

# 外乱を考慮した離散時間適応極配置 制御系のロバスト設計

河 合 敏 勝

A Design Method for Discrete-Time Adaptive Pole-Placement  
System Robust to Disturbances

Toshikatsu KAWAI

## Abstract

In recent years a number of approaches have been reported to design adaptive control systems with nonminimum-phase plants or plants contained unknown dead-time parameters, based on pole-placement methods.

The adaptive pole-placement design methods can be classified into the direct and indirect methods. In the direct method, the control parameters are directly estimated on based the plant parameters, and in the indirect method, the plant parameters used in input-output of the plant are estimated and the control parameters are calculated based on the estimated parameters.

However, few adaptive pole-placement design methods for plants with disturbances have been reported.

The unallowable defect of the indirect method is that the stability of the closed-loop system is not guaranteed unless the reference input contains sufficiently many frequency components.

The proposed method is to design discrete-time adaptive pole-placement systems with robustness based on indirect method applicable to plants with the disturbance and reference input, frequency component of which have the same bandwidth, and plants with the disturbance which is comparably large to the reference input.

Finally, from the viewpoint of robustness property, the computer simulation results of the adaptive control system for a plant with step, sinusoidal, ramp and large variations disturbances are presented.

Key Words: Adaptive control, pole-placement, self-tuning, persistently exciting, deterministic disturbance

## 1. まえがき

離散時間適応極配置法は、モデル規範形適応制御で取り扱えない非最小位相系のプラントや、むだ時間が未知のプラントに適応可能な手法として注目され、いくつかの設計法が提案されている<sup>1-7)</sup>。その構造は、プラントの入出力から直接コントローラパラメータを決定する直接法や、プラントの入出力よりプラントパラメータを推定し、その推定値を基にコントローラパラメータを決定する間接法などがある。最近になって、外

乱を考慮した適応極配置法の設計が2, 3報告されている<sup>6,7)</sup>。

外乱を考慮した適応極配置制御系の設計法として、文献(6)では、外乱の性質が未知の場合で、時間の多項式で記述し得る外乱と未知な周期を持つ周期外乱を含む線形自由系の出力とみなしうる外乱の2種類の成分に分けて、フィルターを通して構造的にサーボ系の形をとることによって除去している。文献(7)では、外乱の性質が既知の場合で、外乱の特性を考慮して帯域除去フィルターを導入することによって除去している。しかし、外乱の性質が既知の場合においては、積極的にその外乱の特性多項式を除去フィルターとして

コントローラの中に取り入れて、外乱の影響を取り除く見通しの良い間接法の設計は、まだ提案されていないようである。その理由として、外部基準入力が十分多くの周波数成分をもたないときには、閉ループ系の安定性が保証されないという最大の欠点がある。この現象は、規範入力の周波数成分と外乱の周波数成分が同じ帯域に属する場合、また同じ帯域に属さなくとも外乱の変動が大きい場合には、特に顕著に現われる。つまり、外乱が存在する間接法の適応制御の場合、一般的に制御入力のP・E性 (Persistently exciting) は保持できない。これは依然として残された大きな問題となっている。

本稿は、間接法の離散時間極配置であり、しかも、外乱の周波数成分と規範入力の周波数成分が同じ帯域に属する場合や、変動の大きい外乱がプラントに加わった場合でも、制御入力のP・E性は保持できると推測されるロバストな設計法を提案する。また、コントローラは、外乱の影響を取り除くために、外乱の特性多項式を除去フィルターとして取り入れた構造になっている。このように見通しの良い一般性の高いロバストな設計法で、外乱が存在しない場合でもそのまま適応制御系として利用することが可能である。最後に、ステップ、正弦波、ランプそして振動の激しい外乱を加えたプラントを対象にした例題で数値実験を行った。その結果を提示し、本稿に述べた設計手法の有用性について考慮する。

## 2. 問題の設定

適応制御の対象となるプラントとして、次式で記述されるような1入力1出力離散時間システムの制御問題を考える。

$$A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k)+\omega(k) \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで、

$$A(z^{-1})=1-\sum_{i=1}^{nA} a_i z^{-i} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$B(z^{-1})=\sum_{i=b}^{nB} b_i z^{-i} \quad (d \geq 1, B(1) \neq 0) \quad \dots \dots \dots (3)$$

