

元の数 $n=12$ の有限 Fuzzy 代数の数

巽 久行・小林だいご*・向殿 政男**・西岡 篤夫

The Number of Finite Fuzzy Algebra having n elements for $n=12$

Hisayuki TATSUMI, Daigo KOBAYASHI*, Masao MUKAIDONO**
and Atsuo NISHIOKA

Abstract

A fuzzy algebra is an algebraic system which is satisfied a fuzzy set or a fuzzy logic. A fundamental difference between a Boolean algebra using an ordinary set or a two-valued logic and a fuzzy algebra is the fact that the complementary law being satisfied by a Boolean algebra is replaced by the weaker condition, called Kleene's law, in a fuzzy algebra. This is the second report continued from the first report entitled "Enumerating Finite Fuzzy Algebra", and in that report, we have been determined the finite fuzzy algebra having n elements for $n=2$ to $n=11$. Based on a enumerating procedure which is reforming more speedily than a previous method in the above report, we enumerate the number of finite fuzzy algebra having 12 elements.

1. ま え が き

近年計算機工学の分野において、古くから用いられている2値論理の他に、2値よりも多い3値以上の真理値を持つ多値論理が利用されている。特に、L.A. Zadehにより、あいまいさを数量的に取り扱う手段として fuzzy 集合の概念が提案¹⁾されてから、この集合の論理的な応用も行われ、多値論理の分野の中で fuzzy 論理という名称の下に研究されている²⁾。fuzzy 論理は、その命題が取り得る真理値が0と1との間の連続濃度 $[0, 1]$ を取るような無限多値論理である。無限多値を扱う論理については、既に J. Lukasiewicz などによって研究されていたが³⁾、fuzzy 論理との違いは、fuzzy 論理における中心課題が曖昧さを含むような命題を取り扱うことが出来るような論理体系として研究されたことにある。現在 fuzzy 論理は、曖昧さを含む推論⁴⁾ や不確定を伴う故障診断⁵⁾ などに応用されており、最近では工学分野以外でも注目され始めている。

通常、論理系にはそれに対応する代数系が存在して

いる。2値論理に対応する代数系が、よく知られているブール代数である。逆に、2値論理や通常の集合論を代数系として眺めた場合、これらはブール代数の1つのモデルである。同様に fuzzy 論理にもそれに対応する代数系が存在しており、その代数系を fuzzy 代数と呼んでいる⁶⁾。

言い替えれば、fuzzy 集合論や fuzzy 論理は、fuzzy 代数の1つのモデルとなっている。公理の集合として fuzzy 代数を定義すると、fuzzy 代数とは、ブール代数において満足される相補律を、それよりも弱い公理であるクリーネ律と呼ばれる公理で置き換えて得られる代数系である。工学の分野では fuzzy 代数と呼んでいるが、同じ代数系が数学の分野ではクリーネ代数と呼ばれて研究されている^{7,8)}。

本報告は、著者らが以前から行っている有限 fuzzy 代数の数の数え上げの続報である。有限 fuzzy 代数はある特殊な分配束をなしており、その数え上げ問題とは、fuzzy 代数で成立する全ての公理を満たすような有限個の元からなる束は、同型なものを除いて何種類あるかを求める問題である。著者らの興味の中心は、有限 fuzzy 代数がどのような構造をしているかを知ることにある。元の数が n である有限ブール代数については、既にその束構造が集合束 2^n に同型であることが

平成元年 10 月 2 日受理

* 鹿島建設

** 明治大学理工学部

知られている。fuzzy 代数は、ブール代数で満たす公理との違いがクリーネ律のみであるにもかかわらず、その束構造は、著者らの知る限り殆ど深く研究されていない。そこで、構成的な束構造を求める手がかりとして、計算機を用いて算出してみることにした。元の数 n である有限 fuzzy 代数の数については、これまで本紀要の初報⁹⁾ 及びその他^{10,11)} で既に元の数 $n \leq 11$ まで報告されている。本報告では、元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数の数え上げ結果が得られたので、その数及び束の図形表現 (ハッセ図) を列挙する。

2. 数え上げ方法

有限 fuzzy 代数の数え上げ方法は、本紀要の初報⁹⁾ 及びその他^{10,11)} で著者らがこれまで行ってきた方法と同じである。若干の違いは、なるべく効率の良い刈り込みを用いて計算時間を短縮したことである。本節では、fuzzy 代数の定義とその数え上げ手順の概要を示す。これらは既に著者らが報告している文献の記述と重複することになるが、本報告で述べる結果の説明上、必要最小限にとどめてその要点を列挙する。

最初に、fuzzy 代数 (fuzzy algebra) の定義について述べる。

[定義 1] 空でない集合 L に、3つの演算 \cup, \cap, \sim が定義されていて、 L の任意の元 A, B, C に対し

て、表 1 の全ての等式が成立する代数系 $\langle L, \cup, \cap, \sim, 0, 1 \rangle$ を fuzzy 代数という。

特に、表 1 において等式 (9) のクリーネ律を、更に強い等式である

$$\text{相補律 (a) } A \cup \sim A = 1$$

$$(b) A \cap \sim A = 0$$

で置き換えた代数系がブール代数 (Boolean algebra) である。即ち、fuzzy 代数は、ブール代数における相補律を、それよりも弱い公理であるクリーネ律で置き換えて得られる代数系であるから、ブール代数を満足する束は、当然ながら fuzzy 代数を満足する束の一部として含まれることになる。なお、表 1 で示されている各等式において、括弧を節約するために、演算の間、 $\sim > \cap > \cup$ の順で、演算の強さの順序を設けている。

