

境界要素法による付加質量計算

石 綿 良 三・川 口 隆 史

Calculation of Apparent Mass by Boundary Element Method

Ryozo ISHIWATA and Takashi KAWAGUCHI

Abstract

It is important to analyze apparent mass of a body which has unsteady motions in a fluid. It is applied to oscillated, accelerated and decelerated bodies in a fluid as well as ones placed in an unsteady flow.

The authors have developed a calculation method for apparent mass of an arbitrary shaped bodies by means of the Boundary Element Method. The apparent mass is numerically integrated from velocity potential distributions on a body fixed in a uniform steady potential flow, because the potential distributions of unsteady flow are similar to those of steady one.

The remarkable points of the present method are as follows:

- (1) apparent mass is calculated from steady potential distributions on a body;
- (2) apparent mass of an arbitrary shaped body can be easily calculated, if no circulations exist around it;
- (3) the method can be applied for a body near walls by means of suitable boundary conditions;
- (4) it takes not so long time to calculate an apparent mass.

1. 結 言

静止した理想流体中を物体が加速度運動する場合、付加質量によって物体に非定常抗力が働くことが知られている。また、物体が定常運動している場合、あるいは物体まわりに定常な流れがある場合、理想流体の範囲内では抗力は作用しないというダランベールの背理がよく知られている。しかし、前述のように加速度運動する場合には、物体まわりの流体の一部に加速度が生じるため、流体にも力が働かなければならない。したがって、物体に加速度を与えるために必要な力は物体自身に働く慣性力と流体に働く慣性力の合計となる。ある質量分の流体が物体と一体となって同一の加速度で運動するときの慣性力が得られる流体力に等しいとき、その質量を付加質量と呼んでいる。

このような付加質量は理想流体に対して考えられるものであるが、粘性のある実存流体の場合にもこの付加質量を適用することができる。たとえば、流体中で

振動する物体、流体中で加速・減速する物体、振動流中に置かれた物体などに作用する非定常抗力はほぼ加速度に比例する成分（慣性力）と速度の2乗に比例する成分（粘性による抗力）の和として表現される（Morisonの式¹⁾）ことがあるが、このうち慣性力成分はポテンシャル流れの付加質量と加速度の積と考えて大きな間違いはない。特に振幅が微小な場合には慣性力が支配的となり、付加質量による力だけによって流体力を見積ることができる。（ただし、全体の流れに加速度があるときには流れ場全体の平均圧力こう配による力も加える必要がある。）このため種々の物体について付加質量を知ることは、非定常流体力を検討する上で重要なことである。

本研究では、任意物体まわりの定常ポテンシャル流れを解析し、その結果からその物体の付加質量を数値的に計算する方法を開発した。付加質量を算出するために必要なデータは物体表面上の速度ポテンシャル分布であるので、数値解析にあたって境界要素法を用いた。

2. 理 論

2.1 非定常流体力

対象とする流れは非定常ポテンシャル流れ(非定常, 理想流体, 渦なし流れ)とする。このとき, 非定常のベルヌーイの式は,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + gz = f(t) \quad (1)$$

ここで, $\phi = \phi(x, y, z, t)$ は速度ポテンシャル, p は圧力, c は流速, ρ は流体の密度, g は重力加速度, $f(t)$ は流れ場の至るところで一定となる時間の関数である。 $f(t)$ の関数型は圧力の境界条件から決められる。

一方, Fig. 1 に示すような流れの中に置かれた物体に働く流体力 \mathbf{F} は,

$$\mathbf{F} = \iint_A (-p) \mathbf{n} dA \quad (2)$$

ここで, dA は物体表面上の微小面積, \mathbf{n} は dA 上の外向き単位法線ベクトル, 積分範囲は物体表面全体である。式(1)を式(2)に代入し, 整理すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & -\rho f(t) \iint_A \mathbf{n} dA + \rho \iint_A \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} dA \\ & + \frac{\rho}{2} \iint_A c^2 \mathbf{n} dA + \rho g \iint_A z \mathbf{n} dA \end{aligned} \quad (3)$$

