重要な問題である。そのような集合を, その代数系に関する完全な公理系という。又, 公理系のうち, 各公理は他の公理から決して導くことが出来ないとき, 即ち, 公理として互いに独立であるとき, その公理系は独立であるといわれる。

fuzzy 代数における初めての完全で独立な公理系の1つは, 文献 [2] で向殿により求められた。任意に与えられたモデルがある代数系を満たすかどうかを調べるとき, 代数系で成立する全ての等式を調べる代わりに, その代数系における完全で独立な公理系を調べるだけで十分である。本報告では, 既に得られている完全で独立な公理系を用いて, その元が有限である有限 fuzzy 代数の数え上げを行う。任意に与えられたモデルに対して, どのようなモデルが fuzzy 代数であるかを求めることは, その代数系の構造を明らかにする上で重要な問題となる。

一般に, 有限 fuzzy 代数はある特殊な分配束を成しており, その数え上げ問題とは, fuzzy 代数で成立する全ての等式を満たすような有限個の元からなる束は, 同型なものを除いて何種類あるかを求める問題である。本報告では, 最初に fuzzy 代数の定義と, 既に得られている完全で独立な公理系を示す。次に, 有限

* 鹿島建設

** 明治大学工学部

昭和63年10月6日受理

fuzzy 代数の判定法を示し、最後にこの方法を用いて計算機で得られた有限 fuzzy 代数のモデルを全て列挙する。元の数が n である有限 fuzzy 代数の数え上げについては、これまで $n \leq 6$ については向殿により求められており²⁾、計算機を用いての確認も行われている³⁾。 $n=7, 8, 9$ については異が求め、計算機でその確認を行った。今回、小林がこれまでの数え上げ方法をもとに、卒業論文の一環として更に高速のアルゴリズムを開発し、 $n=10$ 及び $n=11$ まで計算機を用いて算出し、あわせて $n \leq 9$ までの再確認も行った⁴⁾。本報告は、これまでの有限 fuzzy 代数の数え上げをまとめて、現在まで求められている全ての有限 fuzzy 代数のモデルを列挙することを目的とする。

2. Fuzzy 代数

空でない集合 L において、 L の任意の元 A, B, C に対して、次の 3 つの公理が成立する 2 項演算 \cup と \cap の定義された代数系 $\langle L, \cup, \cap \rangle$ を、束 (lattice) という。

- (1) 交換律 (a) $A \cup B = B \cup A$
(b) $A \cap B = B \cap A$
- (2) 結合律 (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- (3) 吸収律 (a) $A \cup (A \cap B) = A$
(b) $A \cap (A \cup B) = A$

尚、上記の 3 つの公理より、

- (ア) ベキ等律 (a) $A \cup A = A$
(b) $A \cap A = A$

が導かれる。

束のうち、特に

- (イ) モジュラー律

$$A \geq C \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

を満たすものを、モジュラー束 (modular lattice) といい、モジュラー律をそれよりも強い公理

- (4) 分配律 (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

で置き換えた代数系を、分配束 (distributive lattice) という。分配束において、更に単項演算 \sim が定義され、

- (5) ド・モルガン律 (a) $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
(b) $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

- (6) 復帰律 $\sim(\sim A) = A$

を満たす代数系 $\langle L, \cup, \cap, \sim \rangle$ をド・モルガン束 (De Morgan lattice) という。ド・モルガン束のうち、更に、

- (7) 最小元の存在 (a) $0 \cup A = A$
(b) $0 \cap A = 0$
- (8) 最大元の存在 (a) $1 \cup A = 1$
(b) $1 \cap A = A$

を満たす最小元 (0)、最大元 (1) を持つ代数系 $\langle L, \cup, \cap, \sim, 0, 1 \rangle$ はド・モルガン代数 (De Morgan algebra) と呼ばれ⁵⁾、又、これと同じ代数系は準ブール代数 (quasi-Boolean algebra) とも呼ばれて研究されている⁶⁾。ド・モルガン代数のうち、更に、

- (9) クリーネ律

- (a) $(A \cap \sim A) \cup (B \cup \sim B) = B \cup \sim B$
(b) $(A \cap \sim A) \cap (B \cup \sim B) = A \cap \sim A$

を満たすものはクリーネ代数 (Kleene algebra) と呼ばれ⁷⁾、工学では fuzzy 代数と呼ばれて研究されている⁸⁾。クリーネ律を、更に強い公理である

- (ウ) 相補律 (a) $A \cup \sim A = 1$
(b) $A \cap \sim A = 0$

で置き換えた代数系がブール代数 (Boolean algebra) である。即ち、本報告で考察する fuzzy 代数とブール代数との基本的な違いは、ブール代数における相補律を、それよりも弱い公理であるクリーネ律で置き換えて得られる代数系になっていることである。尚、上で述べた各等式において、括弧を節約するために、演算の間に、 $\sim > \cap > \cup$ の順で、演算の強さの順序を設けた。これより、以下のように fuzzy 代数を定義する。

[定義 1] 空でない集合 L に、3 つの演算 \cup, \cap, \sim が定義されていて、 L の任意の元 A, B, C に対して、表 1 の全ての等式が成立する代数系 $\langle L, \cup, \cap, \sim, 0, 1 \rangle$ を fuzzy 代数という。

fuzzy 代数の定義となっている表 1 の各等式のうち、ある等式は他の等式から導くことが出来る。よって、少なくともどのような等式を公理として採用したら、他の全ての等式を導くことが出来るかという問題が生ずる。与えられた代数系を満たす等式のなかで、その代数系で成立する他の全ての等式を導くことが出来るような公理の集合を、その代数系における完全な公理系という。又、その公理系のうち、各公理が他から

表 1. fuzzy 代数で成立する等式 (*印は, 公理を示す)

