

ユニイトな正則 3 値論理関数の数の 上限及び下限について

巽 久行, 向殿 政男*, 木名瀬 亮

Bounds on the Number of Unate Regular Ternary Logic Functions

Hisayuki TATSUMI, Masao MUKAIDONO* and Akira KINASE

Abstract

Two special kinds of ternary logic functions, called unate regular ternary logic functions and monotone regular ternary logic functions, are already defined. A unate regular ternary logic function can be derived from a monotone regular ternary logic function by negation of variables. Moreover, it is shown that any monotone regular ternary logic function of n variables corresponds one-to-one to a monotone Boolean function of $n+1$ variables.

Based on the above properties and using the bounds on the number of monotone Boolean functions, this paper describes the upper and lower bounds on the number of unate regular ternary logic functions.

1. ま え が き

3 値論理関数の研究は古くから行われているが, 工学的な応用を考える場合には, 3 値論理関数全体を対象とするよりもある特定の性質を満たす 3 値論理関数の集合を対象とすることが多い。3 値論理において, 真を表わす真理値 (1), 偽を表わす真理値 (0) 以外に, 真であるか偽であるか不明であることを表わす真理値 (1/2) を導入したときに意味を持つような 3 値論理関数が, 正則 3 値論理関数の名称で研究されている¹⁾。正則 3 値論理関数は, 古典的な 2 値論理関数を拡張した不確定な状態を記述するのに適した 3 値論理関数であり, その基本的な性質や¹⁾, フェイルセーフ論理回路への応用²⁾ などが既に報告されている。

ある論理関数が, 各変数について肯定又は否定のみからなる論理式で表現出来るとき, その関数はユニイトであるという。特に, すべての変数が肯定で表わされるものを単調な論理関数という。論理関数の数の上限及び下限を求めることは, その関数の表現能力を知

る上で重要な問題となる。本報告は, 正則 3 値論理関数の部分集合であるユニイトな正則 3 値論理関数について, 既に知られている基本的な性質をもとに³⁾, その数の上限及び下限について考察した。最初に, ユニイトな正則 3 値論理関数とその部分集合である単調な正則 3 値論理関数の定義を行い, 次にこれまで知られている諸性質の中で, 本報告で最少限必要なものを列挙する。最後に, 古くから研究されている単調 2 値論理関数の数の上限及び下限を求める方法をもとにして, ユニイトな正則 3 値論理関数の数の上限及び下限について考察を行う。尚, 本報告の中で議論する単調論理関数とは, 単調増加な論理関数のことである。

2. 諸 定 義

n 変数の 3 値論理関数 F は, 真理値の集合を $V = \{0, 1/2, 1\}$ とするとき, V^n から V への写像

$$F: V^n \rightarrow V$$

である。3 値をとる変数 x_i ($1 \leq i \leq n$) と, 定数 0, 1/2, 1 及び論理演算 AND(\cdot), OR(\vee), NOT($-$) との有限回の結合により構成される論理式が表現する 3 値論

理関数を, 論理式で表現される 3 値論理関数と呼ぶ。但し, AND, OR, NOT は, それぞれ次のように定義される。

$$\begin{aligned}x_i \cdot x_j &= \min \{x_i, x_j\} \\x_i \vee x_j &= \max \{x_i, x_j\} \\\bar{x}_i &= 1 - x_i\end{aligned}$$

真理値 0, 1/2, 1 に, それぞれ偽, 真か偽か不明, 真の意味づけをして, 集合 V の間に次のようなあいまいさに関する半順序関係 \leq を定義する。

[定義 1] $0 \leq 1/2, 1 \leq 1/2, i \leq i (i \in V)$ 。但し 0 と 1 とは比較不可能である。

この関係を, 3 値論理関数の定義域 V^n にまで拡張定義する。即ち, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ を V^n の元とするとき,

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow \forall i (a_i \leq b_i)$$

である。この半順序関係を保存するような 3 値論理関数 F , 即ち,

(C1) あいまいさに関する単調性:

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Rightarrow F(\mathbf{a}) \leq F(\mathbf{b})$$

を満たす 3 値論理関数を, 正則 3 値論理関数という。論理式で表現された 3 値論理関数は正則 3 値論理関数であり, 逆に正則 3 値論理関数は論理式で表現出来ることが知られている¹⁾。

