N次元巡回型ディジタルフィルタの安定性判別の一方法

高　橋　貞　良

A Method for Testing the Stability of N-dimensional Recursive Digital Filters

Sadayoshi TAKAHASHI

Abstract

An N-dimensional recursive digital filter is structurally stable if and only if the denominator of its transfer function has no zeros in the closed polydomain $\bigcap_{i=1}^{N} |Z_i| \leqq 1$. In this paper, the discussion on a unit disk is translated to that on the unit circle.

あらまし

三次元画像の処理や，時間遅れを考慮した画像処理に対しては，三次元以上のディジタルフィルタが必要となる。これらの多次元巡回型ディジタルフィルタの安定性判別について述べる。

1. まえがき

多次元巡回型ディジタルフィルタの安定性判別については，E.I. Jury や N.K. Bose などの仕事があるが，これらの方法は，どちらかと言えば従来のフルビィッツの方法の多次元化と言える。これに反して R. Decarlo[1] 等は，特に二次元の巡回型ディジタルフィルタに対してナイキスト的な根軌跡を描くことによって，判別を可能にする方法を提案している。しかし，この方法は，ある意味で直観的であり，厳密性を欠き，三次元以上のディジタルフィルタに対しては不適当である。本文では，多次元巡回型ディジタルフィルタに対して，Huang の定理を拡張し，複素関数論の偏角の原理を用いて，数値的に安定性を判別する方法を提案している。

平成元年9月10日受理

2. 理　論

まず，安定性の定義を行う。

［定義1］ N次元巡回型ディジタルフィルタの伝達関数を

$$F(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N) = \frac{A(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)}{B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)} = \sum_{i1=0}^{\infty}\cdots\sum_{iN=0}^{\infty} f_{i_1 i_2 \cdots i_N} Z_1^{i_1} \cdots\cdots Z_N^{i_N}$$

とするとき，このフィルタが Bibo-安定であるための条件は，

$$= \sum_{i1=0}^{\infty}\cdots\sum_{iN=0}^{\infty} |f_{i_1}\cdots\cdots i_N| < \infty$$

である。

［定義2］ 定義1で特に

$$\frac{1}{B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)} = \sum_{i1=0}^{\infty}\cdots\sum_{iN=0}^{\infty} h_{i_1}\cdots{}_{iN} Z_1^{i_1}\cdots Z_N^{iN}$$

と展開するとき

$$\sum_{i1=0}^{\infty}\cdots\sum_{iN=0}^{\infty} |h_{i_1}\cdots{}_{iN}| < \infty$$

となれば，このフィルタは構造的に安定となる。

［補題1］ 構造的に安定であれば Bibo 安定である。

［証　明］

定義より $|Z_i|\leqq 1$ $(i=1, \cdots, N)$ に対して

$$\sum_{i1=0}^{\infty}\cdots\sum_{iN=0}^{\infty}|h_{i_1}\cdot\cdot{}_{iN}|>\frac{1}{|B(Z_1, \cdots, Z_N)|}$$

フィルタが構造的に安定であれば，左辺は有界となり，$B(Z_1, \cdots, Z_N)\neq 0, |Z_i|\leqq 1(i=1, \cdots, N)$ となる。

また，$B(Z_1, \cdots, Z_N)$ の連続性より，$\varepsilon_i>0$ $(i=1, \cdots, N)$ が存在し，

$B\ (Z_1,\ Z_2, \cdots, Z_N)\neq 0, |Z_i|<1+\varepsilon_i\ (i=1, \cdots, N)$

となり，

$\dfrac{A(Z_1, \cdots, Z_N)}{B(Z_1, \cdots, Z_N)}$ は $|Z_i|<1+\varepsilon_i(i=1, \cdots, N)$

で正則となる。

よって

$\displaystyle\sum_{i1=0}^{\infty}\cdot\cdot\sum_{iN=0}^{\infty}f_{i_1}, \cdots{}_{iN}Z_1{}^{i_1}\cdot\cdot Z_N{}^{iN}=\frac{A(Z_1, \cdots, Z_N)}{B(Z_1, Z_2, \cdots Z_N)}$ は