(1)	交 換 律	(a)* $A \cup B = B \cup A$
		(b) $A \cap B = B \cap A$
(2)	結 合 律	(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
		(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(3)	吸 収 律	(a) $A \cup (A \cap B) = A$
		(b) $A \cap (A \cup B) = A$
(4)	分 配 律	(a)* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
		(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(5)	ド・モルガン律	(a)* $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
		(b) $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$
(6)	復 帰 律*	$\sim(\sim A) = A$
(7)	最小元の存在	(a)* $0 \cup A = A$
		(b) $0 \cap A = 0$
(8)	最大元の存在	(a) $1 \cup A = 1$
		(b) $1 \cap A = A$
(9)	ク リ ー ネ 律	(a)* $(A \cap \sim A) \cup (B \cup \sim B) = B \cup \sim B$
		(b) $(A \cap \sim A) \cap (B \cup \sim B) = A \cap \sim A$

表 2. fuzzy 代数の完全で独立な公理系

(1)	交 換 律	(a) $A \cup B = B \cup A$
(2)	分 配 律	(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(3)	ド・モルガン律	(a) $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
(4)	復 帰 律	$\sim(\sim A) = A$
(5)	最小元の存在	(a) $0 \cup A = A$
(6)	ク リ ー ネ 律	(a) $(A \cap \sim A) \cup (B \cup \sim B) = B \cup \sim B$

は決して導くことが出来ないとき, 即ち, 公理として互いに独立であるとき, この公理系は独立であるといわれる。

表 2 に, 文献 [2] で与えられた fuzzy 代数における完全で独立な公理系を示す。即ち, 表 1 の全ての等式は, 表 2 の 6 つの公理から導くことが可能であり, 更に, 表 2 の各公理は互いに他からは決して導くことが出来ない。尚, 公理系の完全性の証明は, その公理系から代数系を満たす全ての等式を実際に導くことで示され, 又, 独立性の証明は, 他の公理は全て満足するがその公理を満足しないモデルを示せばよい。完全で独立な公理系については, これまで各代数系に対してそれぞれ研究されており, 分配束については M. Sholander⁹⁾ により, ド・モルガン束については R. Maronna¹⁰⁾ により, ド・モルガン代数及びクリーネ代数(即ち, fuzzy 代数)については向殿^{2), 11)} により, プー

ル代数については E.V. Huntington¹²⁾ により, それぞれ与えられている。

次節において, 有限 fuzzy 代数を数え上げる際に, 束の判定として半順序集合を用いての判定を行うので, ここで半順序集合について述べる。

空でない任意の集合を P とし, x, y, z を P の元とする。集合 P に, 次の 3 つの条件

- (1) 反射律 $x \leq x$
- (2) 反対称律 $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$
- (3) 推移律 $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

を満たす 2 項関係 \leq が定義されているとき, 集合 P を半順序集合 (partially ordered set) という。束 L において, $x \cup y = y$ 又は $x \cap y = x$ となるとき $x \leq y$ と定義すると, 関係 \leq に関して L は半順序集合となる。逆に, 半順序集合 P において, 任意の 2 つの元 x と y の

上限(これを $x \cup y$ で表す)及び下限(これを $x \cap y$ で表す)がまた P に属するとき, P は束となる。半順序集合 P の各元を平面上の点で表し, $x \leq y$ ならば点 x から線を上にとどると点 y に到達するように線で結んだ図形をハッセ図 (Hasse diagram) と呼ぶ。束 L においても, 上述したように関係 \leq を定義することにより, ハッセ図で描き表すことができる。

3. 数え上げ方法

fuzzy 代数の数え上げ方法を述べる前に, これまでに求められている有限束の数え上げについて述べる。有限束の数え上げについては, 淡中, 久野¹³⁾らにより元の数 $n \leq 9$ までは計算機を用いないで求められた。又, $n=10$ 以上については, 野崎¹⁴⁾によりその数え上げ問題が提案されていたが, この問題に対する返答として, 田村, 田中¹⁵⁾らにより元の数 $n=11$ まで計算機を用いて求められた。本報告でも, 有限 fuzzy 代数を数え上げる際に, 有限束の導出を行わなければならないが, これについては, 田村, 田中らが行った方法を用いることにする。以下, その方法を説明する。

n 個の元よりなる集合 P を, $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ とする。有限束には最大元及び最小元が必ず存在するので, あらかじめ p_1 を最大元 (即ち, 1) に, p_n を最小元 (即ち, 0) に決めておく。集合 P における包含関係を記述するために, 以下のような $n \times n$ 行列 $R = (r_{ij})$ を定義する。

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & (p_i \geq p_j \text{ で, } p_i \neq p_j \text{ のとき}) \\ -1 & (p_i \leq p_j \text{ で, } p_i \neq p_j \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上記以外のとき}) \end{cases}$$

この行列を, 集合 P における関係行列と呼ぶことにする。このとき p_1, \dots, p_n の置換により, 行列 R の右上の三角部分には -1 が現われないようにすることが出来るので, 関係行列 R は次のようになる。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & & \\ \vdots & & \alpha & \\ -1 & & \beta & \\ & & & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで α 部分の成分は 0 か 1, β 部分の成分は 0 か -1 である。ところで関係行列 R は, $r_{ij}=1(0)$ ならば r_{ji}

$=-1(0)$ なので, β 部分がなくても関係行列は一意に定まる。よって, α 部分の成分を

$$r_{23}, r_{24}r_{34}, \dots, r_{2k}r_{3k} \dots r_{(k-1)k}, \dots, r_{(n-2)(n-1)},$$

と並べて, 関係行列 R を 2 進数表示で表すことが出来る。文献 [15] では, p_2, \dots, p_{n-1} の置換によって得られる最小の 2 進数表示を表現と呼んで, 同型でない束が現われないように工夫されているが, この置換にかなりの時間が費やされる。我々はこの部分を省略して fuzzy 代数を満たす有限束を, 同型であるものも含めて全て導出したのちに, 同型判定を行うことにした。これは, ほとんど多くの有限束が fuzzy 代数の公理を満たさないと予想されるので, fuzzy 代数であると判定されたのちに同型判定をするほうが効率がよいと考えたためである。