表 1 の中で、*印が付いている等式の集合は、fuzzy 代数における完全で独立な公理系である。ここで完全な公理系とは、与えられた代数系を満たす等式のなかで、その代数系で成立する他の全ての等式を導くことが出来るような等式の集合をいう。又、独立な公理系とは、その公理系の各公理が他からは決して導くことが出来ないとき、既ち、公理として互いに独立であるときをいう。即ち、表 1 の全ての等式は、*印の付いた 6 つの公理から導くことが可能であり、更に、*印

表 1. fuzzy 代数で成立する等式 (*印は、公理を示す)

(1) 交換律	(a)* $A \cup B = B \cup A$
	(b) $A \cap B = B \cap A$
(2) 結合律	(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(3) 吸収律	(a) $A \cup (A \cap B) = A$
	(b) $A \cap (A \cup B) = A$
(4) 分配律	(a)* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(5) ド・モルガン律	(a)* $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
	(b) $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$
(6) 復帰律*	$\sim(\sim A) = A$
(7) 最小元の存在	(a)* $0 \cup A = A$
	(b) $0 \cap A = 0$
(8) 最大元の存在	(a) $1 \cup A = 1$
	(b) $1 \cap A = A$
(9) クリーネ律	(a)* $(A \cap \sim A) \cup (B \cup \sim B) = B \cup \sim B$
	(b) $(A \cap \sim A) \cap (B \cup \sim B) = A \cap \sim A$

の付いた 6 つの各公理は互いに他からは決して導くことが出来ない。*印の付いた完全で独立な公理系は、文献 [6] で示された fuzzy 代数における初めての完全で独立な公理系である。この他にも完全で独立な公理系が存在する可能性はあるが、現在上記以外の完全で独立な公理系は著者の知る限り報告されていない。任意に与えられた束が、その代数系を満足するかどうかを調べるとき、その代数系で成立する全ての等式を調べる代わりに、その代数系における完全で独立な公理系だけを調べれば十分である。なぜならば、完全で独立な公理系はその代数系を満たす全ての等式を導出することが出来るので、完全で独立な公理系を満足する束は、当然ながらその代数系を満たす全ての等式を満足している。以上の理由から、有限個の元からなる fuzzy 代数の数を求める問題は、表 1 の 6 つの公理を満たす有限束の数を求める問題に帰着される。

次に、有限 fuzzy 代数の数の上げ方法について述べる。

包含関係 $>$ が定義された n 個の元よりなる集合 P を、 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ とする。有限 fuzzy 代数は有限束であるから、最大元及び最小元が必ず存在する。そこで、あらかじめ集合 P の元のうち、 p_1 を最大元(即ち、任意の $i (\neq 1)$ に対して $p_1 > p_i$) に、 p_n を最小元(即ち、任意の $i (\neq n)$ に対して $p_i > p_n$) に決めておく。集合 P における包含関係 $>$ を記述するために、任意の 2 つの元 p_i 及び p_j (但し、 $1 \leq i, j \leq n$) の間に、次のような $n \times n$ 行列 (r_{ij}) を定義する。

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{但し、} p_i > p_j \text{ のとき}) \\ -1 & (\text{但し、} p_j > p_i \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{但し、上記以外のとき}) \end{cases}$$

この行列 (r_{ij}) において、集合 P の元 p_1, \dots, p_n の適当な置換により、行列の対角成分より右上の三角部分、即ち、要素 r_{ij} のなかで $i \leq j$ の部分には -1 が現われない(逆に、左下の三角部分、即ち、要素 r_{ij} のなかで $i \geq j$ の部分には 1 が現われない)ようにすることが出来る。更に、 $r_{ij} = 1(0)$ ならば $r_{ji} = -1(0)$ であるから、行列 (r_{ij}) は右上の三角部分だけで一意に定まる。更に、 p_1 はあらかじめ最大元と決めているので、 $2 \leq j \leq n$ に対して常に $r_{1j} = 1$ である。同様に、 p_n は最小元と決めているので、 $1 \leq i \leq n-1$ に対して常に $r_{in} = 1$ である。よって、この要素以外の行列 (r_{ij}) の右上の三角部分の成分を

$$r_{2 \cdot 3}, r_{2 \cdot 4} r_{3 \cdot 4}, \dots, r_{2 \cdot k} r_{3 \cdot k} \dots r_{(k-1) \cdot k}, \dots, r_{(n-2) \cdot (n-1)},$$