$|Z_i|=1(i=1, \cdots, N)$ 上で絶対収束し，

$\displaystyle\sum_{i1=0}^{\infty}\cdots\sum_{iN=0}^{\infty}|f_{i_1}\cdots{}_{iN}|<\infty$ となり Bibo-stable となる。

（証明終）

［定理 1］[4)]

N 次元巡回型ディジタルフィルタが構造的に安定であるための必要十分条件は，伝達関数の分母多項式を $B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)$ とするとき，次式が成立することである。

$B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)\neq 0,\ |Z_1|\leqq 1, |Z_2|\leqq 1, \cdots,$
$|Z_N|\leqq 1$

後に述べる［定理 3］は，1974 年筆者[4)] や E.I. Jury[5)] らによって述べられた定理であるが，特にエレガントに証明できる Hartogs の定理を用いた証明法[6)] を示す。

次に有用な拡張された Hartogs[2)] の定理を述べる。

［定理 2］

関数 $f(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)$ が $\bigcup_{i=1}^{N}Ai$ で連続であり，ε を小さな正数，$\rho_i(i=1, \cdots, N)$ をある正数とする。

ここで，

$A_1=\{(Z_1, \cdots, Z_N)||Z_1|<\rho_1, |Z_i|<\varepsilon(i=2, \cdots, N)\}$

$A_k=\{(Z_1, \cdots, Z_N)|\rho_l-\varepsilon<|Z_l|<\rho_l(l=1, \cdots, k-1), |Z_k|<\rho_k, |Z_l|<\varepsilon(l=k+1, \cdots, N)\}(k=2, \cdots, N-1)$

$A_N=\{(Z_1,\ \cdots,\ Z_N)|\rho_l-\varepsilon<|Z_l|<\rho_l(l=1,\ \cdots, N-1), |Z_N|<\rho_N\}$

このとき，もし $f(Z_1,\ Z_2,\ \cdots,\ Z_N)$ が A_i 内で $Z_i(i=1, \cdots, N)$ について正則であるとき，

$f(Z_1,\ Z_2,\ \cdots,\ Z_N)$ は解析的に拡張され B 内で正則となる。

ここで，

$$f(Z_1,\ Z_2, \cdots,\ Z_N)=\frac{1}{(2\pi_i)^N}\int_{|\xi 1|=r1}\cdots\int_{|\xi N|=rN}\frac{f(\zeta_1,\ \zeta_2, \cdots\zeta_N)d\zeta, \cdots d\zeta_N}{(\zeta_1-Z_1)(\zeta_2-Z_2)\cdots(\zeta_N-Z_N)},$$

$$|Z_k|<r_k<\rho_k(k=1, \cdots N)$$

$$B=\{(Z_1, \cdots, Z_N)||Z_i|<\rho_i(i=1, \cdots, N)\}$$

［定理 3］（Huang の定理の拡張）

N 次元巡回型ディジタルフィルタが構造的に安定であるための必要十分条件は，伝達関数の分母多項式を $B(Z_1,\ Z_2, \cdots,\ Z_N)$ とすると，次の一連の式が成立することである。

$$B(Z_1, 0, \cdots, 0)\neq 0, |Z_1|\leqq 1 \quad (1)$$

$$B(Z_1, Z_2, 0, \cdots, 0)\neq 0, |Z_1|=1,\ |Z_2|\leqq 1 \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)\neq 0, |Z_1|=1,\ |Z_2|=1, \cdots, |Z_{N-1}|=1, |Z_N|\leqq 1 \quad (N)$$

［証　明］

(i)　必要性は明らかである。

(ii)　十分性の証明。

(1) ～(N) と $B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)$ の連続性より小さな正数 ε と 1 より大きな ρ_i が存在して，