変数又は変数の否定を文字という。ある変数について肯定, 否定とが同時に存在しないような幾つかの文字の積 (AND) を単積項, 和 (OR) を単和項という。ここで V^n と単積項及び単和項との間に, 次のような対応を定義する。

[定義 2] $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in V^n$ と単積項 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ (単和項 $x_1^{a_1} \vee \cdots \vee x_n^{a_n}$) とは, 次のとき互に対応しているという。

$$\begin{aligned}a_i = 1 &\Leftrightarrow x_i^{a_i} = x_i \quad (x_i^{a_i} = \bar{x}_i) \\a_i = 0 &\Leftrightarrow x_i^{a_i} = \bar{x}_i \quad (x_i^{a_i} = x_i) \\a_i = 1/2 &\Leftrightarrow \text{変数 } x_i \text{ は存在しない}\end{aligned}$$

n 変数の正則 3 値論理関数 F に対して, 1, 0, 1/2 に写像される V^n の部分集合を, それぞれ $F^{-1}(1)$, $F^{-1}(0)$, $F^{-1}(1/2)$ で表わすことにする。 F は (C1) の条件を満たしているから, $F^{-1}(1)$, $F^{-1}(0)$, $F^{-1}(1/2)$ は半順序関係 \leq に関して半順序集合をなしており, $F^{-1}(1)$, $F^{-1}(0)$ はその極大元により, $F^{-1}(1/2)$ はその極小元により一意的に定まる。ここで正則 3 値論理関

$x_2 \backslash x_1$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

図 1. F_1 …非正則 3 値論理関数の例

Fig.1. F_1 …An example of non-regular ternary logic function

$x_2 \backslash x_1$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1

図 2. F_2 …正則 3 値論理関数の例

Fig.2. F_2 …An example of regular ternary logic function

数の標準形として, 次の定理が知られている。

[定理 1]¹⁾ 任意の正則 3 値論理関数 F は,

$$F = F^1 \vee (1/2) \cdot F^0$$

なる論理式で一意的に表現出来る。但し, F^1 は $F^{-1}(1)$ のすべての極大元に対応する単積項の和, F^0 は $F^{-1}(0)$ のすべての極大元に対応する単和項の積である。

(証明略)

[例 1] 2 変数の 3 値論理関数 F_1 及び F_2 が, 図 1 及び図 2 の真理値表で与えられているとする。 F_1 は正則 3 値論理関数ではない。なぜならば, $F_1(0, 0) = 1 \neq 0 = F_1(0, 1/2)$ であり, (C1) の条件を満たしていない。しかし F_2 は (C1) の条件を満たしているので正則 3 値論理関数である。よってこの標準形を用いて論理式で表現すると, $F^{-1}(1)$ の極大元は (1/2, 0), (1, 1), $F^{-1}(0)$ の極大元は (0, 1) であるから, $F_2 = \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2 \vee (1/2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2)$ となる。

正則 3 値論理関数においては, 分配律, ド・モルガン律, ベキ等律などが成立するので加法形式に展開出

来る。また積項同志の包含関係 \subseteq については、ある 2 つの積項 a, a' において、 a に存在する文字がすべて a' にも存在するとき $a' \subseteq a$ と記す。正則 3 値論理関数では吸収律も成立することから、 $a \vee a' = a$ となり、 a' は a により省略される。例 1 の論理式を加法形式に展開して包含される積項 $(1/2) \cdot \bar{x}_2 (\subseteq \bar{x}_2)$ を除くと、 $F_2 = (1/2) \cdot x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2$ を得る。

真理値集合 V に、通常的全順序関係 \leq を導入する。即ち、 $0 \leq 1/2 \leq 1$ である。この関係は、次のようにして V^n の各元の間にも拡張定義出来る。即ち $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ を V^n の元とすると、

$$a \leq b \Leftrightarrow \forall i (a_i \leq b_i)$$

である。正則 3 値論理関数 F において、更に

(C2) 単調性:

$$a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$$

を満たすものを、単調正則 3 値論理関数と呼ぶ。単調正則 3 値論理関数は否定を含まない論理式で表現出来ること、逆に否定を含まない論理式で表現された 3 値論理関数は単調正則 3 値論理関数であることが既に知られている³⁾。単調正則 3 値論理関数 F を表現する論理式は、加法形式

$$F = a_1 \vee \dots \vee a_m$$

に展開出来る。ここで各積項 a_i は、次の 2 種類のいずれかに等しい。

$$\begin{aligned} \text{単積項} & x_{i_1} \dots x_{i_k} \\ 1/2 \text{ 単積項} & (1/2) \cdot x_{i_1} \dots x_{i_k} \quad (\text{但し}, 1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