集合 P が半順序集合であることを調べるには, この 2 進数表示が反射律, 反対称律, 及び推移律を満たすかどうかを判定すればよいが, この 2 進数表示は反射律及び反対称律は成立するように作られているので, 推移律のみを調べればよい。これは, $i < j < k$ のとき,

$$\begin{aligned} r_{ij}=1 \text{ かつ } r_{jk}=1 \text{ ならば } r_{ik}=1 \\ (r_{ij}=1 \text{ かつ } r_{ik} \neq 1 \text{ ならば } r_{jk} \neq 1) \end{aligned}$$

として判定される。更に, 集合 P が束であることを判定するためには, 各元 p_i, p_j (但し, $i \neq j$) について, $p_i \cup p_j$ と $p_i \cap p_j$ が一意的に存在するかを調べればよい。ここで $p_i \cup p_j$ がいえれば $p_i \cap p_j$ の存在はいえる。なぜなら,

$$L = \{1_s \mid 1_s \leq p_i \text{ かつ } 1_s \leq p_j\}$$

とすると, 最小元は L に属するので空ではなく, $\bigcup 1_s = p_i \cap p_j$ となる。

$p_i \cup p_j$ が一意的に存在する判定は次のように行える。 $i < j$ かつ $r_{ij}=0$ なる任意の i, j に対して, $\{p_i, p_j\}$ の上界が,

$$p_{u_1}, p_{u_2}, \dots, p_{u_k}$$

であるとき, u_1, \dots, u_k の中で最大のものを m とすると, $1 \leq t \leq k$ なる t に対して,

$$p_{u_t} \geq p_m$$

を調べればよい。

以上で, 2 進数表示の中で, 束であるものは (同型であるものも重複されるが) 全て導出することが出来る。尚, 実際には束である 2 進数表示を効率よく求めるた

めに、我々は元の数を増やすたびに上限が一意に存在するかを判定し、一意に存在しないような可能な2進数表示は全て排除するという刈り込みを行っている。上述した有限束の判定方法を利用して、有限 fuzzy 代数の束判定を行った。

次に、fuzzy 代数では単項演算 \sim が定義されているので、以下、これについて述べる。fuzzy 代数においては、演算 \sim に関して、次の性質が成立する。

[性質1] $A \neq B$ ならば $\sim A \neq \sim B$ である。

(証明) $\sim A = \sim B$ とすると、

$$\begin{aligned}\sim(\sim A) &= \sim(\sim B) \\ \therefore A &= B \quad (\because \text{復帰律より})\end{aligned}$$

よって矛盾するので、性質1は成立する。(証明終)

これより、各元の否定は全て異なっている。

[性質2] $\sim A = A$ なる元は、もし存在すれば唯一である。

(証明) $\sim A = A$, $\sim B = B$ とすると、

$$\begin{aligned}A \cup B &= (A \cap A) \cup (B \cup B) \\ &= (A \cap \sim A) \cup (B \cup \sim B) \\ &= B \cup \sim B \quad (\because \text{クリーネ律より}) \\ &= B\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}A \cup B &= (A \cup A) \cup (B \cap B) \\ &= (A \cup \sim A) \cup (B \cap \sim B) \\ &= A \cup \sim A \quad (\because \text{交換律, クリーネ律より}) \\ &= A\end{aligned}$$

従って、 $A = B$

よって、性質2は成立する。(証明終)

このように、fuzzy 代数において、 $\sim A = A$ なる元が存在するとき、これを中心(center)と呼び、もし存在すれば、それは唯一に定まる。

[性質3] $\sim A = B$ ならば $\sim B = A$ である。

(証明) $\sim A = B$ とすると、

$$\begin{aligned}\text{復帰律: } \sim(\sim A) &= A \text{ より} \\ \sim B &= A\end{aligned}$$

よって、性質3は成立する。(証明終)

表3. NOT テーブル

p	p_1	p_2	p_{n-1}	p_n
$\sim p$	p_n	p_{n-1}	p_2	p_1

以上の性質1から3より、 $\sim A = A$ なる元(即ち、中心)を除くと、ある元とその否定の元は互に対称な関係を保つ。これより、否定演算 \sim に関して、表3のような NOT テーブルを用いることが出来る。

fuzzy 代数の判定を行う場合、表2に示された6つの完全で独立な公理系を全て調べなければならないが、以下のように組み合わせて判定手順の簡単化を行う。

最初に、ド・モルガン律(a)及び復帰律の判定省略法を述べる。

(1) ド・モルガン律(a)及び復帰律の簡単化

ド・モルガン律(a): $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ において、

A に $\sim A$, B に $\sim B$ を代入すると、

$$\sim(\sim A \cup \sim B) = \sim(\sim A) \cap \sim(\sim B)$$

ここで復帰律: $\sim(\sim A) = A$ を用いることにより、

$$A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$$

となる。これより演算 \cap は、演算 \cup と演算 \sim により表すことが出来る。

よって、分配律(a)は

$$\begin{aligned}\sim(\sim A \cup \sim(B \cup C)) &= \\ \sim(\sim A \cup \sim B) \cup \sim(\sim A \cup \sim C) &\quad (I)\end{aligned}$$

と変形される。又、クリーネ律(a)は同様に

$$\begin{aligned}\sim(\sim A \cup \sim(\sim A)) \cup (B \cup \sim B) &= B \cup \sim B \\ \therefore \sim(\sim A \cup A) \cup (B \cup \sim B) &= B \cup \sim B \quad (II)\end{aligned}$$

となる。これより、ド・モルガン律(a)と復帰律は調べる必要がない。更に、他の完全で独立な公理についての判定は、以下のようになっている。

(2) 交換律(a)の判定

関係行列 R においては交換律が成立しているので、調べる必要はない。

(3) 最小元の存在(a)の判定

最小元をあらかじめ p_n に設定してあるので、最小元の存在を調べる必要はない。

以上により、有限 fuzzy 代数を数え上げるには、関係行列 R の2進数表示を用いると、式(I)の分配律(a)と、式(II)のクリーネ律(a)を調べるだけでよいことになる。次に、有限 fuzzy 代数の同型判定について述べる。