$y(k)$ ,  $u(k)$ はそれぞれプラントの出力および入力であり、 $z^{-1}$ は時間遅れ演算子を示す。上式のプラントに対して、多項式  $A(z^{-1}), B(z^{-1})$  は互いに素であり、 $a_i, b_i$  は未知パラメータを示す。次数  $nA, nB$  は既知であると仮定する。

外乱  $\omega(k)$  はプラントに加わる確定外乱を表わしたもので、つぎの特性を持ったものとする。

$$D(z^{-1})\omega(k)=0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここで、

$$D(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{nD} d_i z^{-i} \quad \dots \dots \dots (5)$$

ただし、多項式  $D(z^{-1})$  の次数  $nD$  およびパラメータ  $d_i$  は既知とする。

ここで考える問題は、任意の目標値  $r_m(k)$  に対して、(1)式で記述されるプラントの出力  $y(k)$  がつぎの関係を漸近的に満足するように制御入力  $u(k)$  を適応的に合成するという適応極配置問題である。

$$C(z^{-1})y(k)=KB(z^{-1})r_m(k) \quad \dots \dots \dots (6)$$

ここで、

$$C(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{nC} c_i z^{-i} \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$K=\frac{C(1)}{B(1)} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ただし、 $C(z^{-1})$  は望ましい閉ループ極を与える漸近安定多項式であり、 $K$  はオフセットを零とする定数設定値である。

以下では、確定外乱を受けるプラントに対して、外乱の特性多項式を除去フィルターとしてコントローラの中に取り入れて、外乱の影響を取り除き、プラントの未知パラメータを推定するのに高次多項式で記述した推定関数を用いた適応極配置系の一構成法について検討する。

## 3. 極配置系の構造

はじめに、プラントの多項式  $A(z^{-1}), B(z^{-1})$  および外乱の多項式  $D(z^{-1})$  の次数、係数はともに既知であるとして制御系を構成することを考える。まず、 $B(z^{-1})$  が  $A(z^{-1})D(z^{-1})$  と互いに素であれば、次式を満たす多項式  $S(z^{-1}), R(z^{-1})$  が一意に定まるに着目する。

$$\begin{aligned} C(z^{-1}) &= A(z^{-1})D(z^{-1})R(z^{-1}) \\ &+ B(z^{-1})S(z^{-1}) \quad \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

ここで、

$$R(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{nR} r_i z^{-i} \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$S(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{ns} s_i z^{-i} \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

(9)式の関係を用いて、プラントの(1)式を書き直すと次式が得られる。

$$\begin{aligned} C(z^{-1})y(k) &= B(z^{-1})S(z^{-1})y(k) \\ &\quad + B(z^{-1})D(z^{-1})R(z^{-1})u(k) \\ &\quad + D(z^{-1})R(z^{-1})\omega(k) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

ここで、外乱の特性を表わす式  $D(z^{-1})\omega(k)=0$  と仮定しているために、上式の右辺の第3項は次のようになる。

$$D(Z^{-1})R(Z^{-1})\omega(k)=0$$

したがって、(12)式に(6)式を代入すると次式のような制御入力  $u(k)$  が構成される。

$$R(z^{-1})D(z^{-1})u(k)=Kr_m(k)-S(z^{-1})y(k) \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

つまり、(9)式の関係から多項式  $R(z^{-1}), S(z^{-1})$  のパラメータ  $r_i, s_i$  についての連立方程式の解を求めて、求めた解を(13)式に代入すれば、確定外乱を除去できる制御入力  $u(k)$  が合成できる。

#### 4. 適応極配置系の構成

前節では、プラントのパラメータは既知としてコントローラの構造を決定した。実際には、プラントのパラメータ  $a_i, b_i$  は未知であるので、同定法を用いてプラントの入出力の信号よりプラントパラメータを逐次推定し、その推定値を基にコントローラパラメータを決定する間接法である。そして、制御目的が満足に達成されるためには、 $K \rightarrow \infty$  で推定パラメータが真値に収束すれば、外乱の除去、目標値への追従性ともに所期の目的を達成することができる。しかしながら、制御入力  $u(k)$  は、基本的には外部からの規範入力  $r_m(k)$  と外乱の多項式により合成されている。このため、規範入力の周波数成分と外乱の周波数成分が同じ帯域に属する場合、または同じ帯域に属さなくても外乱の変動が大きい場合には、一般的に P•E が問題となり、安定性が保証されない大きな欠点がある。