と並べることにより、行列 (r_{ij}) を 2 進数表示で一意的に表すことが出来る。この 2 進数表示が有限束であるかどうかの判定方法は、既に田村、田中らにより文献 [12] で示されている。この方法の概略は次の通りである。与えられた集合 P が束であるためには、集合 P が半順序集合(即ち、反射律、反対称律、及び推移律を満たす集合)であり、更に集合 P の任意の 2 つの元の間に上限及び下限が定義されていて、その上限及び下限が集合 P の元として一意に存在することが必要である。集合 P を表現する 2 進数表示のうちで、この条件を満足する 2 進数表示を数え上げることにより、有限束の数を算出することが出来る。実際に彼らはその判定法を用いて元の数 $n \leq 11$ の有限束の数を計算機を用いて算出した¹²⁾。有限 fuzzy 代数の数を数え上げるためには、最初に有限束を生成しなければならないが、これについては上で述べた田村、田中らが行った方法を利用している。但し、彼らを用いた手法のうち、同型である有限束を除外する部分については、計算速度の向上のために省略している。その理由は、fuzzy 代数を満足する有限束は元の数 n が少ないうちは同型なものを重複しても全ての有限束を表す 2 進数表示のほんの一部分であると予想出来るので、fuzzy 代数が満足する公理の判定を終了した後に同型判定を行った方が効率が良いと考えたことによる。実際、有限束の同型判定にはかなりの計算時間が費やされてしまうことが確認されている。次に、この生成された有限束が有限 fuzzy 代数であるかを判定しなければならない。これについては、表 1 において *印の付いた完全で独立な 6 つの公理系を満たすことを確かめればよい。しかし、有限束を表す 2 進数表示は、あらかじめ交換律 (a) 及び最小元の存在 (a) が満足されているように作られているので、この 2 つの公理判定手順は fuzzy 代数の判定手続きから削除出来る。更に、有限 fuzzy 代数の公理系の判定手順を軽減するために、前報告⁹⁾で示した有限 fuzzy 代数の基本的な性質を利用して、残り 4 つの完全で独立な公理系の判定手順の簡単化を行う。この方法は、分配律 (a) 及びクリーネ律 (a) を多少変形することによって、ド・モルガン律 (a) 及び復帰律を fuzzy 代数の判定手続きから除外出来るという事実を利用する。この際、fuzzy 代数で定義されている演算 \cap が、演算 \cup 及び演算 \sim を用いて以下のよう表すことが可能となる。

$$A \cap B = \sim (\sim A \cup \sim B)$$

この等式を用いて、分配律 (a) は次のような等式に変形される。

$$\begin{aligned} \sim(\sim A \cup \sim(B \cup C)) = \\ \sim(\sim A \cup \sim B) \cup \sim(\sim A \cup \sim C) \quad (I) \end{aligned}$$

同様に、クリーネ律 (a) は次のような等式に変形される。

$$\sim(\sim A \cup A) \cup (B \cup \sim B) = B \cup \sim B \quad (II)$$

これより、有限 fuzzy 代数の判定手続きは、この2つの等式 (I) 及び (II) だけの判定手順に簡略化され、かつ、演算の種類が \cup 及び \sim だけで済むことになるので計算時間がかなり短縮されることになる。

以上により、次のような有限 fuzzy 代数の判定手順を示すことが出来る。

[手順] 有限 fuzzy 代数の判定法

- (1) 有限集合の包含関係を記述する2進数表示を作成する。
- (2) 作成された2進数表示が束であるかを判定する (田村, 田中らによる方法)。
- (3) 変形された分配律 (I) を調べる。
- (4) 変形されたクリーネ律 (II) を調べる。
- (5) 導出された fuzzy 代数の同型判定を行う。

上で示した有限 fuzzy 代数の数え上げ方法は、著者らがこれまで行ってきた方法と基本的に同じである。ただ、本報告では手順 (5) の同型判定に若干の刈り込み手法を適用したので、僅かながら計算時間の短縮が計られた。改良した同型判定方法の概略は、次の通りである。

導出された有限 fuzzy 代数を F とする。集合 F に存在する各元 p_2, \dots, p_{n-1} に対して、その上界の元 s (即ち、 $2 \leq i \leq n-1$ に対して、 $s > p_i$) の数を求める。この上界の数が等しい集合 F の元 p_i の数を求めて小さい順に並べる。得られた数列が一致している有限 fuzzy 代数は互いに同型であると判定出来る。前報告⁹⁾で行ったこの同型判定の部分のうち、上界の数を求めて集合 F の元の数を小さい順に並べ変える手続きを、更に下界の数も考慮に入れて同型判定を高速にした。即ち、上界と下界を並列に考慮することにより、どちらか一方でも異なっていると判断されれば直ちにこれまで得られている有限 fuzzy 代数とは異なる新しい有限 fuzzy 代数であると判断される。しかしながら、有限 fuzzy 代数を満足する2進数表示そのものが、同型なものも含めて全ての2進数表示のうちのはんの一部

分にすぎないため、この同型判定の効率は、有限 fuzzy 代数の判定手続きの計算時間の僅かな短縮でしかない。数え上げに費やされる計算時間の大部分は、手順 (1)~(4) で占められているので、上述した有限 fuzzy 代数の判定手順を採用する限り、全体の大幅な計算時間の短縮は望めないように思われる。

3. $n=12$ の有限 fuzzy 代数

前節の手順により、ある与えられた包含関係を満足する有限集合が fuzzy 代数であるかを判定することが出来る。表2に、元の数が $n=12$ である有限 fuzzy 代数の、2進数表示結果を示す。数え上げにおいては、プログラムをC言語で記述し、情報工学科所有のエンジニアリング・ワークステーション AS-4110 (サン・マイクロシステムズ社製のワークステーション SUN4-110 の東芝社 OEM, 計算速度が約 7 Mips の RISC マシン) を使って実行した。なお、事前に計算時間がかなり費やされると予想されたので、計算処理過程を分割したために正確な実行時間は計れなかったが、約 180 時間で全ての計算を終了した。