$A_i(i=1, \cdots, N)$ 内で $B(Z_1, \cdots, Z_N)\neq 0$ となる。

$f(Z_1, \cdots, Z_N)=\dfrac{1}{B(Z_1, \cdots, Z_N)}$ と定義すると，

$f(Z_1, \cdots, Z_N)$ は A_i 内で Z_i について正則となり［定理 2］の条件を満たし，解析的に拡張され，B 内で正則となる。ところで，$f(Z_1, \cdots, Z_N)$ は除去可能な特異点はもっていないので，

$B(Z_1, \cdots, Z_N)\neq 0, |Z_i|<\rho_i(i=1, \cdots N)$ とならねばならず，

$B(Z_1, \cdots, Z_N)\neq 0, |Z_i|\leqq 1\ (i=1, \cdots N)$ となる。

（証明終）

［定理 4］

$B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_N)$ を N 次元巡回型ディジタルフィルタの分母多項式とすると，

$$\left.\begin{array}{l} B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0) \neq 0 \\ |Z_1|=1, |Z_2|=1, \cdots, |Z_{i-1}|=1, |Z_i| \leqq 1 \end{array}\right\} \quad (i)$$

が成立するための必要十分条件は，次の(I)，(II)が成立することである。

$$(I) \quad \left\{\begin{array}{l} B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0) \neq 0 \\ |Z_1|=1, |Z_2|=1, \cdots, |Z_i|=1 \end{array}\right.$$

(II) $|Z_1|=1, |Z_2|=1, \cdots, |Z_{i-1}|=1$ なる任意の $Z_1, Z_2, \cdots, Z_{i-1}$ に対して，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|Z_i|=1}\frac{DB(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)}{B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)}dZ_i=0$$

ただし

$$DB\,(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0) = \frac{\partial}{\partial Z_i}B(Z_1, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)$$

とくに (II) の積分値は式 (i) が成立しない場合は，(I) の条件の下で正の整数値しかとらないことに注意されたい。これは計算機利用の明確な数値判別に役立つ。

［証　明］ 関数論の偏角の原理より明らかである。（証明終）

3. 数値計算上の誤差について

1］ $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{|Z_i|=1}\frac{DB(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)}{B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)}dZ_i$ の誤差

条件 (I) と $B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)$ が多項式であることから，単位円のコンパクト性を用いて，正数 $r_k(<1)$, $R_k(>1)$ $(k=1, \cdots i)$ が存在して $r_k \leqq |Z_k| \leqq R_k(k=1, \cdots, i)$ 上で

$$G(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0) = \frac{DB(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)}{B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)}$$

は有界となる。

このとき文献 3）より周回積分の誤差は次式でおさえられる。

$E(N)=Ar_i^N+B/R_i^N$, ここで N は周回積分のサンプル点数

$$A=\max_{|Z_1|=1, \cdots, |Z_{i-1}|=1, |Z_i|=r_i} |G(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)|$$

$$B=\max_{|Z_1|=1, \cdots, |Z_{i-1}|=1, |Z_i|=R_i} |G(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)|$$

明らかに $\lim_{N\to\infty} E(N)=0$ となる。

2］ パラメータ $|Z_k|=1(1 \leqq k \leqq i-1)$ に対する積分誤差

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|Z_i|=1}G(Z_1, \cdots, Z_{k-1}, Z_{k1}, Z_{k+1}, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)dZ_i\right|$$

$$-\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|Z_i|=1}G(Z_i, \cdots, Z_{k-1}, Z_{k2}, Z_{k+1}, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)dZ_i\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{|Z_i|=1}|G(Z_1, \cdots, Z_{k-1}, Z_{k1}, Z_{k+1}, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0) - G(Z_1, \cdots, Z_{k-1}, Z_{k2}, Z_{k+1}, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)|\,dZ_i$$

$$\leqq |Z_{k1}-Z_{k2}| \cdot \frac{\displaystyle\max_{|Z_j|=1,\ j=1, \cdots, i} |A(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)|}{\displaystyle\mathit{Min}_{|Z_j|=1\ j=1, \cdots, i} |B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)^2|}$$