以下では、この問題を回避するために、プラントの未知パラメータを推定するのに高次多項式で記述した推定モデル関数を導入した設計法を示す。

#### 4.1 推定モデル関数とパラメータ調整則

まず、(1)式のプラントの表現をつぎのように書き改める。

$$y(k)=\xi^T(k)\theta \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \xi(k) &= [y(k-1), \dots, y(k-nA), u(k-d), \\ &\quad \dots, u(k-nB)]^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$\theta=[a_1, \dots, a_{nA}, b_a, \dots, b_{nB}]^T \quad (16)$$

しかし、実際にはプラントのパラメータ  $\theta$  は未知であるので、この未知パラメータ  $\hat{\theta}(k)$  を推定するのにつぎの推定モデル関数を用いた推定方法を考える。

$$\begin{aligned} \hat{a}_i(k) &= \hat{a}_{0i}(k)+\hat{a}_{1i}(k)\cdot\alpha(k-k_a) \\ &\quad +\hat{a}_{2i}(k)\cdot\alpha(k-k_a)^2+\dots \\ &\quad +\hat{a}_{ni}(k)\cdot\alpha(k-k_a)^n \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

$(i=1, 2, \dots, nA \ n: 次数 \ \alpha, k_a: 任意定数)$

$$\begin{aligned} \hat{b}_j(k) &= \hat{b}_{0j}(k)+\hat{b}_{1j}(k)\cdot\beta(k-k_b) \\ &\quad +\hat{b}_{2j}(k)\cdot\beta(k-k_b)^2+\dots \\ &\quad +\hat{b}_{mj}(k)\cdot\beta(k-k_b)^m \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

$(j=1, 2, \dots, nB \ m: 次数 \ \beta, k_b: 任意定数)$

上式の推定モデル関数を用いると(14)式のプラント表現に対応して、つぎのように書き改められる。

$$y(k)=\xi^T(k)\hat{\theta}(k)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \xi^T(k) &= [y(k-1), \dots, y(k-nA), \\ &\quad u(k-d), \dots, u(k-nB), \\ &\quad \alpha(k-k_a)y(k-1), \dots, \alpha(k-k_a)y(k-nA), \\ &\quad \beta(k-k_b)u(k-d), \dots, \beta(k-k_b)u(k-nB), \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad \alpha(k-k_a)^ny(k-1), \dots, \alpha(k-k_a)^ny(k-nA), \\ &\quad \beta(k-k_b)^mu(k-d), \dots, \beta(k-k_b)^mu(k-nB)]^T \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= [\hat{a}_{01}(k), \dots, \hat{a}_{0nA}(k), \hat{b}_{0d}(k), \dots, \hat{b}_{0nB}(k), \\ &\quad \hat{a}_{11}(k), \dots, \hat{a}_{1nA}(k), \hat{b}_{1d}(k), \dots, \hat{b}_{1nB}(k), \\ &\quad \hat{a}_{21}(k), \dots, \hat{a}_{2nA}(k), \hat{b}_{2d}(k), \dots, \hat{b}_{2nB}(k), \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\hat{a}_{n1}(k), \dots, \hat{a}_{nnA}(k), \hat{b}_{md}(k), \dots;$$