各積項 a_i は否定を含まないので、単調正則 3 値論理関数においては定義 2 で示した V^n の元と単積項との対応を、次のように行うことにする。

[定義 3] $a = (a_1, \dots, a_n)$ を M^n (但し、 $M = \{1, 1/2\} \subset V$) の元とする。このとき a と上の 2 種類の積項とは、次のとき互に対応しているという。

$$\begin{aligned} a_i = 1 & \Leftrightarrow \text{変数 } x_i \text{ は存在する} \\ a_i = 1/2 & \Leftrightarrow \text{変数 } x_i \text{ は存在しない} \end{aligned}$$

[定義 4] 単調正則 3 値論理関数 F が加法形式で与えられていて、

$$\forall i, j (i \neq j); a_i \not\subseteq a_j$$

であるとき、 F は加法標準形で表現されているという。

任意の単調正則 3 値論理関数に対して加法標準形は必ず存在して、しかもそれは(積項の順番を無視して)一意的に定まることが知られている³⁾。

単調正則 3 値論理関数を拡張して、次のようなユネイト正則 3 値論理関数が定義される。

[定義 5] 正則 3 値論理関数 F を、ある変数について x_i 又は \bar{x}_i の一方しか含まない論理式で表現出来るならば、 F は x_i についてユネイトであるという。 F がすべての変数についてユネイトであるとき、 F をユネイト正則 3 値論理関数という。

単調正則 3 値論理関数は、すべての変数が肯定で表われるユネイト正則 3 値論理関数である。ユネイト正則 3 値論理関数 F の変数の組 $x = (x_1, \dots, x_n)$ と V^n の元 $p = (p_1, \dots, p_n)$ との間に、次のような対応を考える。即ち F において、

$$\begin{aligned} x_i \text{ が肯定 (否定) である} & \Leftrightarrow p_i = 1 (0) \\ x_i \text{ は存在しない} & \Leftrightarrow p_i = 1/2 \end{aligned}$$

とする。このようにして得られた V^n の元 p を、 F の置き換えベクトルと呼ぶ。置き換えベクトル p の指示に従ってユネイト正則 3 値論理関数 F の変数を置き換える(即ち、 $p_i = 1(0)$ ならば $x_i(\bar{x}_i)$ で置き換え、 $p_i = 1/2$ ならば何もしない) と、 F は単調正則 3 値論理関数となる。

[例 2] 2 変数の 3 値論理関数 F_3 及び F_4 が、図 3 及び図 4 の真理値表で与えられているとする。 F_3 は (C1) の条件及び (C2) の条件を満たしているので単調正則 3 値論理関数である。 F_3 を定理 1 を用いて論理式で表現すると、 $F_3 = x_1 \vee (1/2) \cdot (x_1 \vee x_2)$ となり否定を含まない論理式で表現出来る。更に加法形式に展開して包含される積項 $(1/2) \cdot x_1 (\subseteq x_1)$ を取り除くと $F_3 = x_1 \vee (1/2) \cdot x_2$ となり、単積項 x_1 と $1/2$ 単積項 $(1/2) \cdot x_2$ からなる加法標準形を得る。又、 F_4 を定理 1 を用いて論理式で表現すると、 $F_4 = \bar{x}_2 \vee (1/2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2)$ となり、変数 x_1 について肯定、変数 x_2 について否定で表われるユネイト正則 3 値論理関数となる。ここで F_4 の置き換えベクトル $p = (1, 0)$ の指示に従って変数を置き換えると、 $F'_4 = x_2 \vee (1/2) \cdot (x_1 \vee x_2)$ なる単調正則 3 値論理関数となる。逆に、適当な置き換えベクトルによってこの単調正則 3 値論理関数 F'_4 に帰着されるユネイト正則 3 値論理関数の数は、置き換えベクトル p に存在する 0 と 1 の個数の和を m とすると、 2^m 個(即ち、 $2^2 = 4$ 個)存在することが分かる。