ガウスの発散定理を用いると, 任意の関数 $h(x, y, z)$ に対して,

$$\iint_A h \mathbf{n} dA = \iiint_V \nabla h dV$$

が成り立ち, 面積分を体積分に変換できる。これを適用すると, 式(3)の右辺第1項は0となることがわか

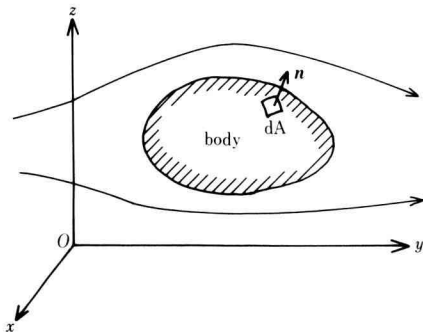


Fig. 1. Flow around a body.

る。右辺第3項は定常流の場合の流体力と同一であり, 物体まわりの循環と吹き出しがない場合0となる。特に抗力だけについて言えば, 吹き出しがなければ0となる²⁾。さらに右辺第4項は浮力を表しており, ここでは重力の影響を無視すると第4項も0となる。

以上をまとめると物体に働く非定常流体力は次式の通りとなる。

$$\mathbf{F} = \rho \iint_A \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} dA \quad (4)$$

これが付加質量による流体力を表している。

2.2 付加質量の算出方法

式(4)における速度ポテンシャル ϕ は一般に空間座標 (x, y, z) と時間 t の関数であるが, 非定常の場合にも定常流とポテンシャル分布が相似になることを利用して以下のように付加質量を算出する。

まず Fig. 2 のように, 求めたい物体を速度 $U=1$ の

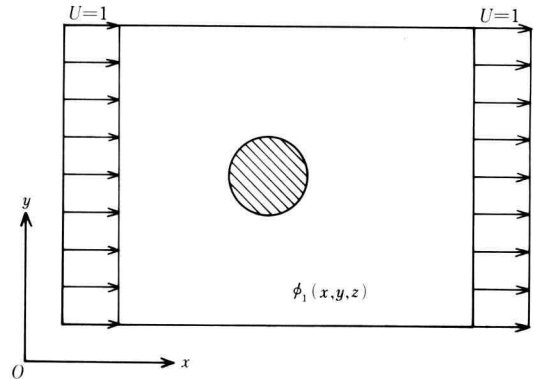


Fig. 2. Uniform flow around a fixed body.

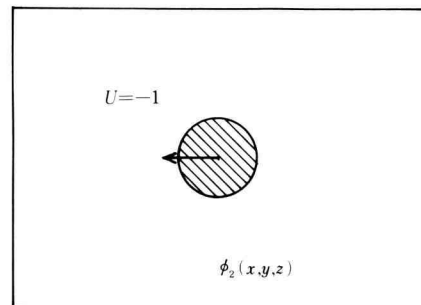


Fig. 3. A body which moves in a stationary fluid.

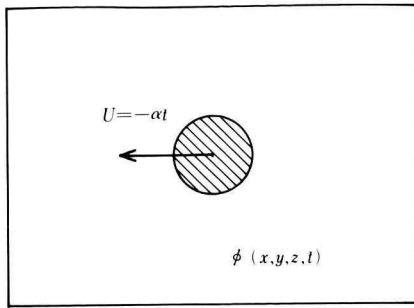


Fig. 4. A body which moves with uniform acceleration in a stationary fluid.