導出された2つの有限 fuzzy 代数を F_1, F_2 とする。最初に F_1 に存在する各元 p_1, \dots, p_n に対して、その

上界の元の数 $k(1 \leq k \leq n)$ を求める。次に、上界の元の数が同じである元の個数を数えて、上界の元の数が小さい順になるような元の個数の列 m_1, \dots, m_n を求める。 F_2 に対しても同様な操作を行い、この元の個数列が一致していたならば、 F_1 と F_2 は同型な有限 fuzzy 代数と判定される。有限 fuzzy 代数において、このような簡単な方法で同型判定が行えることを、求められた有限 fuzzy 代数については計算機を用いて確認した。しかしながら、全ての有限 fuzzy 代数についてこの方法が正しいかどうかは証明されていない。

これより、次のような有限 fuzzy 代数の判定手順が求まる。

[手順] 有限 fuzzy 代数の判定法

- (1) 関係行列 R の 2 進数表示を作成する。
- (2) 2 進数表示が束であるかを判定する (田村, 田中らによる方法)。
- (3) 式 (I) の分配律を調べる。
- (4) 式 (II) のクリーネ律を調べる。
- (5) 上で述べた同型判定を行う。

上の手順 (1)~(5) により、与えられた 2 進数表示が有限 fuzzy 代数であるかどうか判定出来る。これを全ての可能な 2 進数表示について行った結果、表 4 に示すような元の数 $n=2$ から $n=11$ までの有限 fuzzy 代数が数え上げられた。数え上げにおいては、プログラムを C 言語で記述し、FACOM S-3500 電子計算機を使って実行した。尚、表 4 において、real は経過時間を、user は利用者時間を、sys はシステム時間を示す。

ここで表 4 の出力結果の見方を、元の数 $n=7$ の No.1 を例にとって説明する。2 進数表示: 0, 11, 111, 1110, はそれぞれ関係行列 R の成分である $r_{23}, r_{24}r_{34}, r_{25}r_{35}r_{45}, r_{26}r_{36}r_{46}r_{56}$, を示しており、この場合、 r_{23}, r_{56} が 0, それ以外は 1 である。よって元の間関係は、

$$p_2 > p_4 > p_5, p_2 > p_4 > p_6, p_3 > p_4 > p_5, p_3 > p_4 > p_6,$$

となっている。これを、最大元 p_1 及び最小元 p_7 も含めてハッセ図で描き表すと、図 1(a) のようになる。有限 fuzzy 代数においては、元の間否定演算~に関して表 3 のような対応関係が成立しているため、この関係を強調するために、 p_1 を 1 (p_7 を $\sim 1 = 0$) に、 p_2 を a (p_6 を $\sim a$) に、 p_3 を b (p_5 を $\sim b$) に、 p_4 を c (ここで $\sim c = c$, 即ちこの元は中心である) に対応させることにより、図 1(b) のようなハッセ図が得られる。表 4 の全ての 2 進数表示をこのようにハッセ図に描き直すことにより、図 2 に示されるような $n=11$ までの有限

表 4. 元の数 $n=4 \sim 11$ までの有限 fuzzy 代数の出力結果 (その 1)

```
number of elements = 4
No. 1      0,
No. 2      1,
count = 2
real       0.26
user       0.00
sys        0.03
```

```
number of elements = 5
No. 1      1, 11,
count = 1
real       0.26
user       0.00
sys        0.03
```

```
number of elements = 6
No. 1      0, 10, 110,
No. 2      1, 10, 111,
No. 3      1, 11, 111,
count = 3
real       0.13
user       0.05
sys        0.03
```

```
number of elements = 7
No. 1      0, 11, 111, 1110,
No. 2      1, 11, 111, 1111,
count = 2
real       0.40
user       0.33
sys        0.03
```

```
number of elements = 8
No. 1      0, 00, 110, 1010, 01100,
No. 2      0, 01, 110, 1111, 01100,
No. 3      0, 11, 111, 1111, 11110,
No. 4      1, 10, 110, 1110, 11111,
No. 5      1, 11, 110, 1111, 11111,
No. 6      1, 11, 111, 1111, 11111,
count = 6
real       4.51
user       4.35
sys        0.05
```

表 4. 元の数 $n=4\sim 11$ までの有限 fuzzy 代数の出力結果 (その 2)

number of elements = 9

No. 1	0, 01, 110, 1000, 11011, 111100,
No. 2	0, 11, 111, 1111, 11111, 111110,
No. 3	1, 10, 111, 1111, 11110, 111111,
No. 4	1, 11, 111, 1111, 11111, 111111,
count = 4	
real	1:10.60
user	1:06.71
sys	0.36

number of elements = 10

No. 1	0, 01, 011, 1100, 11101, 111111, 0111000,
No. 2	0, 01, 110, 1111, 11010, 111111, 1111100,
No. 3	0, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111110,
No. 4	0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111110,
No. 5	1, 10, 100, 1110, 11010, 101100, 1111111,
No. 6	1, 10, 101, 1110, 11111, 101100, 1111111,
No. 7	1, 10, 111, 1111, 11111, 111110, 1111111,
No. 8	1, 11, 110, 1110, 11110, 111111, 1111111,
No. 9	1, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111111,
No. 10	1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111,
count = 10	
real	24:49.63
user	24:17.38
sys	6.98