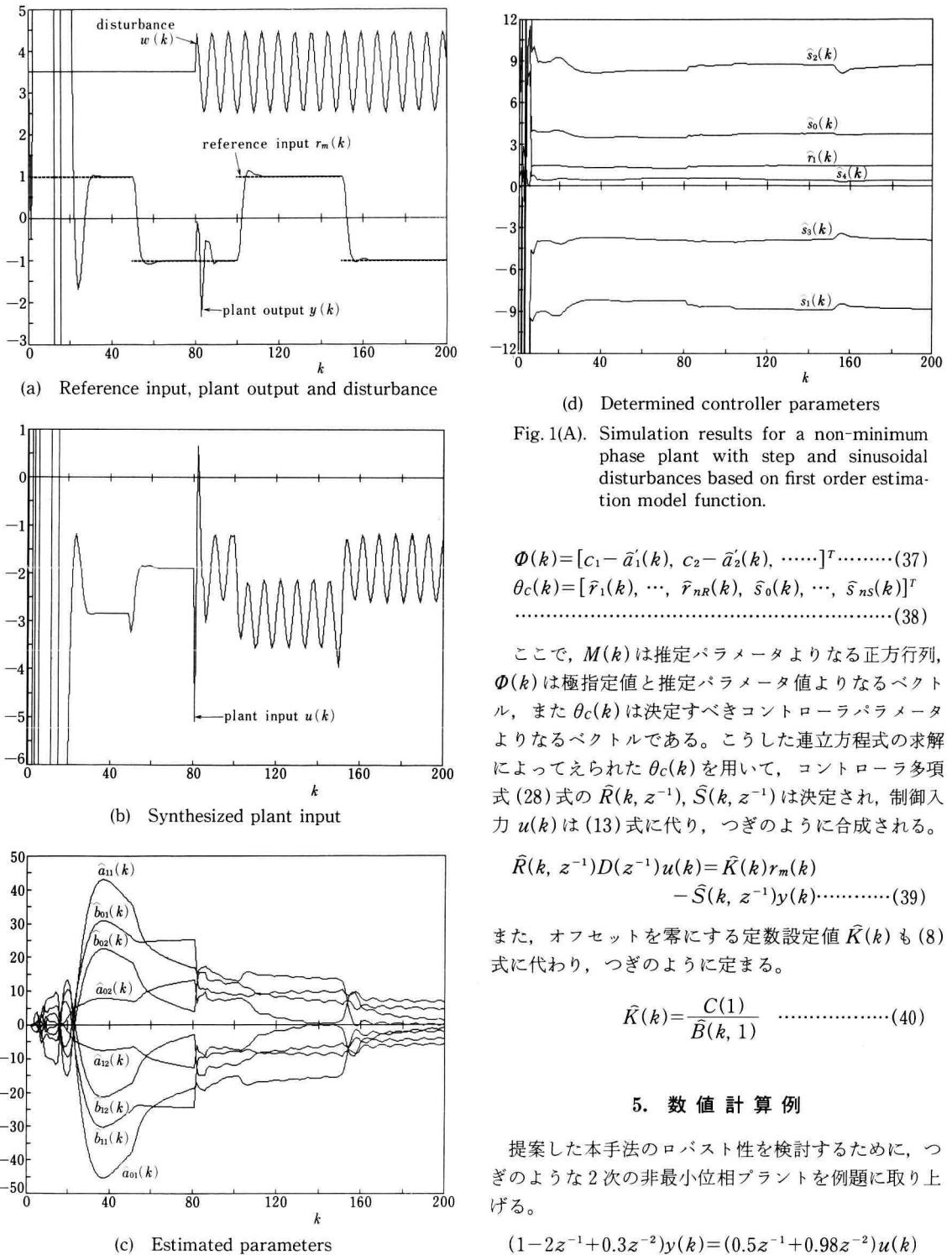


Fig. 1(A). Simulation results for a non-minimum phase plant with step and sinusoidal disturbances based on first order estimation model function.

$$\Phi(k) = [c_1 - \hat{a}_1'(k), c_2 - \hat{a}_2'(k), \dots]^T \dots \dots \dots (37)$$

$$\theta_c(k) = [\hat{r}_1(k), \dots, \hat{r}_{n_R}(k), \hat{s}_0(k), \dots, \hat{s}_{n_S}(k)]^T \dots \dots \dots (38)$$

ここで、 $M(k)$ は推定パラメータよりなる正方行列、 $\Phi(k)$ は極指定値と推定パラメータ値よりなるベクトル、また  $\theta_c(k)$  は決定すべきコントローラパラメータよりなるベクトルである。こうした連立方程式の求解によってえられた  $\theta_c(k)$  を用いて、コントローラ多項式(28)式の  $\hat{R}(k, z^{-1}), \hat{S}(k, z^{-1})$  は決定され、制御入力  $u(k)$  は(13)式に代り、つぎのように合成される。

$$\begin{aligned} \hat{R}(k, z^{-1})D(z^{-1})u(k) &= \hat{R}(k)r_m(k) \\ &\quad - \hat{S}(k, z^{-1})y(k) \end{aligned} \dots \dots \dots (39)$$