ここで、本アルゴリズムの妥当性について簡単に説明する。前節で述べた有限 fuzzy 代数の判定手順のうち、手続き (1) の2進数表示作成部分は、任意の包含関係を含む全ての有限集合を構成出来ることが示されている。手続き (2) の有限束判定方法は、田村, 田中らによりこれまで得られている元の数 n が 11 以下の全ての有限束を導出させて、その数を確認している¹²⁾。また彼らの方法は全幅判定を行っているので、全ての有限束が導出出来ることが示される。手続き (3) 及び手続き (4) については、前報告⁹⁾で有限 fuzzy 代数の完全で独立な公理系から導き出された等式であるため、必ず手続き (4) が終了した時点で、全ての有限 fuzzy 代数が算出出来る。最後に手続き (5) であるが、これも全幅判定であるため、必ず判定出来る。実際に、この方法で同型判定が行えることを、算出された同型なものも含む全ての2進数表示された有限 fuzzy 代数に対して、計算機を用いて確認を行った。更に、一部については手計算での確認も合わせて行った。また、念のため本報告で示した修正手続きを用いて、前報告⁹⁾で述べた元の数 n が 11 以下の全ての有限 fuzzy 代数を数え上げて、その再確認も行っている。以上により、本報告で示された $n=12$ の有限 fuzzy 代数の数は 19 種類であるという結果は、正当性があると思われる。し

表 2. 元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数の出力結果

number of elements = 12

No. 1	0, 00, 001, 0110, 10100, 110000, 1110111, 10110100, 011110000,
No. 2	0, 01, 010, 0111, 11000, 111001, 1101010, 11111111, 011110000,
No. 3	0, 01, 011, 0111, 11000, 111001, 1111011, 11111111, 011110000,
No. 4	0, 01, 011, 1100, 11101, 100000, 1100101, 11101111, 111111000,
No. 5	0, 01, 110, 1101, 11110, 111111, 1101100, 11111111, 111111100,
No. 6	0, 01, 110, 1111, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111100,
No. 7	0, 11, 111, 1110, 11110, 111110, 1111111, 11111111, 111111110,
No. 8	0, 11, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111, 11111111, 111111110,
No. 9	0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111110,
No. 10	1, 10, 101, 1011, 11100, 111101, 1111111, 10111000, 111111111,
No. 11	1, 10, 101, 1110, 11111, 111010, 1111111, 111111100, 111111111,
No. 12	1, 10, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111, 111111110, 111111111,
No. 13	1, 10, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 111111110, 111111111,
No. 14	1, 11, 110, 1100, 11110, 111010, 1111111, 11111111, 111111111,
No. 15	1, 11, 110, 1101, 11110, 111111, 1111111, 11111111, 111111111,
No. 16	1, 11, 110, 1111, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111111,
No. 17	1, 11, 111, 1110, 11110, 111110, 1111111, 11111111, 111111111,
No. 18	1, 11, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111, 11111111, 111111111,
No. 19	1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111111,