number of elements = 11

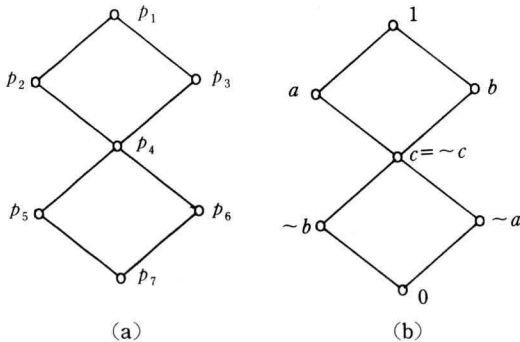
No. 1	0, 01, 110, 1111, 11111, 111110, 1111111, 11111100,
No. 2	0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111110,
No. 3	1, 10, 101, 1110, 11000, 111011, 1111100, 11111111,
No. 4	1, 10, 111, 1111, 11111, 111111, 1111110, 11111111,
No. 5	1, 11, 110, 1111, 11111, 111110, 1111111, 11111111,
No. 6	1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111,
count = 6	
real	15:21:07.16
user	13:34:21.18
sys	3:59.98

fuzzy 代数が得られる。

最後に、有限 fuzzy 代数の予想モデルについて述べる。元の数 n である有限ブール代数については、よく知られているように、そのモデルが集合束 2^n に同型である。fuzzy 代数はブール代数における相補律を弱めた代数であるので、当然ながら、有限ブール代数は

有限 fuzzy 代数の一部 (例えば、図 2 の $n=2$ (No.1), $n=4$ (No.1), $n=8$ (No.1) など) となっている。又、有限 fuzzy 代数には、線形モデル (図 2 の全ての元の数 n について、その最後には必ず存在している) 及び直積モデル (例えば、図 2 の $n=6$ (No.1), $n=8$ (No.2), $n=9$ (No.1), $n=10$ (No.1) など) が、必ず存在し

ている。これ以外のモデルについては、今のところ、どのようなモデルが有限 fuzzy 代数に必ず存在するかは分かっていない。しかしながら、図 2 のハッセ図から、次のような構成法が予想出来る。即ち、元の数が少ない有限 fuzzy 代数をもとにして、その一部分を否定演算 \sim に関する対称性を考慮に入れて、既に得られている fuzzy 代数のモデルで置き換えたものは、有限 fuzzy 代数のモデルに含まれている。例えば、図 2 の $n=3$ (No. 1) のモデルをもとに、その元 1 及び 0 を $n=4$ (No. 1) の有限 fuzzy 代数で置き換えることにより、 $n=9$ (No. 2) の有限 fuzzy 代数が得られる。同様に、図 2 の $n=3$ (No. 1) のモデルにおいて、その元 $a = \sim a$ を $n=6$ (No. 1) の有限 fuzzy 代数で置き換えることにより、 $n=8$ (No. 4) の有限 fuzzy 代数が得られる。fuzzy 代数の構造を明らかにする上で、全ての有限 fuzzy 代数を求めることが出来るような構成方法を見つけることは重要な問題である。有限 fuzzy 代数の構成方法については、これまでに幾つかの予想が立てられているが⁴⁾¹¹⁾、その証明はまだ出来ていない。尚、文献 [16] に全ての有限ブール代数は、超フィルターを用いて、その商代数が元の数 2 の有限ブール代数（即ち、集合束 2^1 のブール代数）に同型であると述べられている。有限 fuzzy 代数については、最大元 (1) 及び最小元 (0) からなる自明な有限 fuzzy 代数（即ち、図 2 の $n=2$ (No. 1)）を除けば、全ての有限 fuzzy 代数は元の数 $n=3$ の有限 fuzzy 代数（即ち、図 2 の $n=3$ (No. 1) の形）に帰着出来ると予想される。

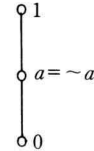
図 1. 有限 fuzzy 代数: $n=7$ (No. 1)Fig. 1. Finite fuzzy algebra: $n=7$ (No. 1)

n=2



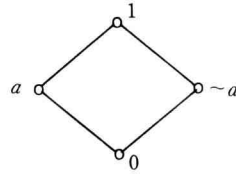
(No. 1)

n=3

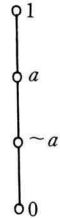


(No. 1)

n=4

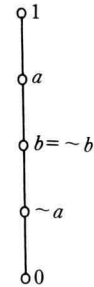


(No. 1)



(No. 2)

n=5

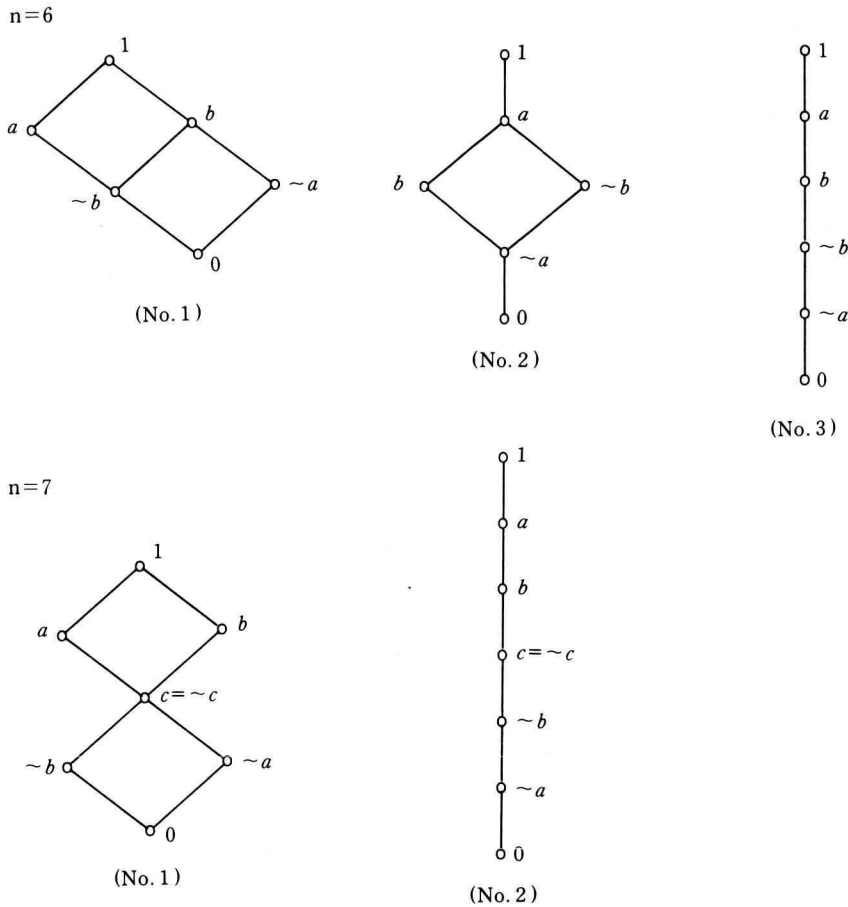


(No. 1)