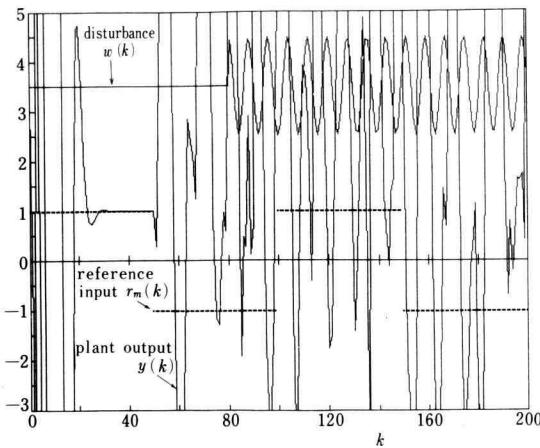
また、オフセットを零にする定数設定値  $\hat{K}(k)$  も(8)式に代わり、つぎのように定まる。

$$\hat{K}(k) = \frac{C(1)}{\hat{B}(k, 1)} \dots \dots \dots (40)$$

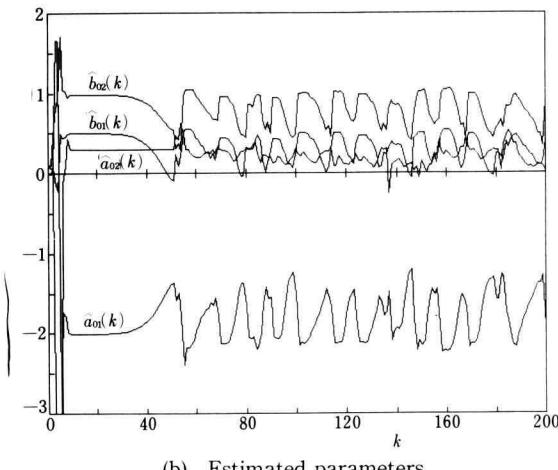
## 5. 数値計算例

提案した本手法のロバスト性を検討するために、つぎのような2次の非最小位相プラントを例題を取り上げる。

$$(1 - 2z^{-1} + 0.3z^{-2})y(k) = (0.5z^{-1} + 0.98z^{-2})u(k)$$



(a) Reference input, plant output and disturbance



(b) Estimated parameters

Fig. 1(B). Simulation results for a non-minimum phase plant with step and sinusoidal disturbances based on zero order estimation model function.

$$+\omega(k)$$

上のプラントは極を  $z=0.16, 1.9$  (不安定根) に、零点を  $z=1.96$  (不安定根) にもつ。ただし、外乱  $\omega(k)$  は後で定義する。

系に対して、閉ループ系としての望ましい極を指定する多項式  $C(z^{-1})$  は、

$$C(z^{-1}) = 1 - z^{-1} + 0.35z^{-2}$$

のように定めた。

規範入力  $r_m(k)$  として、 $r_m(k)=\pm 1$  で周期 100 の矩形波を加えた。

つぎに、プラントの未知パラメータはつぎのような最も実用的な 1 次の推定モデル関数により推定した。

$$\begin{aligned}\hat{a}_i(k) &= \hat{a}_{0i}(k) + \hat{a}_{1i}(k) \cdot \alpha(k-k_a) & (i=1, 2) \\ \hat{b}_j(k) &= \hat{b}_{0j}(k) + \hat{b}_{1j}(k) \cdot \alpha(k-k_b) & (j=1, 2)\end{aligned}$$