これより n 変数のユネイト正則 3 値論理関数の数

$x_2 \backslash x_1$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1/2	1/2	1

図3. F_3 …単調正則3値論理関数の例Fig. 3. F_3 …An example of monotone regular ternary logic function

$x_2 \backslash x_1$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1/2

図4. F_4 …ユニテ正則3値論理関数の例Fig. 4. F_4 …An example of unate regular ternary logic function

を求める問題は、 n 変数の単調正則3値論理関数に存在するすべての可能な変数の置き換えを数え上げる問題に帰着される。

3. 上限及び下限

前節の定義3より、 n 変数の単調正則3値論理関数に存在する単積項と集合 M^n の元との間には1対1の対応が成立する。ある2つの単積項を α_i, α_j とし、それに対応する M^n の元を $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j$ とすると、 $\alpha_i \leq \alpha_j$ ならば $\mathbf{a}_i \leq \mathbf{a}_j$ であり、逆も成り立つ。同様に、1/2単積項と集合 M^n の元との間にも1対1対応が成立し、ある2つの1/2単積項を β_i, β_j とし、それに対応する M^n の元を $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j$ とすると、 $\beta_i \leq \beta_j$ ならば $\mathbf{b}_i \leq \mathbf{b}_j$ であり、逆も成り立つ。又、単積項 α_i と1/2単積項 β_i の間にも、 $\beta_i \leq \alpha_i$ ならば $\mathbf{b}_i \leq \mathbf{a}_i$ であり、逆も成立する(但し、 $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i$ ならば $\beta_i \leq \alpha_i$ とする)。よって n 変数の単調正則3値論理関数に存在する全ての単積項に対応する M^n の元の集合を M_1 とし、全ての1/2単積項に対応する M^n の元の集合を M_2 とすると、集合 $M_1 \cup M_2$ は

関係 \leq に関して半順序集合をなす。ここで1/2単積項に表われる1/2を変数 x_{n+1} で置き換えれば、集合 $M_1 \cup M_2$ と集合 M^{n+1} とは1対1に対応することになる。よってこの対応により、 n 変数の単調正則3値論理関数に存在する積項についての命題は、すべて集合 M^{n+1} の元についての命題として解釈出来る。以降適宜使い易い方を用い、誤りのない限り両者を同一視する。

[定義6]⁴⁾ ある有限分配束 L の任意の元を a, b, c とする。 L において、元 $a (\neq 0)$ が次の条件を満たすとき、 a を L の既約元 (join-irreducible element) であるという。

$$a = b \vee c \Rightarrow a = b \text{ 又は } a = c$$

[定義7]⁴⁾ 半順序集合 (P, \leq_P) の任意の部分集合 $A = \{e_1, \dots, e_s\}$ が全順序集合であるとき、即ち、 $e_1 \leq_P \dots \leq_P e_s$ が成り立つとき、集合 A は鎖 (chain) であるという。又、集合 A においてどの2つの元も互いに比較不可能であるとき、即ち、 $e_i \not\leq_P e_j$ ($i \neq j$) が成り立つとき、集合 A は反鎖 (anti-chain) であるといい、元の個数 $|A|$ を反鎖 A の大きさと呼ぶ。便宜上、空集合は1つの反鎖とする。

一般に有限分配束の元の数は、その既約元が作る半順序集合の反鎖の数に等しいことが知られている⁴⁾。

[定理2] n 変数の単調正則3値論理関数の加法標準形と集合 M^{n+1} の反鎖とは、1対1に対応する。

(証明) $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_m$ を、 n 変数の単調正則3値論理関数の1つの加法形式とする。 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ に対応する集合 M^{n+1} の元を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ とすると、加法標準形で表現されていれば、 $\alpha_i \not\leq \alpha_j$ より $\mathbf{a}_i \not\leq \mathbf{a}_j$ (但し、 $i \neq j$) となるので、集合 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ は M^{n+1} の1つの反鎖である。逆も同様である。(証明終)

[例3] 前節の例2の F_3 に対しては、集合 M^{n+1} の1つの反鎖 $\{(1, 1/2, 1/2), (1/2, 1, 1)\}$ が対応する。

一般に、半順序集合の反鎖の数を数え上げる良いアルゴリズムは知られていない。 n 変数の単調正則3値論理関数は有限分配束をなすこと、更にその既約元は単積項及び1/2単積項であることは既に示されている³⁾。よって定理2より、 n 変数の単調正則3値論理関数の数を数え上げる問題は、半順序集合 M^{n+1} のすべての反鎖の数を数え上げる問題に帰着出来る。ここで単調正則3値論理関数の数に関して、次の定理が成立する。