図 2. 元の数 $n=2\sim 11$ までの有限 fuzzy 代数のハッセ図(その 1: $n=2\sim 5$)Fig. 2. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$ (Part 1: $n=2\sim 5$)

4. あ と が き

本報告では、有限 fuzzy 代数の数え上げを行い、元の数 $n=11$ までの全ての有限 fuzzy 代数を算出する

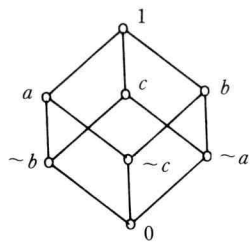
図 2. 元の数 $n=2\sim 11$ までの有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 2: $n=6, 7$)Fig. 2. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$ (Part 2: $n=6, 7$)

ことが出来た。有限 fuzzy 代数に対する数え上げについては、著者の知る限り、本報告で示された元の数 $n=11$ がこれまで得られている最も元の数が多いものである。しかしながら、この方法を使っても元の数 $n=12$ 以上については、その計算時間がかかりすぎるために事実上不可能であるので、これについては更に高速なアルゴリズムを開発する必要がある。更に、計算機に依らないで有限 fuzzy 代数を構成的に求める方法、即ち、構成的なモデルの構築方法を見つけ出す必要がある。これについては、本報告の最後で述べたように、幾つかの予想が考え出されているが、まだ一部のみの構

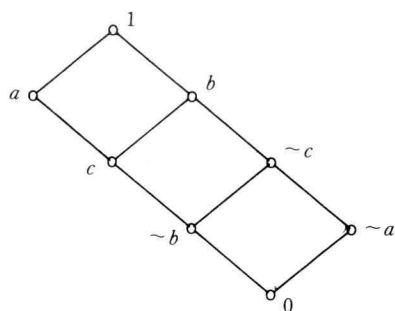
成法であって、完全な方法は証明されていない。最後に fuzzy 代数に関する残された問題として、上述した構成方法を求める問題の他に、公理系に対する問題として、これまでに求められたものとは異なる完全で独立な公理系を見つける問題、及び、完全で独立な公理系には少なくとも何個の公理が必要であるかを求める問題などがある。

謝辞 日頃、御指導頂く本学情報工学科科長西岡篤夫教授、及び北條尚志教授に深謝致します。

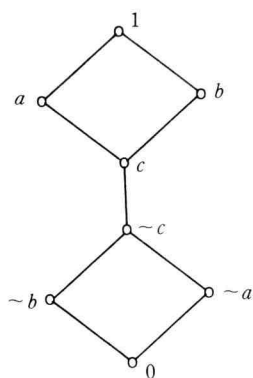
n=8



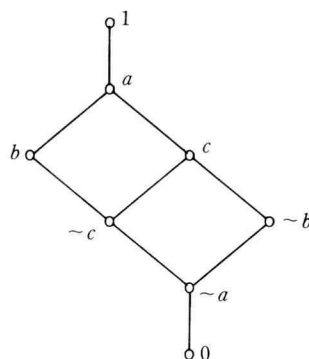
(No. 1)



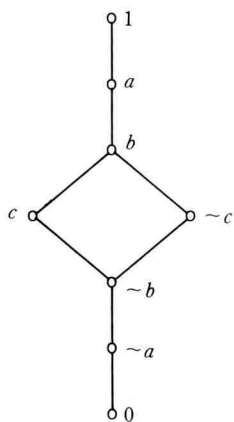
(No. 2)



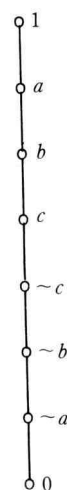
(No. 3)



(No. 4)



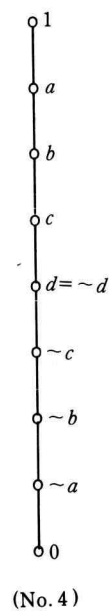
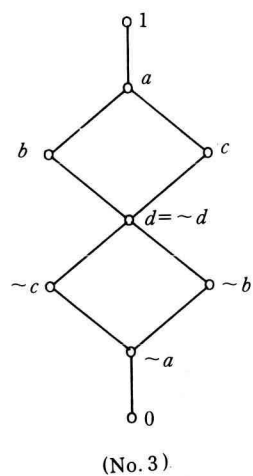
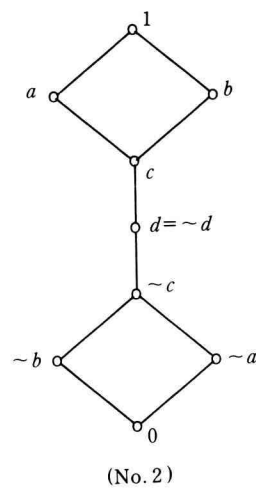
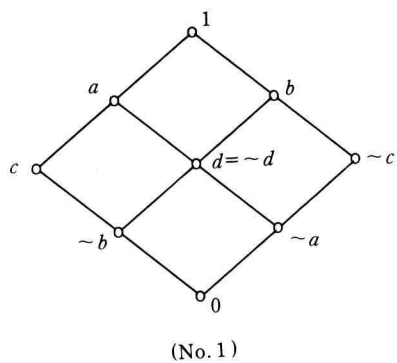
(No. 5)