また、可調整パラメータ  $\hat{\theta}(k)$  を調整するパラメータ調整アルゴリズムの諸条件としては、

$$\hat{\theta}(0) = [0, 0, 10^{-1}, 10^{-1}, 0, 0, 10^{-2}, 10^{-2}]^T$$

$$\Gamma(0) = 20I, r_u = t_r \Gamma(0) = 160,$$

$$\lambda = 0.8, \mu = 1$$

に定めた。

以上の条件のもとで、2種類の外乱についてシミュレーションを行った。

#### 〈例題 1〉

ここでは規範入力の周波数成分と外乱の周波数成分が同じ帯域に属する場合の例である。

プラントに加える外乱としては、つぎのように初めにステップ外乱、つぎにそのステップ外乱に変動の大きい正弦波をのせた外乱を加えた。

(i)  $0 \leq k \leq 80$  のとき

$$w(k) = 3.5$$

(ii)  $80 < k \leq 200$  のとき

$$w(k) = 3.5 + \sin(0.8k)$$

また、推定モデル関数の定数をそれぞれつぎのように定めた。

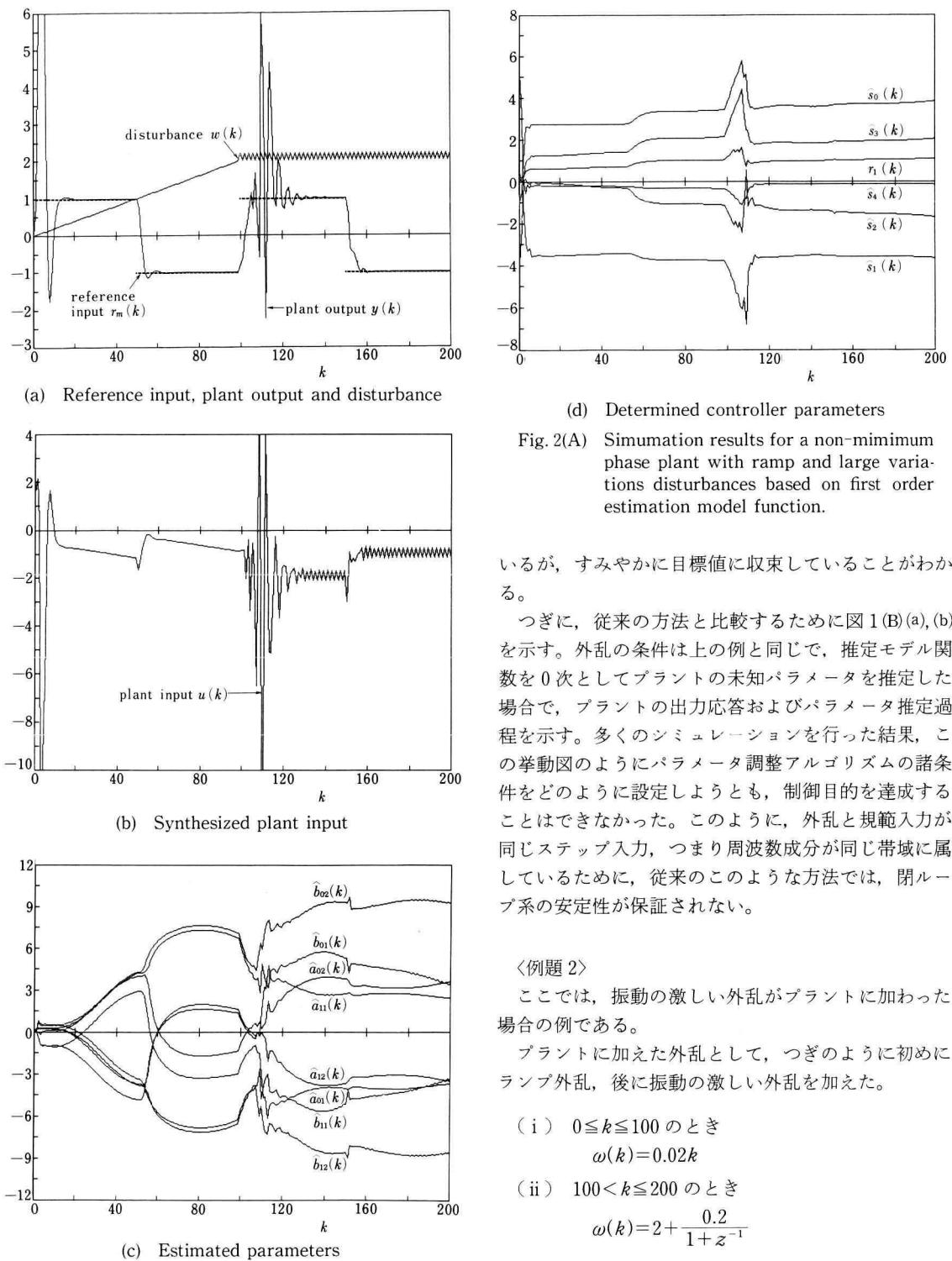
$$k_a = k_b = -1000, \alpha = \beta = 0.001$$