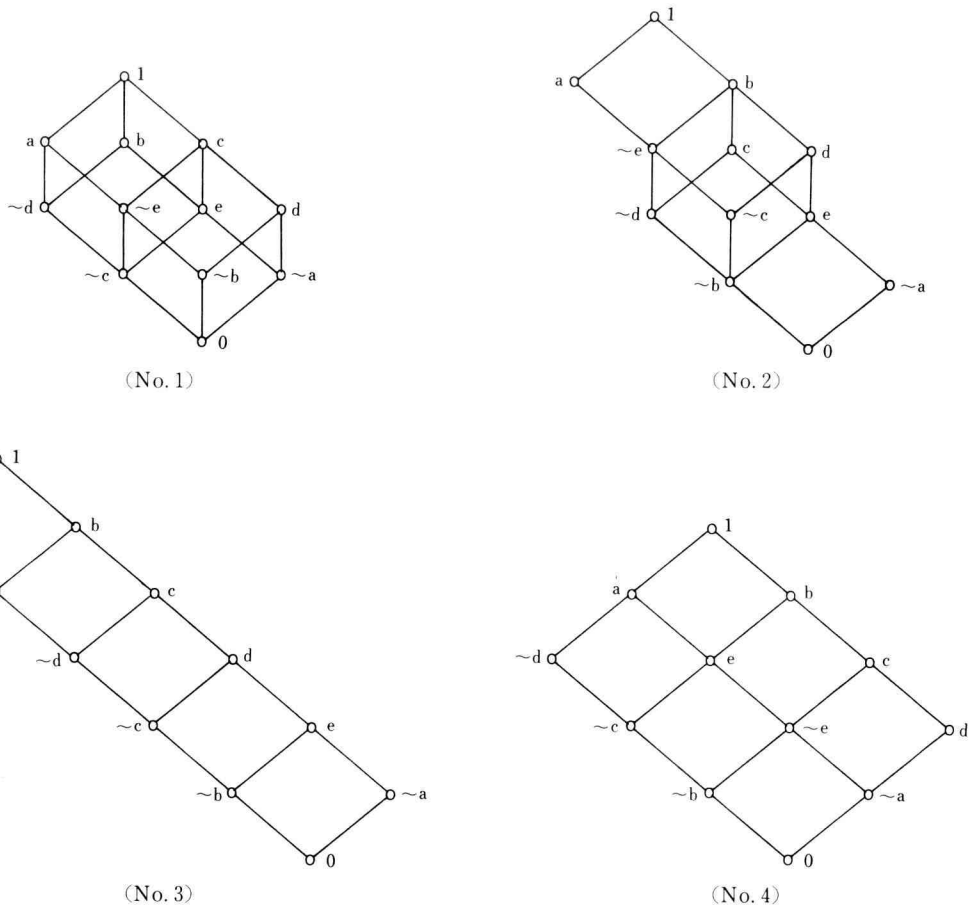
count = 19

かしながら、第 3 者が異なるアルゴリズムで追試して頂ければ幸いである。

ここで表 2 の出力結果の見方を、No. 11 の 2 進数表示を例にとって説明する。2 進数表示: 1, 10, 101, 1110, 11111, 111010, 1111111, 11111100, 111111111, はそれぞれ 2 進数表示の成分である r_{2-3} , r_{2-4} , r_{3-4} , r_{2-5} , r_{3-5} , r_{4-5} , r_{2-6} , r_{3-6} , r_{4-6} , r_{5-6} , r_{2-7} , r_{3-7} , r_{4-7} , r_{5-7} , r_{6-7} , r_{2-8} , r_{3-8} , r_{4-8} , r_{5-8} , r_{6-8} , r_{7-8} , r_{2-9} , r_{3-9} , r_{4-9} , r_{5-9} , r_{6-9} , r_{7-9} , r_{8-9} , r_{2-10} , r_{3-10} , r_{4-10} , r_{5-10} , r_{6-10} , r_{7-10} , r_{8-10} , r_{9-10} , r_{2-11} , r_{3-11} , r_{4-11} , r_{5-11} , r_{6-11} , r_{7-11} , r_{8-11} , r_{9-11} , r_{10-11} , を示しており、この場合、 r_{3-4} , r_{3-5} , r_{5-6} , r_{5-8} , r_{7-8} , r_{8-10} , r_{9-10} が 0, それ以外は 1 である。よって元の間の包含関係は、

$$\begin{aligned}
 & p_2 > p_3 > p_6 > p_7 > p_9 > p_{11}, \quad p_2 > p_3 > p_6 > p_7 > p_{10} > p_{11}, \\
 & p_2 > p_3 > p_6 > p_8 > p_9 > p_{11}, \quad p_2 > p_4 > p_5 > p_7 > p_9 > p_{11}, \\
 & p_2 > p_4 > p_5 > p_7 > p_{10} > p_{11}, \quad p_2 > p_4 > p_6 > p_7 > p_9 > p_{11}, \\
 & p_2 > p_4 > p_6 > p_7 > p_{10} > p_{11}, \quad p_2 > p_4 > p_6 > p_8 > p_9 > p_{11},
 \end{aligned}$$

となっている。これに、最大元 p_1 (全ての元を包含する) 及び最小元 p_{12} (全ての元に包含される) も含めた包含関係を記述すればよい。しかしながら、この記述方法では、全体の包含関係が把握しにくい。特に、半順序集合が有限集合であるときには、もっと見やすい図形的な表現方法がある。半順序集合の各元を平面上の点で表し、 $p_i > p_j$ ならば点 p_i から線を下にたどると点 p_j に到達するように線で結んだ図形をハッセ図 (Hasse diagram) と呼ぶ。このハッセ図で描き表すと、図 1 の No. 11 で示された図形になる。但し、有限 fuzzy 代数においては、元の間に否定演算 \sim に関して $\sim p_i = p_{n-i+1}$ (ここで、 $1 \leq i \leq n$) となる対応関係が成立しているので、この関係を強調するために、最大元 p_1 を 1 (最小元 p_{12} を $\sim 1 = 0$) に、 p_2 を a (p_{11} を $\sim a$) に、 p_3 を b (p_{10} を $\sim b$) に、 p_4 を c (p_9 を $\sim c$) に、 p_5 を d (p_8 を $\sim d$) に、 p_6 を e (p_7 を $\sim e$) に対応させている。この結果、図 1 の No. 11 に示すような元を持つハッセ図が得られる。表 2 の全ての 2 進数表示をこのようなハッセ図に描き直すことにより、図 1 に示されるような 19 種類の元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数が得られる。

図1. 元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その1)Fig.1 Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=12$ (Part 1)

ここで、図1のNo. 11で示されたハッセ図の各要素が、表1のfuzzy代数で成立する全ての等式を満足していることを、簡単に示しておくことにする。図1のNo. 11のハッセ図に含まれる任意の3つの要素、例えば b, d 及び $\sim d$ を、それぞれ表1のfuzzy代数 L の任意の元 A, B 及び C に代入して、各等式が満足されているかを確認することにする。この際、fuzzy代数については、*印で示されている完全で独立な公理系が与えられているので、少なくともこの6つの公理を調べればfuzzy代数で満足される全ての等式を調べたことになる。ここで便宜上、ハッセ図で示された束の上限及び下限を行う演算として、それぞれ記号 \vee 及び \wedge で書くことにする。