[定理3]³⁾ n 変数の単調正則3値論理関数の数は、

$(n+1)$ 変数の単調2値論理関数の数に等しい。

(証明略)

この定理が成立することは、半順序集合 M^{n+1} に対応する単積項はすべて文字として $x_i (1 \leq i \leq n+1)$ のみからなる単積項であり、その反鎖が $(n+1)$ 変数の単調2値論理関数の加法標準形に対応することより明らかである。 n 変数の単調2値論理関数の数を求める問題は古くから Dedekind 問題⁴⁾ (生成元 n 個の自由ブール束の数え上げ問題) として良く知られており、現在その正確な数が $n=7$ 以下について Church⁵⁾⁶⁾ により求められており、その確認も行われている⁷⁾。又、その数の上限及び下限についても多くの研究がなされており⁸⁾⁻¹³⁾、fuzzy 論理関数の上限及び下限を求める問題にも応用されている¹⁴⁾。本報告でも、 n 変数のユニテ正則3値論理関数の数の上限及び下限を求める問題を、 n 変数の単調正則3値論理関数の上限及び下限を求める問題に帰着させることにし、その際、既に知られている単調2値論理関数の上限及び下限を算出する方法を用いることにする。

前節の結果より、ユニテ正則3値論理関数の数を求めるには、単調正則3値論理関数に存在する全ての可能な変数の置き換えを数え上げればよい。

[例4] 1変数の単調正則3値論理関数に存在する既約元、即ち単積項及び $1/2$ 単積項は、図5に示するような半順序集合をなす。これより作られる6つの反鎖 $\{1\}, \{x_1\}, \{1/2\}, \{(1/2) \cdot x_1\}, \{x_1, 1/2\}, \{\}$ (通常0で表わす) は、図6に示すような有限分配束となる。よって、1変数の単調正則3値論理関数の数は6個である。図6より、1変数の単調正則3値論理関数は真に1変数のみからなる単調正則3値論理関数の集合 $\{x_1 \vee (1/2), x_1, (1/2) \cdot x_1\}$ と、変数が存在しない集合 $\{1, 1/2, 0\}$ に分割される。ここで前者の集合には可能な変

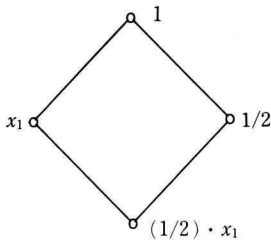


図5. 1変数の積項からなる半順序集合

Fig. 5. The partially ordered set of one-variable product terms

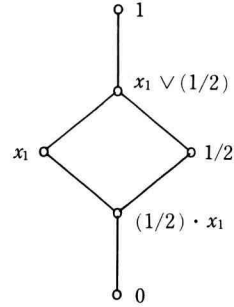


図6. 1変数の単調正則3値論理関数が構成する分配束

Fig. 6. The distributive lattice which is composed of one-variable monotone regular ternary logic functions

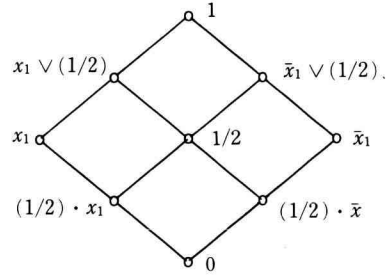


図7. 1変数のユニテ正則3値論理関数が構成する分配束

Fig. 7. The distributive lattice which is composed of one-variable unate regular ternary logic functions

数の置き換えが各 2^1 個存在するので、 $3 \times 2^1 + 3 \times 2^0 = 9$ 個よりなる図7のような1変数のユニテ正則3値論理関数が求められる。