$$(0 \leq k \leq 200)$$

上のような外乱で乱されている場合のプラントの出力応答、合成されたプラント入力、パラメータ推定過程および決定されたパラメータ値を図 1(A)(a)～(d) に示す。ただし、外乱の多項式  $D(z^{-1})$  はステップ外乱と正弦波外乱より、つぎのように定まる。

$$D(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - 2 \cdot \cos 0.8 \cdot z^{-1} + z^{-2})$$

図 1(A) のそれぞれの挙動図より、プラントに初めに加えたステップ外乱に対しては、約 30 回程度でプラントの出力が規範入力に収束している。つぎに、そのステップ外乱に正弦波外乱を加えた場合、プラントの出力応答は、外乱の加わり始めだけ応答に亂れを生じて



いるが、すみやかに目標値に収束していることがわかる。

つぎに、従来の方法と比較するために図1(B)(a),(b)を示す。外乱の条件は上の例と同じで、推定モデル関数を0次としてプラントの未知パラメータを推定した場合で、プラントの出力応答およびパラメータ推定過程を示す。多くのシミュレーションを行った結果、この挙動図のようにパラメータ調整アルゴリズムの諸条件をどのように設定しようとも、制御目的を達成することはできなかった。このように、外乱と規範入力が同じステップ入力、つまり周波数成分が同じ帯域に属しているために、従来のこのような方法では、閉ループ系の安定性が保証されない。

### 〈例題2〉

ここでは、振動の激しい外乱がプラントに加わった場合の例である。

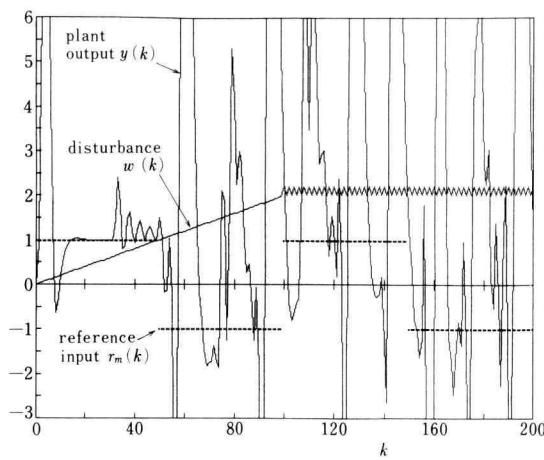
プラントに加えた外乱として、つぎのように初めにランプ外乱、後に振動の激しい外乱を加えた。

(i)  $0 \leq k \leq 100$  のとき

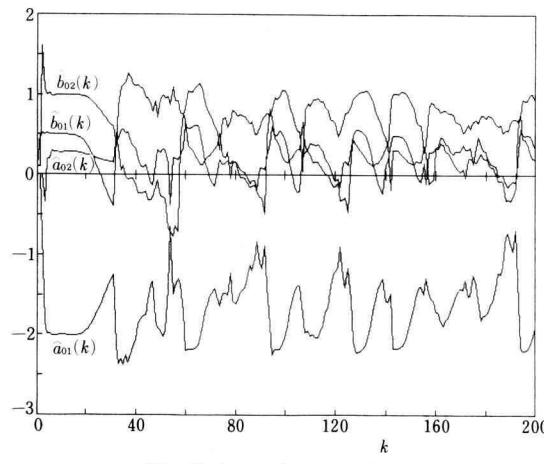
$$\omega(k) = 0.02k$$

(ii)  $100 < k \leq 200$  のとき

$$\omega(k) = 2 + \frac{0.2}{1+z^{-1}}$$



(a) Reference input, plant output and disturbance



(b) Estimated parameters

Fig. 2(B). Simulation results for a non-minimum phase plant with ramp and large variations disturbances based on zero order estimation model function.