定常な一様流の中に置いたときのポテンシャル流れを解析する。流れの方向は x 軸方向としておく。得られる速度ポテンシャルを $\phi_1(x, y, z)$ とする。

次に, Fig. 3 のようにその物体が静止流体中で速度 $U = -1$ で x 軸方向に運動するときの速度ポテンシャルを $\phi_2(x, y, z)$ とする。Fig. 2 と Fig. 3 において相対速度は同一のものとなるので, 次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 方向速度 } \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - 1 \\ y \text{ 方向速度 } \frac{\partial \phi_2}{\partial y} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ z \text{ 方向速度 } \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式 (5) を積分することによって,

$$\phi_2 = \phi_1 - x \quad (6)$$

次に, Fig. 4 のようにその物体が速度 $U = -\alpha t$ (α は定数) で等加速度運動するときの速度ポテンシャルを $\phi(x, y, z, t)$ とする。速度ポテンシャルの分布は定常時と相似となることから ϕ は次のようになる。

$$\phi = \phi_2 \alpha t = (\phi_1 - x) \alpha t \quad (7)$$

時間 t で偏微分すると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (\phi_1 - x) \alpha \quad (8)$$

これを式 (4) に代入すると, 物体に働く非定常流体力 \mathbf{F} は,

$$\mathbf{F} = \rho \iint_A (\phi_1 - x) \alpha \mathbf{n} dA \quad (9)$$

この場合の流体力は x 方向成分だけであるので, \mathbf{F} の

x 方向成分だけを求める。 \mathbf{F} と x 方向単位ベクトル \mathbf{i} との内積をとれば, x 方向の流体力 F_x が求まり,

$$F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = \rho \iint_A (\phi_1 - x) \alpha \cos \theta dA \quad (10)$$

ここで, θ は法線ベクトル \mathbf{n} と x 軸とのなす角である。流体に働く力は物体に働く力とは作用・反作用の関係にあり, 流体に働く力は $(-F_x)$ となり, これを加速度 $(-\alpha)$ で割ると付加質量 M が求まる。

$$M = \rho \iint_A (\phi_1 - x) \cos \theta dA \quad (11)$$

したがって, 定常一様流中の物体まわりの流れの解析結果から付加質量 M が求められることが明らかとなった。なお, ここでは等加速度運動について式の誘導を行ったが, 一般の非定常運動に対しても速度ポテンシャルの分布が相似となるため式 (11) の結果が適用できる。

2.3 境界要素法の適用

ポテンシャル流れの解析方法は既に多くの方法が確立されている。ここでは物体表面上の速度ポテンシャル分布さえわかれば式 (11) によって付加質量が計算できるので, 境界要素法を用いることにする。境界要素法は境界上の物理量だけを未知数とするため, 有限要素法や差分法などに比べ本解析に適している。境界要素法によるポテンシャル解析は文献 3), 4) をはじめ多くの文献に記述されているので, ここではその要点だけを述べることにする。

対象とする領域 V の内部で速度ポテンシャル ϕ の支配方程式は次のラプラス方程式となる。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

式 (12) は非定常ポテンシャル流れの場合にも各瞬間ごとに成り立つ式である。境界 Γ を Γ_1 と Γ_2 の 2 種類に分け, それぞれで基本境界条件, 自然境界条件を規定する。つまり,

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} & (\Gamma_1 \text{ 上}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \bar{q} & (\Gamma_2 \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし, $\bar{\phi}$, \bar{q} は境界条件として与えられる値を示し, n は境界上の外向き法線方向座標 (Fig. 5 参照) である。

ここで重み関数 ϕ^* を導入し, 式 (12) および (13)

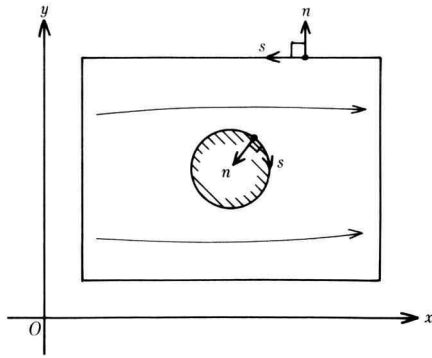


Fig. 5. Control volume

を重み付き残差法で表現すると,

$$\int_V (\nabla^2 \phi) \phi^* dV = \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} \right) \phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\phi - \bar{\phi}) \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma \quad (14)$$

式(14)の左辺を2回部分積分すると,

$$\begin{aligned} \int_V \phi (\nabla^2 \phi^*) dV = & - \int_{\Gamma_2} \bar{q} \phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_2} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{\phi} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