上の例から分かるように、 n 変数のユニテ正則3値論理関数の数を求めるには、真に n 変数からなる単調正則3値論理関数の数を求めておく必要がある。 n 変数の単調正則3値論理関数の数を $M^3(n)$ 、真に n 変数の単調正則3値論理関数の数を $E^3(n)$ とすると、これは次のようにして簡単に求めることができる。

$$E^3(n) = M^3(n) - \sum_{k=0}^{n-1} E^3(k) \cdot \binom{n}{k}$$

$$E^3(0) = 3$$

但し $E^3(0)$ とは、定数 $0, 1/2, 1$ に相当する。これより

n 変数のユネイト正則 3 値論理関数の数 $U^3(n)$ は,

$$U^3(n) = \sum_{k=0}^n E^3(k) \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^k$$

で求めることが出来る。この方法を用いて、現在 $n=6$ までのユネイト正則 3 値論理関数の数が算出されている³⁾。尚、同様な方法でユネイト 2 値論理関数の数 $U^2(n)$ を求めることが出来る。即ち、 n 変数の単調 2 値論理関数の数を $M^2(n)$ 、真に n 変数の単調 2 値論理関数の数を $E^2(n)$ とすると、

$$E^2(n) = M^2(n) - \sum_{k=0}^{n-1} E^2(k) \cdot \binom{n}{k}$$

$$E^2(0) = 2$$

であるから、

$$U^2(n) = \sum_{k=0}^n E^2(k) \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^k$$

となる。ここでユネイト正則 3 値論理関数の数 $U^3(n)$ とユネイト 2 値論理関数の数 $U^2(n)$ との間には、次の関係が成立する。

$$U^3(n) = \frac{1}{2} (U^2(n+1) + U^2(n)) \quad (1)$$

山本により提案された 3 値多数決関数¹⁵⁾ がユネイト正則 3 値論理関数の部分集合になっていることは既に明らかにされているが³⁾、上に示された関係は山本が 3 値多数決関数を数え上げる際に用いた手法と同じものである¹⁶⁾。即ち上述した各関数に対して、 $M^3(n)$ が n 変数の単調増加 3 値多数決関数に、 $E^3(n)$ が真に n 変数の単調増加 3 値多数決関数に、 $U^3(n)$ が n 変数の 3 値多数決関数に対応しており、又、 $M^2(n)$ が n 変数の単調増加 2 値しきい値関数に、 $E^2(n)$ が真に n 変数の単調増加 2 値しきい値関数に、 $U^2(n)$ が n 変数の 2 値しきい値関数に対応している。上で述べた結果は、3 値多数決関数で成立した関係がユネイト正則 3 値論理関数においても成立することを示している。最後に、本報告の目的であるユネイト正則 3 値論理関数の数の上限及び下限について、以下に述べる。

n 変数の単調正則 3 値論理関数の既約元、即ち単積項及び $1/2$ 単積項が作る半順序集合 M^{n+1} の元のうち、1 の個数が i 個 ($0 \leq i \leq n+1$) のものからなる集合を M_i^{n+1} と記し、ランク i の集合と呼ぶことにする。これより集合 M^{n+1} は、 $M^{n+1} = M_0^{n+1} \cup M_1^{n+1} \cup \dots \cup M_{n+1}^{n+1}$ なるランク 0 からランク $(n+1)$ の集合の和で表される。集合 M_i^{n+1} に含まれる元の個数は $\binom{n+1}{i}$ で

与えられ、又、この元の間にはどの 2 つの元も互いに包含関係にないので、集合 M_i^{n+1} は 1 つの反鎖である。ここで各ランク i の集合の中で、その集合の元の個数が最大となる i ($0 \leq i \leq n+1$) を求めてみると、 $l = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ を得る。よって $m = \binom{n+1}{l}$ とすると、集合 M_l^{n+1} から作られる部分集合の数 2^m は、集合 M^{n+1} の反鎖の数の 1 つの下限を与える。各反鎖に存在する変数の置き換えは 2^l 個存在するので、 n 変数のユネイト正則 3 値論理関数の数の下限として 2^{m+l} を得る。又、集合 M^{n+1} の元の総数は 2^{n+1} 個なので、 n 変数の単調正則 3 値論理関数の数の上限として $2^{2^{n+1}}$ を得る。この中に存在する最大の変数の置き換えは 2^{n+1} 個である。以上により、 n 変数のユネイト正則 3 値論理関数の数 $U^3(n)$ の自明な限界式として次式を得る。

$$2^a < U^3(n) < 2^b \quad (2)$$

$$\text{但し、} a = \binom{n+1}{l} + l, \quad b = 2^{n+1} + n + 1$$

定理 3 より、 n 変数の単調正則 3 値論理関数の数は、 $(n+1)$ 変数の単調 2 値論理関数の数に等しい。単調 2 値論理関数の数の上限及び下限についての最初の明確な定式化は Gilbert⁸⁾ に始まる。Berman 及び Mukaidono が行なった fuzzy 論理関数の数の上限及び下限に関する研究¹⁴⁾ も彼の成果を用いている。本報告でも、この成果をもとに上限を改良する。