また、推定モデル関数の定数をそれぞれつぎのように定めた。

$$\begin{aligned} k_a = k_b &= -1000, \alpha = \beta = 0.001 \\ &(0 \leq k \leq 100) \\ k_a = k_b &= -900, \alpha = \beta = 0.001 \\ &(100 < k \leq 200) \end{aligned}$$

上のような外乱で乱されている場合のプラントの出力応答、合成されたプラントの入力、パラメータ推定

過程および決定されたパラメータ値を図 2(A)(a)～(d)に示す。ただし、外乱の多項式  $D(z^{-1})$  は、ランプ外乱と振動の激しい外乱より、つぎのように定まる。

$$D(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2 (1 + z^{-1})$$

図 2(A)のそれぞれの挙動図より、プラントに初めに加えたランプ外乱に対しては、例題 1 より収束が早く、約 15 回程度で収束している。例題 1 より振動の激しい外乱をプラントに加えたため、プラント出力の過度応答が悪く、最初はパラメータ推定値も亂れを生じている。しかしながら、後に目標値に収束していることがわかる。

つぎに、従来の方法と比較するために図 2(B)(a), (b)を示す。外乱の条件は上の例と同じで、推定モデル関数を 0 次としてプラントの未知パラメータを推定した場合で、多くのシミュレーションを行った結果、例題 1 と同じようにパラメータ調整アルゴリズムの諸条件をどのように設定しようとも、制御目的を達成することはできなかった。このように、規範入力はステップ入力で、外乱はランプと振動の激しい外乱である。このように規範入力と外乱が同じ周波数成分をもたなくとも、従来のこのような方法では、閉ループ系の安定性は保証されない。

## 6. あとがき

以上、確定外乱を考慮した間接法による適応極配置制御系は、一般的に P・E 性が問題となり、閉ループ系の安定性が保証されないという大きな欠点があった。本稿では、この改善法として、プラントの未知パラメータを推定するのに、高次多項式で記述した推定モデル関数を導入して、ロバスト推定することで改善され、その有効性をシミュレーション結果により確認した。また、外乱が存在しない場合でも利用できる一般性の高いロバスト設計になっている。しかし、全系の理論的安定性の証明、および高次の推定モデル関数の設計パラメータの選び方は、大変難しく今後の問題として残された。

最後に、日頃ご指導いただく本学教授、前川高澄先生に深く感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) 鈴木、新中、田中：適応極配置系の一構成法、計測

- 自動制御学会論文集, 19-1, 28/34 (1983)
- 2) K.J. Åström and B. Wittenmark : Self-Tuning Controllers Based on Pole-Zero Placement, IEE Proc., 127-3, 120/130 (1980)
  - 3) G. Kreisselmeir : Adaptive Control via Adaptive Observation and Asymptotic Feedback Matrix Synthesis, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-25-4, 717/722 (1980)
  - 4) H. Elliott and W.A. Wolovich : Parameter Adaptive Identification and Control, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-24-4, 592/594 (1979)
  - 5) G.C. Goodwin and K.S. Sin : Adaptive Control of Nonminimum Phase System, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26-2, 478/483 (1981)
  - 6) 藤井, 水野 : 未知確定外乱を考慮した離散時間適応極配置制御系, 計測自動制御学会論文集, 21-10, 1021/1028 (1985)
  - 7) 新中 : 狹帯域性外乱をうけるシステムに対する適応極配置法, 計測自動制御学会論文集, 20-11, 1006/1013 (1984)
  - 8) 南出 : 外乱を考慮した適応サーボ系の設計, 第6回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 151/154 (1983)
  - 9) 新中, 鈴木 : 適応システムのためのパラメータ調整アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, 21-7, 691/697 (1985)
  - 10) X. Xianya and R.J. Evans : Discrete-Time Adaptive Control for Deterministic Time-Varying System, Automatica, 20-3, 309/319 (1984)
  - 11) 新中, 鈴木 : 時変系に対する適応制御, 計測自動制御学会論文集, 22-11, 21/27 (1986)