等式 (1)-(a): 左辺 $= b \vee d = a$, 右辺 $= d \vee b = a$

等式 (4)-(a): 左辺 $= b \wedge (d \vee \sim d) = b \wedge c = e$
 右辺 $= (b \wedge d) \vee (b \wedge \sim d) = \sim e \vee \sim d = e$

等式 (5)-(a): 左辺 $= \sim(b \vee d) = \sim a$
 右辺 $= \sim b \wedge \sim d = \sim a$

等式 (6): 左辺 $= \sim(\sim b) = b =$ 右辺

等式 (7)-(a): 左辺 $= 0 \vee b = b =$ 右辺

等式 (9)-(a): 左辺 $= (b \wedge \sim b) \vee (d \wedge \sim d) = \sim b \vee c = c$
 右辺 $= d \vee \sim d = c$

上の計算結果から分かるように、図1のNo. 11で示されたハッセ図、言い替えれば表2のNo. 11の2進数表

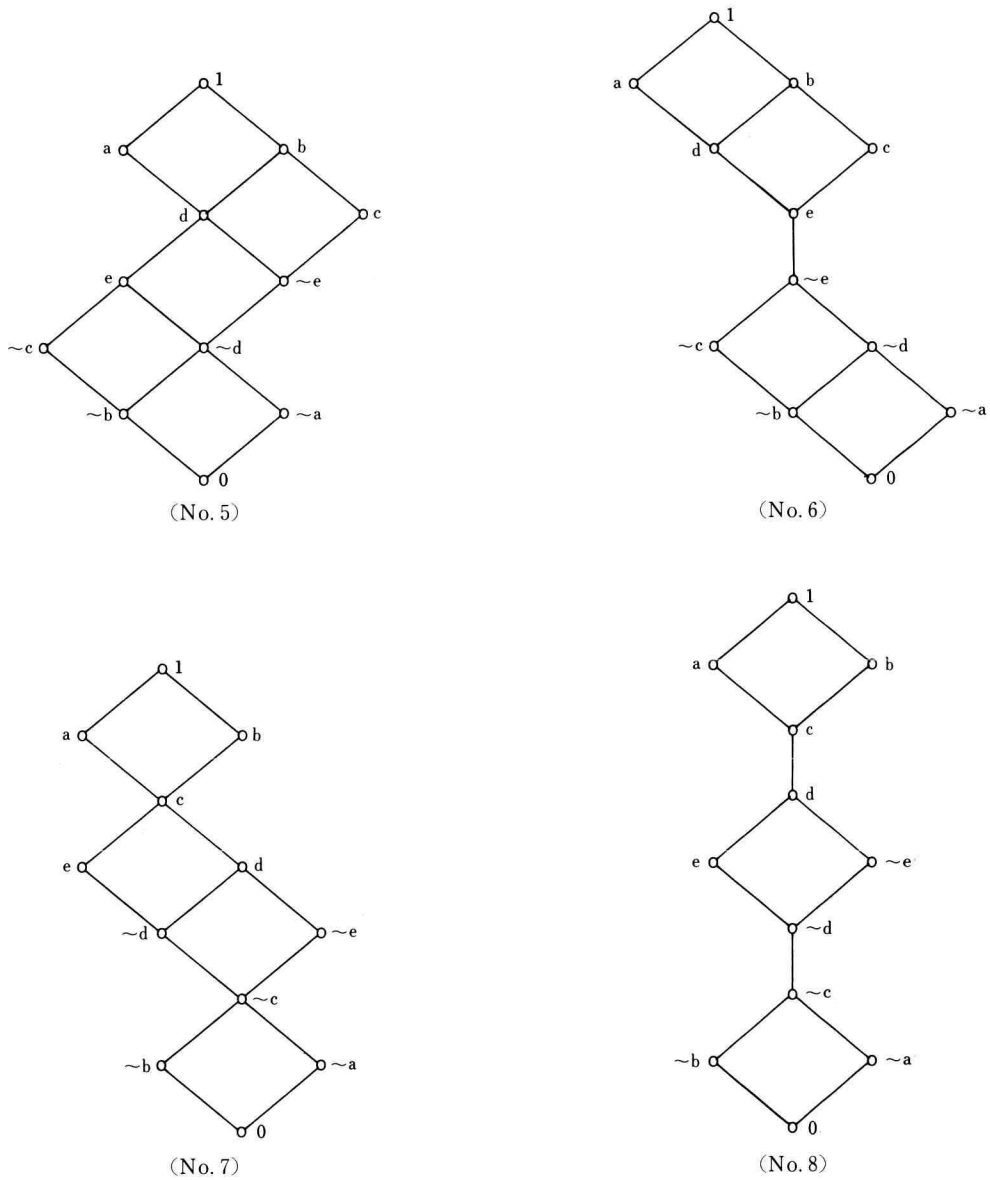


図 1. 元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 2)

Fig. 1. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=12$ (Part 2)