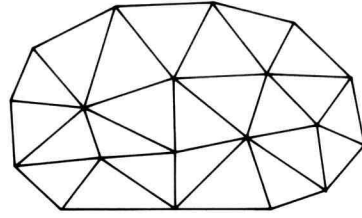
境界要素法では, ここでラプラス方程式の基本解を重み関数 ϕ^* とする。ある点 i に一つの集中負荷が作用しているときの基本解は,

$$\left. \begin{aligned} \text{3次元問題の場合} \quad \phi^* &= \frac{1}{4\pi r} \\ \text{2次元問題の場合} \quad \phi^* &= \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

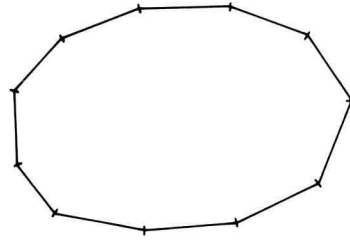
ここで r は点 i からの距離を表している。各節点に対する上記の基本解を重み関数として用いる。

一方, 境界を Fig. 6 のように分解し, それぞれの要素内で未知数 ϕ および $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ の補間関数を決める。通常よく用いられるのは一定要素, 線形要素, 2次要素であり, それぞれ要素内で ϕ と $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ を一定値, 1次関数, 2次関数で表現する。このようにすると, いずれも境界上の節点における関数値だけが未知数となる。

以上の関係を式(15)に代入し, 整理する。式(15)の各積分は必要に応じて数値積分が用いられる。結果と



(a) 3-dimensional



(b) 2-dimensional

Fig. 6. Boundary elements

して境界上の節点における ϕ と $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ の値を未知数とする連立1次方程式に離散化される。これらを解き, 物体表面上の速度ポテンシャル分布を求め, さらに式(11)によって付加質量を求める。

3. 計 算 例

ここでは計算例として2次元物体の付加質量を示す。Fig. 7 に示す2次元物体が x 軸方向に運動するときを考える。線形要素を用いるものとすれば, 式(11)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{M}{\rho} &= \oint_s (\phi - x) \cos \theta \cdot ds \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\phi_j + \phi_{j+1}}{2} - \frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right) (y_{j+1} - y_j) \end{aligned} \quad (17)$$

ただし, $\phi(x, y)$ は x 方向右向き単位一様流中に物体を置いたときの速度ポテンシャル, (x_j, y_j) は j 番目の物体表面上の節点の座標, ϕ_j はその節点での速度ポテンシャル値である。なお, $(N+1)$ 番目の節点は点1と同一とする。