半順序集合 M^{n+1} に含まれる最大の反鎖の大きさが m であるとき、ディルウォースの定理⁴⁾ より、 M^{n+1} は m 個の互いに素な鎖に分割される。各鎖にはそれぞれ最大元 $(1/2, \dots, 1/2)$ (即ち M_0^{n+1} の元) 及び最小元 $(1, \dots, 1)$ (即ち M_{n+1}^{n+1} の元) を含めて、多くとも $n+2$ 個の元が含まれる。 m 個の鎖の中から高々 1 個の元を選んで反鎖を作る場合、もし最大元が含まれればこの反鎖に含まれる他の元は全て包含されて一意に、又、もし最小元が含まれればこの反鎖に含まれる他の元に必ず包含されるので無視することにとすると、各鎖には多くとも n 個の元が存在する。但し $n \geq 2$ では問題がないが、 $n=1$ の場合にはこのような無視は出来ない。このときには求められた上限に 2 を加える必要がある。よって取らない場合も含めて各鎖からの元の取り方には $(n+1)$ 通りの選び方が存在するので、 n 変数の単調正則 3 値論理関数の数の上限として $(n+1)^m$ を得る。ここで存在する最大の変数の置き換えは 2^{n+1} 個あるので、 n 変数のユネイト正則 3 値論理関数の数

$U^3(n)$ の上限として次式を得る。

$$U^3(n) < 2^{\beta'} \quad (3)$$

$$\text{但し, } \beta' = \binom{n+1}{1} \cdot \log_2(n+1) + n+1$$

次に下限を考察する。下限についても, Shapiro が単調 2 値論理関数の数え上げ問題で行った研究¹³⁾をもとに, その下限を改良する。先述した fuzzy 論理関数の研究¹⁴⁾も, Shapiro が用いた方法と同様の方法でその下限を導出している。

半順序集合 M^{n+1} の, 2 つの隣接したランク i の集合 M_i^{n+1} とランク $(i-1)$ の集合 M_{i-1}^{n+1} について, M_i^{n+1} の各元は M_{i-1}^{n+1} の i 個の元に包含されている。よって M_i^{n+1} の k 個の元は, 多くとも $k \cdot i$ 個の M_{i-1}^{n+1} の元に包含される。これより M_{i-1}^{n+1} の残りの元 $\binom{n+1}{i-1} - k \cdot i$ 個は, 2 つの隣接した集合の中では互いに包含関係にないので, これから作られる部分集合はすべて反鎖となる。よって集合 M_i^{n+1} の中から任意の k 個 ($0 \leq k \leq \binom{n+1}{i-1}$) を選択した場合の, 集合 M_{i-1}^{n+1} の残りの元から得られる全ての反鎖の数の和は, n 変数の単調正則 3 値論理関数の数の下限を与える。各反鎖に存在する変数の置き換えは 2^{i-1} 個存在するので, n 変数のユネイト正則 3 値論理関数の数 $U^3(n)$ の下限として次式を得る。

$$\begin{aligned} U^3(n) &> 2^{i-1} \cdot \sum_k \binom{n+1}{i-1} \cdot 2^{\binom{n+1}{i-1} - k \cdot i} \\ &= 2^{\binom{n+1}{i-1} + i - 1} \cdot \sum_k \binom{n+1}{i-1} \cdot 2^{-k \cdot i} \end{aligned}$$

ここで 2 項定理を用い, 更にランク $(i-1)$ としてその元の数が増大となるランク l を選ぶことにすると, 次式を得る。

$$2^{\alpha} \cdot (1 + 2^{-(n+1)})^{\binom{n+1}{l}} < U^3(n) \quad (4)$$

$$\text{但し, } \alpha = \binom{n+1}{l} + l$$

上式 (4) と式 (2) の下限を比較してみると, 確かに改良されていることが分かる。又, l を $(n+1)/2$ として, $\binom{n+1}{l}$ をスターリングの式を用いて近似してみると, c_1, c_2 (但し, $c_1 < c_2$) を定数として,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{c_1}{n+1}\right) &\leq \binom{n+1}{l} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \\ &\cdot \left(1 + \frac{c_2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