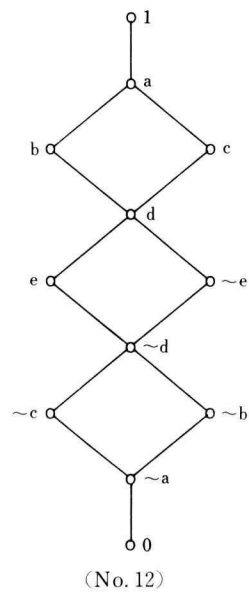
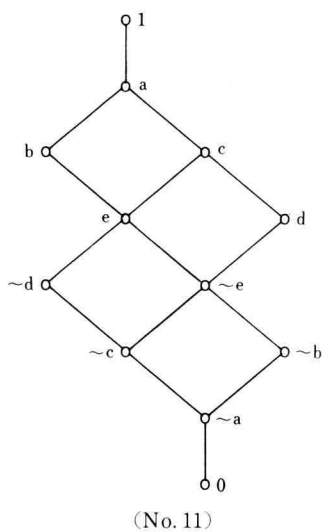
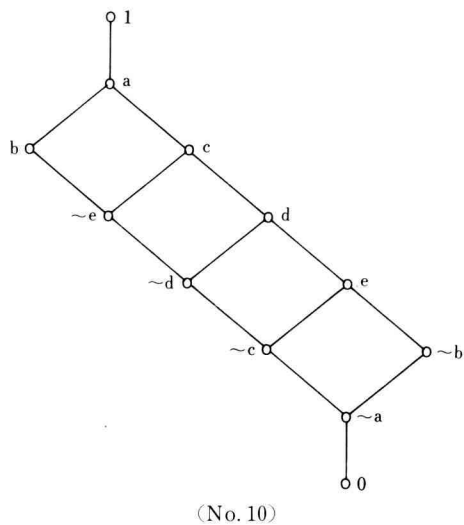
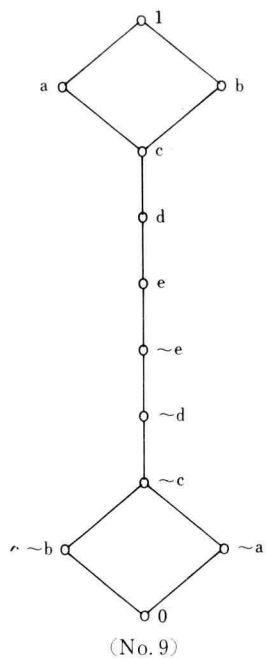


図 1. 元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 3)

Fig. 1. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=12$ (Part 3)

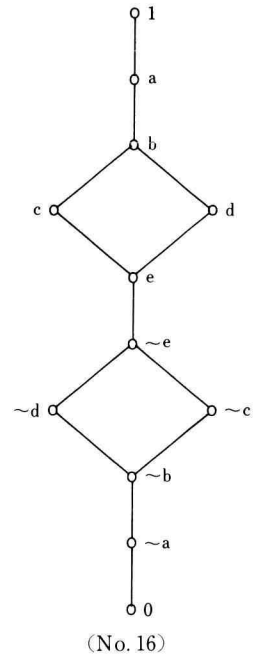
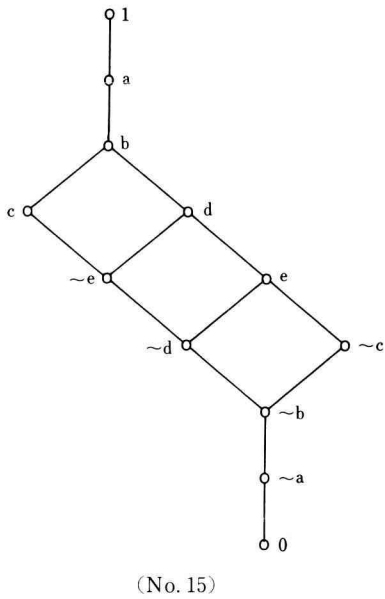
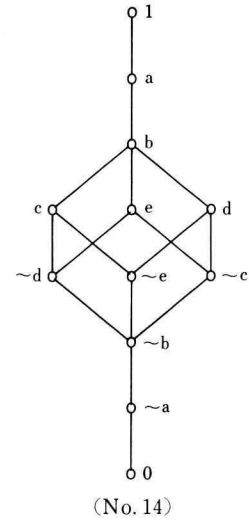
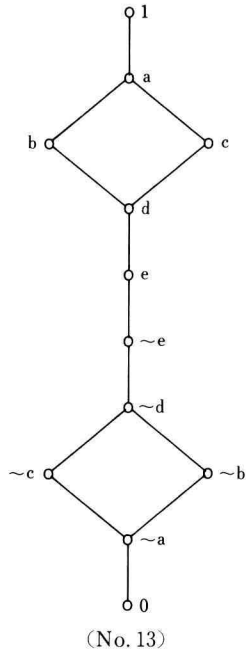


図 1. 元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 4)
Fig. 1. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=12$ (Part 4)