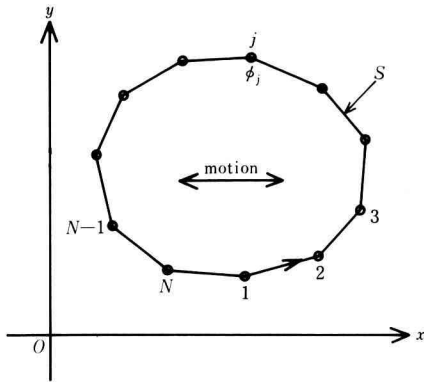


Fig. 7. 2-dimensional body

3.1 円柱の付加質量

まず初めに円柱に関する計算例を示す。Fig. 8は用いた要素分割であり、74分割されている。なお、流れ

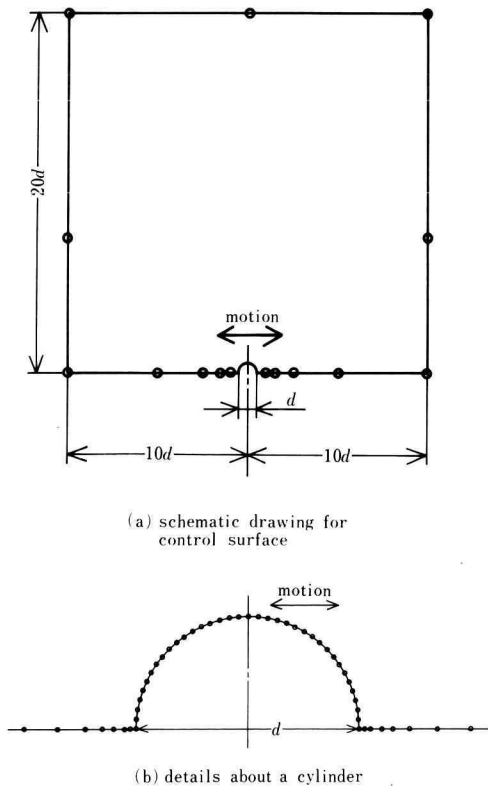


Fig. 8. Boundary elements around a cylinder.

場は上下対称となるので上側半分だけを解いた。Fig. 9は円柱表面上の速度ポテンシャル分布を示し、記号が得られた数値解析結果、実線が厳密解であり、両者は非常によく一致していることがわかる。これらの値を用いて式(17)を計算すると、

$$\frac{M}{\rho \pi d^2 / 4} = 0.9949$$

となり、約0.5%の誤差であった。

3.2 壁と平行に運動する円柱

平行平板間で壁と平行に運動する円柱 (Fig. 10) の付加質量について計算例を示す。平板間距離を H とし、 H/d をパラメータとした。対称性を考慮して、Fig. 10のように全体の1/4を検査面とした。

得られた結果を Fig. 11 に示す。Fig. 11は縦軸に付加質量の無次元値、横軸に平板間距離の無次元値を

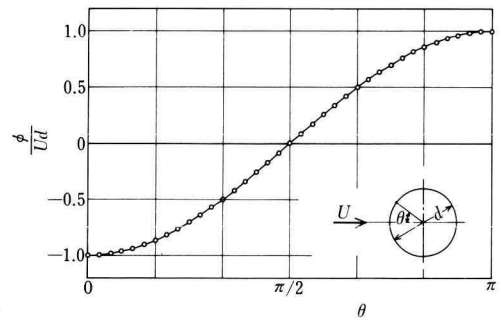


Fig. 9. Velocity potential distributions on a cylinder in a uniform flow.

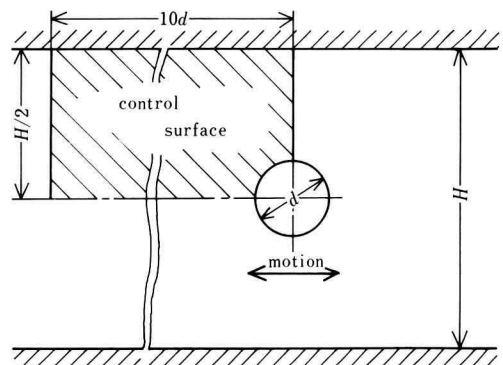


Fig. 10. A cylinder which moves parallelly with two parallel walls.

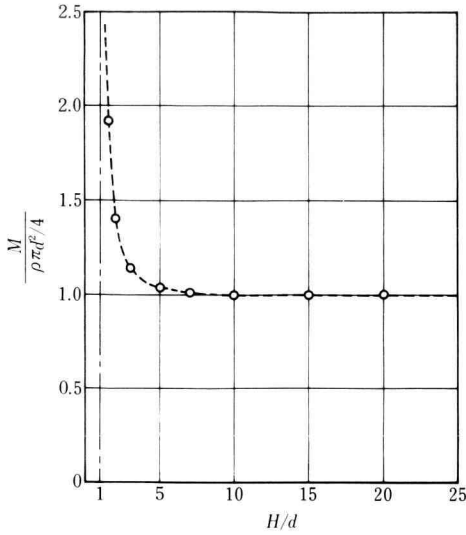


Fig. 11. Apparent mass of a cylinder which moves parallelly with walls.