(No. 6)

図 2. 元の数 $n=2\sim 11$ までの有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 3: $n=8$)Fig. 2. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$ (Part 3: $n=8$)

n=9

図 2. 元の数 $n=2\sim 11$ までの有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 4: $n=9$)Fig. 2. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$ (Part 4: $n=9$)

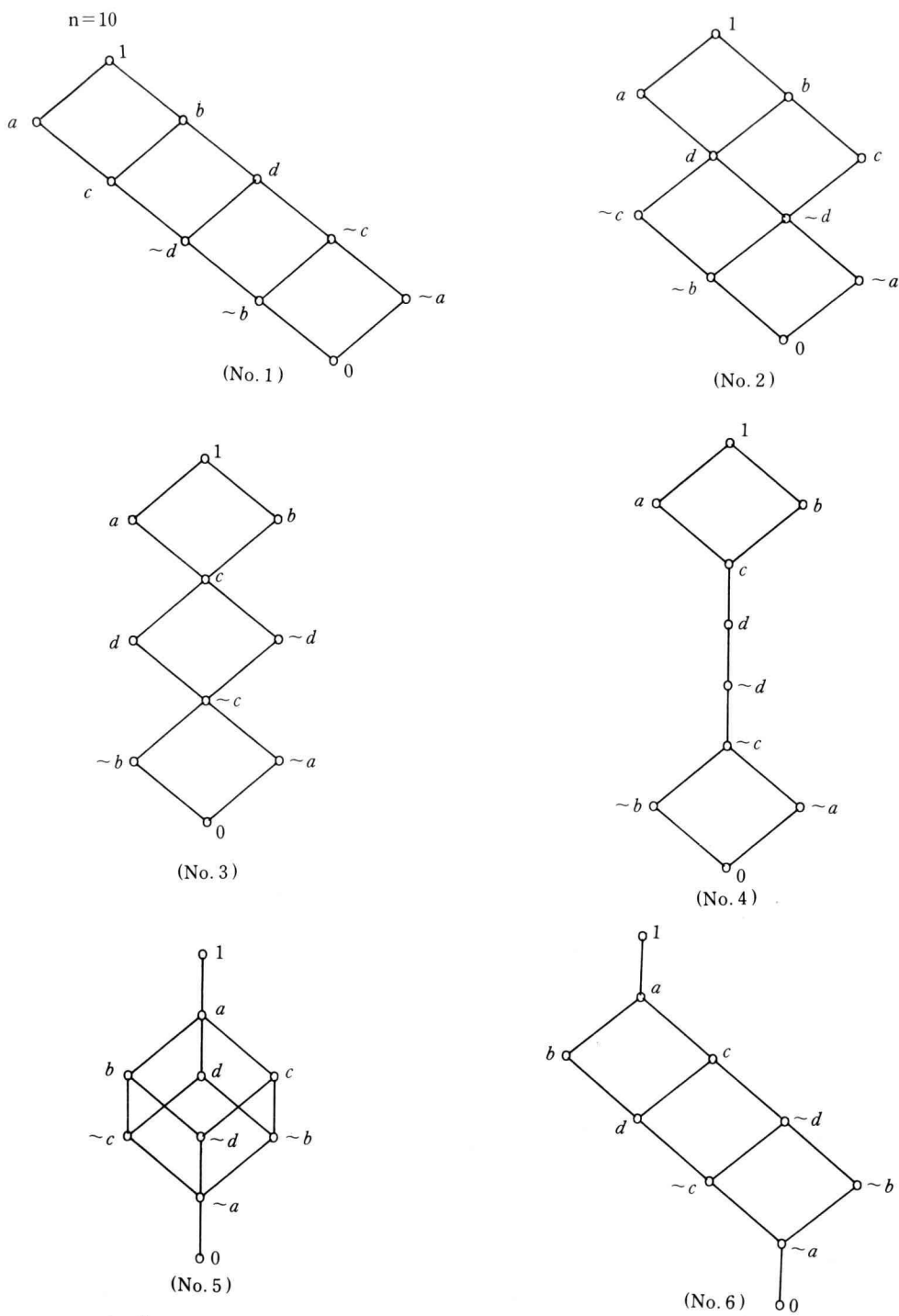
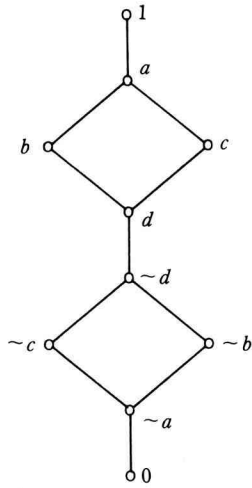


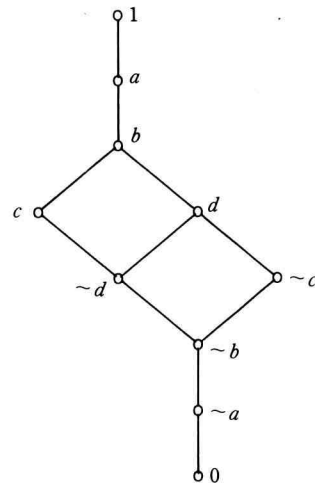
図2. 元の数 $n=2\sim 11$ までの有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 5(a): $n=10$)

Fig. 2. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$ (Part 5(a): $n=10$)

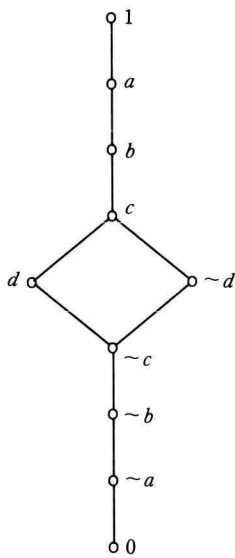
n=10 (続く)



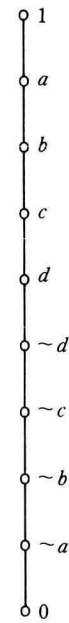
(No. 7)