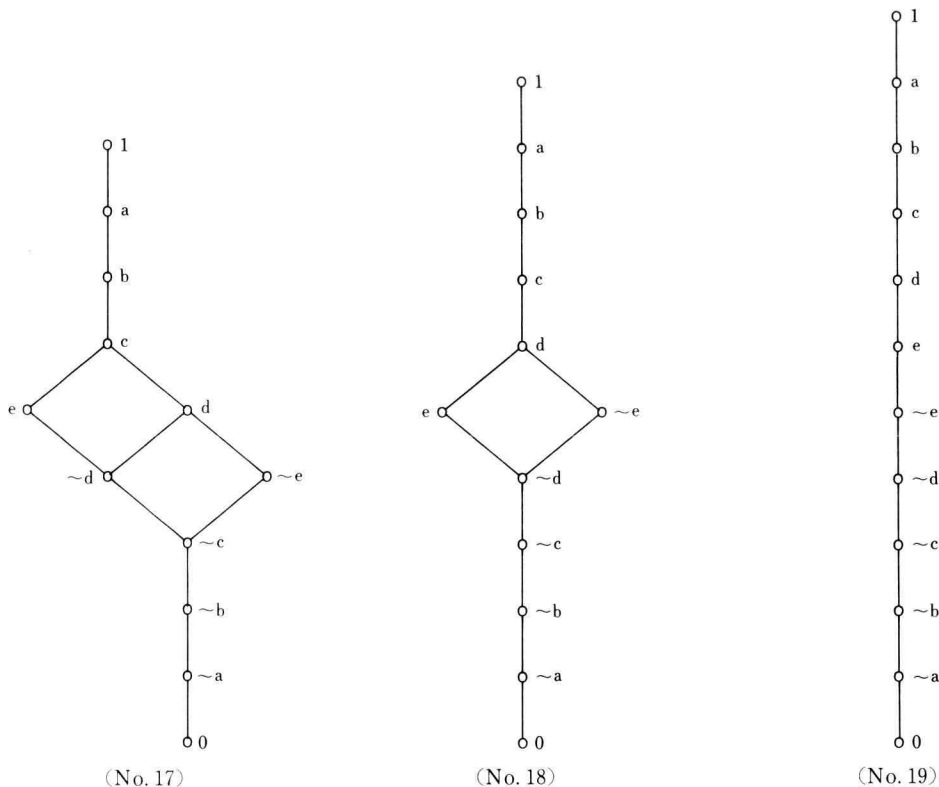


図 1. 元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数のハッセ図 (その 5)
 Fig. 1. Hasse diagrams of finite fuzzy algebra having n elements for $n=12$ (Part 5)

示は、表 1 で示されている fuzzy 代数の完全で独立な公理系を全て満足しているので、有限 fuzzy 代数となっている。

4. あとがき

本報告では、有限 fuzzy 代数の数え上げを行い、元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数を算出することが出来た。有限 fuzzy 代数に対する数え上げについては、著者の知る限り、本報告で示された元の数 $n=12$ がこれまで知られている最も元の数が多いものである。しかしながら、本報告で使用した方法では元の数 n が 13 以上の有限 fuzzy 代数の算出については、その計算時間の大幅な短縮は事実上不可能であると思われる。本報告で元の数 $n=12$ の有限 fuzzy 代数の結果を算出出来た要因は、前報告で示した手続きの若干の改良に伴う計算時間の短縮よりも、むしろ計算処理過程を分

割したことや、最新のワークステーションの計算速度の向上に負うところが大きいと思われる。有限 fuzzy 代数を数え上げる最終目標は、有限 fuzzy 代数の束構造を構成的に求める方法を見つけ出すことである。これについては、著者らの今までの計算結果から、与えられた元の数がそれほど多くない場合についてはある程度の数を予測することが出来るので、その数の上限及び下限を導き出すことが可能であるかもしれない。又、これまでの計算結果から推定される構成方法も幾つかの予想を立てることが出来る。しかしながら、一部のみの構成法であって、未だに完全な方法は証明出来ていない。

謝 辞

日頃、御指導頂く本学情報工学科木名瀬亮教授、及び北條尚志教授に深謝致します。また、ワークステ

ジョン使用の御機会を与えて下さった小暮仁教授、及び有益なコメントを頂きました石井博章教授に深謝致します。

参 考 文 献

- 1) L.A. Zadeh: Fuzzy sets, Inf. and Control, 8, pp. 338-353 (1965).
- 2) P.N. Marinos: Fuzzy logic and its application to switching systems. IEEE Trans., c-18, 4, pp. 343-350 (1969).
- 3) N. Rescher: Many-valued logic, McGraw-Hill (1969).
- 4) E.H. Mamdani and B.R. Gaines: Fuzzy reasoning and its applications, Academic Press (1981).
- 5) 向殿: ある特殊な3値論理関数とフェイルセーフ論理回路への応用, 昭和53電気学会東京支部大会, 94, pp. 187-188.
- 6) M. Mukaidono: A Set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra), IEEE Proc. 11th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp. 27-34 (1981).
- 7) R. Cignoli: Injective De Morgan and Kleene algebras, Proc. Amer. Math. Soc, 47, 2, pp. 269-278 (1975).
- 8) J. Berman and M. Mukaidono: Enumerating fuzzy switching functions and free Kleene algebra, Comp. Math. Appl. 10, pp. 25-35 (1984).
- 9) 巽, 小林, 向殿, 木名瀬: 有限 fuzzy 代数の数え上げ, 神奈川工科大学研究報告, B-13, pp. 173-187 (1989).
- 10) 小林: Fuzzy 代数の有限モデルの発見, 昭和62年度明治大学工学部電子通信工学科卒業論文.
- 11) 川崎, 栗山: 公理系を満足する代数系の計算機による発見, 昭和57年度明治大学工学部電子通信工学科卒業論文.
- 12) 田村, 田中: コンピュータによる有限束の数え上げ, 数理科学, No. 247, pp. 51-55 (1984).