と変形される。ここで $A(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i, 0, \cdots, 0)$ は $G(Z_1, Z_i, 0, \cdots, 0)$ から計算される多項式である。$B(Z_1, Z_2, \cdots, Z_i. 0, \cdots, 0) \neq 0$, $r_k \leqq |Z_k| \leqq R_k(k=1, \cdots, i)$ より積分値の誤差は Z_k に対するきざみを十分に小さくすることにより 0 に収束する。

4. 具　　体　　例

(i) $B(Z_1, Z_2)=1.0+0.5Z_1+0.5Z_2+0.2Z_1Z_2$ のとき簡単な推察により，

$|B(Z_1, Z_2)| \geqq 0.1$, $0.95 \leqq |Z_1| \leqq 1.05$, $0.95 \leqq |Z_2| \leqq 1.05$ が知れる。

ここで上記の考察より Z_2 に対してはサンプル点数が 100, Z_1 に対してはサンプル点数が 10000 で十分な評価が得られることがわかる。数値計算により構造的に安定となる。

(ii) $B(Z_1, Z_2, Z_3)=1.0+0.5Z_1+0.5Z_2+0.1Z_3+0.4Z_1Z_2+0.1Z_2Z_3$ のとき

$|B(Z_1, Z_2, Z_3)| \geqq 0.2$, $0.95 \leqq |Z_1| \leqq 1.05$, $0.95 \leqq |Z_2| \leqq 1.05$, $0.6 \leqq |Z_3| \leqq 1.4$ となり
上記の考察より Z_3 に対してはサンプル点数10, Z_1, Z_2 に対してはサンプル点数10000で十分であることがわかり同様な計算により安定であることがわかる。

(iii) $B(Z_1, Z_2, Z_3)=1.0-0.5Z_1+0.5Z_2+0.1Z_3+0.4Z_1Z_2+0.1Z_2Z_3$ のとき
$Z_1=0.6799538+0.7332551i$, $Z_2=-0.5928557+0.8053087i$ に対して, $|B(Z_1, Z_2, Z_3)| \leqq 0.3$, $1.5 \geqq |Z_3| \geqq 0.5$ となり, Z_3 に対するサンプル点数を1000とすることにより, $\frac{2}{3}\,0.5^{1000}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{1.5^{1000}}$ 以内の誤差で, 積分値が $0.9999421+0.0031262i$ と求まり, このフィルタは不安定であることがわかる。

(iv) $B(Z_1, Z_2, Z_3)=1.0-0.5Z_1+0.5Z_2+0.1Z_3+0.4Z_1Z_2-0.1Z_2Z^2_3$ のとき周回積分の値が0, 1, 2を取り不安定となる。

5. むすび

フルビィッツ的な方法も, 実多変数多項式の正値問題に帰着されるが, かなり多項式のあつかいがやっかいである。本稿においては, 素朴に根軌跡を計算することによって安定性を判別することを提案している。スーパーコンピュータなどが使われる昨今においては, この方法が単純でよりプラクティカルな方法と思える。

文献

1) R. Decarlo, R. Saeks and J. Murray: "A Nyquist-Like Test for the Stability of Two-Dimensional Digital Filters", Proceeding of the IEEE, June 1977, p. 978.
2) H. Cartan (R. Takahashi) "The theory of complex functions", p. 135, 岩波 (1969).
3) 平山：幾徳工業大学研究報告B理工学編第11号(昭和62)。"複素数平面上の数値積分"
4) 高橋, 辻井："N次元ディジタルフィルタの安定性判別と多変数多項式の極値問題", 信学論(A), 57-A, 10, pp. 746-752 (昭49-10)。
5) B.D.O. Anderson and E.I. Jury, "Stability of multidimensional digital filters", IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-21, pp. 300-304, Mar. 1974.
6) S. Takahashi, "Another Proof of Huang's Theorem on Stability of Multi-Dimensional Recursive Digital Filters", "The Trans. of The IECE OF Japan", vol. E67, No. 11 November 1984.