としている。無次元化された付加質量 $M/(\rho\pi d^2/4)$ は、 H/d が大きくなるにつれ 1 に収束し、 H/d が 1 に近づくにつれ急激に増大することが確認された。

3.3 壁と垂直に運動する円柱

ここでは壁と垂直に運動する円柱 (Fig. 12) の付加質量について計算例を示す。円柱中心と壁との距離を L とし、 L/d をパラメータとした。対称性を考慮して、Fig. 13 のように上側半分を検査面とした。寸法および境界条件は、Fig. 13 の通りである。

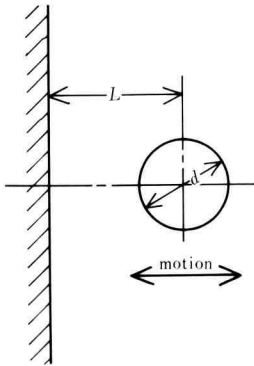


Fig. 12. A cylinder which moves vertically against a wall.

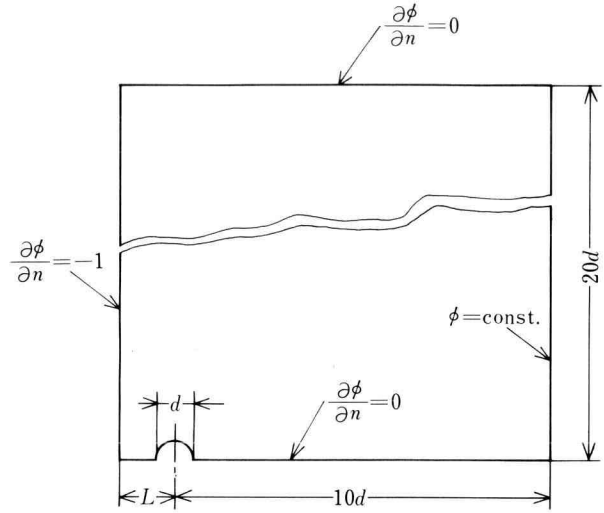


Fig. 13. Control surface.

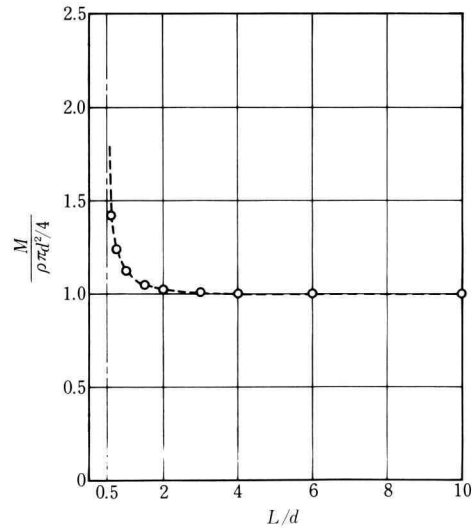


Fig. 14. Apparent mass of a cylinder which moves vertically against a wall.

得られた結果を Fig. 14 に示す。 $M/(\rho\pi d^2/4)$ は、 L/d が大きくなるにつれ 1 に収束し、 L/d が 0.5 に近づくにつれ急激に増大することが確認された。

以上の計算例のように、本計算方法は境界条件の与え方を変えることによって、壁と物体との干渉問題にも応用できることが明らかとなった。また、任意形状物体に対しても本計算手法は有効である。

4. 結 言

られる。

定常ポテンシャル流れの解析結果から物体の付加質量を計算する方法を開発した。本計算手法のおもな特徴は次の通りである。

- (1) 定常ポテンシャル流れを一度解析するだけで付加質量が求められる。
- (2) 境界要素法を用いることにより不必要な計算が省かれ、短時間で計算できる。
- (3) 物体まわりに循環を伴わない限り、任意物体に適用できる。
- (4) 境界条件の与え方によって壁面との干渉も求め

文 献

- 1) Morison, J., R., *et al.*, *Pet. Trans.*, 189 (1950), p. 149.
- 2) 大橋秀雄, 流体力学(1), コロナ社, (1982), p. 127.
- 3) Brebbia, C., A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press Limited, (1978).
- 4) 神谷・田中・田中共訳, 境界要素法入門, 培風館, (1980), 3) の和訳.