(No. 8)



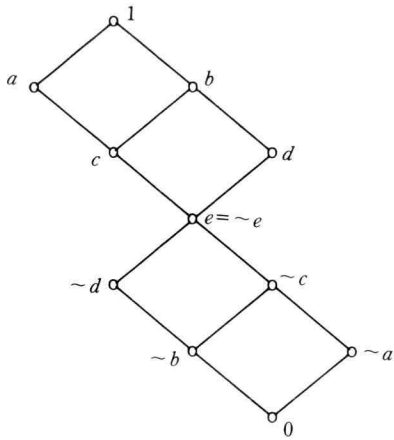
(No. 9)



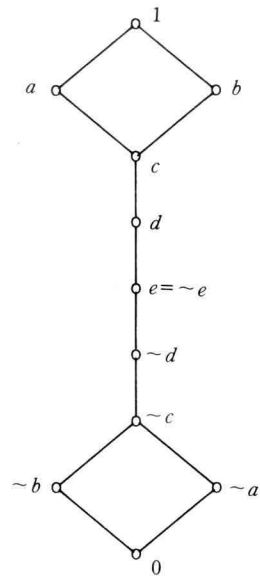
(No. 10)

図 2. 元の数 $n=2\sim 11$ までの有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 5(b): $n=10$)Fig. 2. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$ (Part 5(b): $n=10$)

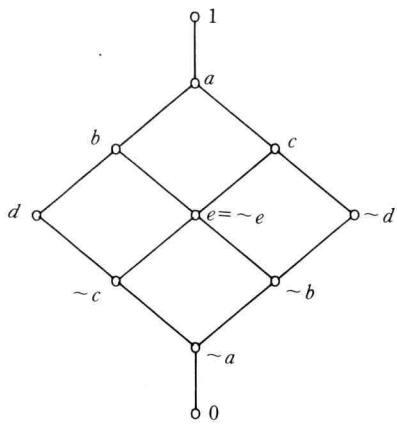
n=11



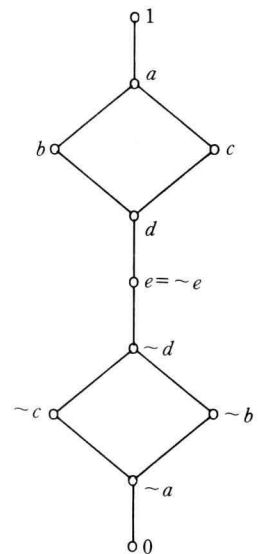
(No. 1)



(No. 2)



(No. 3)



(No. 4)

図 2. 元の数 $n=2\sim 11$ までの有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 6(a): $n=11$)Fig. 2. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$ (Part 6(a): $n=11$)

n=11 (続く)

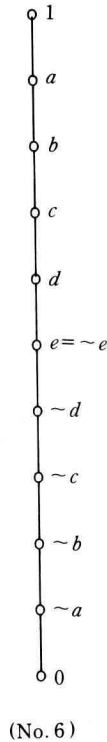
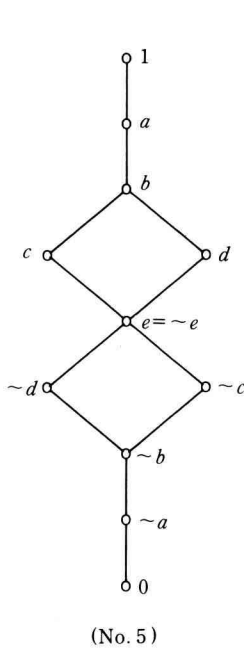


図 2. 元の数 $n=2\sim 11$ までの有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 6(b): $n=11$)

Fig. 2. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$ (Part 6(b): $n=11$)

参 考 文 献

- 1) L.A. Zadeh: Fuzzy sets, Inf. and Control, 8, pp. 338-353 (1965).
- 2) M. Mukaidono: A Set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra), IEEE Proc. 11th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp. 27-34 (1981).

- 3) 川崎, 栗山: 公理系を満足する代数系の計算機による発見, 昭和 57 年度明治大学工学部電子通信工学科卒業論文.
- 4) 小林: Fuzzy 代数の有限モデルの発見, 昭和 62 年度明治大学工学部電子通信工学科卒業論文.
- 5) R. Balbes and P. Dwinger: Distributive lattices, Univ. Missouri Press, pp. 211-227 (1974).
- 6) A. Bialynicki-Birula and H. Rasiowa: On the representation of quasi-Boolean algebras, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl-3, 5, pp. 259-261 (1957).
- 7) R. Cignoli: Injective De Morgan and Kleene algebras, Proc. Amer. Math. Soc, 47, 2, pp. 269-278 (1975).
- 8) J. Berman and M. Mukaidono: Enumerating fuzzy switching functions and free Kleene algebra, Comp. Math. Appl. 10, pp. 25-35 (1984).
- 9) M. Sholander: Postulates for distributive lattices, Canadian Journal of Math. 3, pp. 28-30 (1951).
- 10) R. Maronna: A characterization of Morgan lattices, Portugal Math. 23, pp. 169-173 (1964).
- 11) 高橋: Fuzzy 代数の公理系の完全性と独立性に関する研究, 昭和 55 年度明治大学大学院工学研究科修士論文.
- 12) E.V. Huntington: Sets of independent postulates for the algebra of logic, Trans. Amer. Math. Soc, 5, pp. 288-309 (1904).
- 13) 淡中, 久野: 有限束をつくる (上, 下), 数学セミナー, Vol. 16, 7; pp. 13-17, 8; pp. 55-60 (1977).
- 14) 野崎: 計算機と組合せ論, 数理科学, No. 227, pp. 31-35 (1982).
- 15) 田村, 田中: コンピュータによる有限束の数え上げ, 数理科学, No. 247, pp. 51-55 (1984).
- 16) 清水: 記号論理学, 東京大学出版会, pp. 148-154 (1984).