となる。よって式 (3) の上限における β' 部分は,

$$\beta' = 2^{n+1} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\log_2(n+1)}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{c_2}{n+1}\right) + n+1 \quad (5)$$

となり, 式 (2) の上限における β と比較して改良されていることが分かる。尚, ユネイト正則 3 値論理関数の数 $U^3(n)$ とユネイト 2 値論理関数の数 $U^2(n)$ との間の関係式 (1) を用いればもう少し上限が改善されるが, 余り本質的ではない。

4. む す び

本報告では, n 変数のユネイト正則 3 値論理関数の数の上限及び下限を, 単調正則 3 値論理関数に表われる変数の置き換えを求める問題に帰着して, その限界式を算出した。単調正則 3 値論理関数については, n 変数のその数が $(n+1)$ 変数の単調 2 値論理関数の数に等しいので, 既に知られている単調 2 値論理関数の数の上限及び下限を求める手法を導出の際に利用している。本報告で用いた単調 2 値論理関数の数の限界式よりも更に良い結果が幾つか報告されているので, それらを用いればより正確な限界式が算出できる。ユネイト正則 3 値論理関数の数の上限及び下限についての考察は本報告が初めてであるが, ユネイト正則 3 値論理関数のみに基づく性質を用いた限界式の算出ではないので, その数の上限及び下限はあまり良い式であるとはいえない。ユネイト正則 3 値論理関数の工学への応用も含めて, それ自身に特有な性質を明らかにすることが今後に残された課題である。

謝辞 日頃, 御指導頂く本学情報工学科科長西岡篤夫教授に深謝します。

参 考 文 献

- 1) M. Mukaidono: Regular ternary logic functions —ternary logic functions suitable for treating ambiguity—, IEEE Proc. 13th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp. 286-291 (1983).
- 2) 向殿: ある特殊な 3 値論理関数とフェイルセーフ論理回路への応用, 昭 53 電気学会東京支部大会 94.
- 3) 巽, 向殿: ユネイトな正則 3 値論理関数と 3 値多数決関数, 多値論理研究ノート Vol. 3, No. 1 (1985).
- 4) G. Birkoff: Lattice theory, Amer. Math. Soc.

- (1967).
- 5) R. Church : Numerical analysis of certain free distributive structures, *Duke Math. J.*, 6 (1940).
 - 6) R. Church : Enumeration by rank of the elements of the free distributive lattice with 7 generators, *Notices Amer. Math. Soc.*, 12 (1965).
 - 7) J. Berman and P. Köhler : Cardinalities of finite distributive lattices, *Mitt. Math. Sem. Giessen*, 121 (1976).
 - 8) E.N. Gilbert : Lattice theoretic properties of frontal switching functions, *J. Math. Phys.* 33, pp. 57-67 (1954).
 - 9) K. Yamamoto : Logarithmic order of free distributive lattice, *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 6, pp. 343-353 (1954).
 - 10) D. Kleitman : On Dedekind's problem ; The number of monotone Boolean Functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 21, pp. 677-682 (1969).
 - 11) H.N. Shapiro : On the counting problem for monotone Boolean functions, *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. 23, pp. 299-312 (1970).
 - 12) D. Kleitman and G. Markowsky : On Dedekind's problem ; The number of Isotone Boolean Functions. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 213, pp. 373-390 (1975).
 - 13) A.D. Koršunov : Solution of Dedekind's problem on the number of monotone Boolean functions, *Soviet Math. Dokl.* Vol. 18, pp. 442-445 (1977).
 - 14) J. Berman and M. Mukaidono : Enumerating fuzzy switching functions and free Kleene algebra, *Comp. Math. Appl.* Vol. 10, pp. 25-35 (1984).
 - 15) 山本, 藤田 : 3 値多数決関数, *信学論 (D)*, J63-D, 6, pp. 493-500 (昭 55-6).
 - 16) Y. Yamamoto and M. Mukaidono : Relationship between regular ternary logic functions and ternary majority functions, *IEEE Proc.* 16th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp. 9-18 (1986).