コーシーの積分表示を基礎とした有理関数近似式の誤差解析

平　山　　　弘

Error Estimation of a Rational Approximation of Analytic Functions based on Cauchy's Integral Representation

Hiroshi HIRAYAMA

Abstract

An error estimation in a rational approximation of anaytic functions based on Cauchy's integral representation is given. This approximation methods was proposed by N. Kitahara and H. Yano[1]. They got useful results from numerical calculations. It is shown that these results can be explained by this error estimation.

1. ま え が き

有理関数による関数近似は大変有用で，多くの研究[2~4]が知られている。指数関数 e^x を，$e^{-x}=1/e^x$ の性質を保つように近似することができるなど，有理関数近似には多くの利点が知られている。しかしながら，有理関数の近似理論は一般に非線形であるため，近似式を得るために，非常に多くの計算を必要とする。また，得られた近似式には除算を含むため，計算速度の点で大変不利である。除算は現在の高速コンピュータでは，加減乗算の約5倍程度の計算時間を必要とするためである。このため実際の応用には多項式近似が使われることが多い。

このような中で N. Kitahara and H. Yano[1] は非常に簡単に有理関数近似をつくり出す方法を提案している。この方法によれば高次の有理関数も簡単につくり出す事ができる。これは Cauchy 積分表示を基礎とした関数近似法である。彼らの論文によれば，この方法で作られた有理関数式は非常に精度が良いことが報告されている。その論文の中で，彼らはその有理関数近似式の誤差解析を行っているが，誤差は非常に小さく，その誤差解析では十分には説明出来ない。

本論文では，彼らの有理関数近似法は周回積分を台形公式を利用して計算する方法であることから，第一に周回積分の数値計算の誤差解析を行う。すなわち，Laurant 展開可能な解析関数を半径 r の円周上で標本点を等間隔にとる数値積分公式を利用し数値計算したときの誤差解析を行う。このとき，その誤差は，標本点の数の増加に対して，指数関数的に減少することを示すことができる。この結果は，数値積分法としては，抜群であり，高橋・森[5] の理論によれば，このような公式は最良であることが知られている。

第二に，この誤差解析から，どの様に積分路をとれば最も効率的に計算出来るかを議論する。これから，標本点が十分多いとき，積分路として許される円形の積分路の中で最も小さな半径を持つ円の半径を d とし，その円と同じ中心を持ち積分路として許される円の中で最も大きい半径を持つ円の半径を D としたとき，同じ中心を持ち半径が

$$r=(dD)^{1/2}$$

である円周上で積分するとき，最も効率的に計算出来ることを示す。また，d がいくらでも小さく，または，D がいくらでも大きくとることが出来るならば，非常に効率良く計算する事ができることがわかる。

この結果から，どのように積分路を選んだ時，最も精度のよい近似式が得られるかがわかる。

平成元年10月2日受理

2. 周回積分の誤差評価

2.1 積分路の選び方

周回積分を数値的に評価を行うには，積分路を決めなければならない。積分路をうまく選べば被積分関数は非常に簡単になる場合がある。このような積分路が簡単に分かるならばそれを使うのが最も良い。しかし，一般に，このような積分路は見つけることは出来ないと考えなければならない。このような積分路を見つけることは被積分関数の不定積分を見いだすことに相当するからである。

ここでは，積分路として，円を選ぶことにする。積分路として円を選べない場合でも，適当な変数変換によって，円に変換することが出来る。Jordan 曲線で囲まれた単連結領域は Riemann の写像定理によって円の内部に写像することができるので，原理的には通常考えられるどの様な積分路であってもこの写像を使えば円に変形することが出来る。このような変換を見つけだすにはかなりの計算が必要で，多くの場合，目的の周回積分の値を計算するよりも困難であるため，実際の応用では使われることはないと思われる。実際の応用では複素関数論でよく使われる初等関数による等角写像を使うのが便利である。

多くの問題では，楕円が積分路として許されるならば，積分路をかなり自由にえらぶことが出来る。この場合，Joukowski 変換

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{2.1}$$

を使えば，問題の積分路を円に変形することが出来る。このように考えれば積分路が円であるというのは大きな制約とはならない。

もう一つ問題となるのは積分路の分割方法である。この問題は実軸上の数値積分でもおこる問題でもある。実関数の数値積分と同様に積分区間の分割は変数変換によって，分割を変えることが出来る。したがって，ここでは最も単純な等間隔の分割方法を選ぶことにする。もしある種の分割を行いたいのであれば，それに対応する変数変換を行えば，同じ効果が得られる。

積分路は最も良く使われる次のような角度による媒介変数表示を使うことにする。

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

これは，複素数表示では次のような式

$$z=re^{i\theta} \tag{2.2}$$

となる。複素数領域ではこれを使うのが便利である。この媒介変数 θ に対して等間隔に分割を行い数値積分を行う。

2.2 誤差解析

周回積分 I は解析関数 $f(z)$ を利用して，次のような形で表わされるものとする。

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz \tag{2.3}$$

また，$f(x)$ は原点で Laurent 展開することが出来るものとする。適当な平行移動によって，原点を移動することができるので，展開の位置を原点にすることによって一般性を失うことはない。

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k+\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \tag{2.4}$$

(2.4) の式のように z の非負の次数部分と負の次数部分に分割したのは，以下の議論を容易にするためである。(2.4) の第 2 項の係数 b_1 は，Laurent 展開の公式から (2.3) の積分の値そのものになる。従って，数値計算の誤差は $f(z)$ から b_1/z の項を除いた関数 $g(z)$

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k+\sum_{k=2}^{\infty} b_k z^{-k} \tag{2.5}$$

を数値積分すれば得られることになる。以下でこの計算を著者の前の論文[5]に従って行う。b_1/z の数値計算からも誤差が生ずるように思えるが，この項に (2.2) の変換を行うと容易にわかるように被積分関数は定数になるので，数値的な誤差は生じない。

この (2.5) の式に (2.2) の変換を適用し，台形公式を使って数値積分を行う。このために，まず z^k を N 等分したときの数値積分の値を求める。z^k に台形公式を適用すると

$$S=ihr^{k+1}\sum_{j=1}^{N} e^{i(k+1)hj} \tag{2.6}$$

となる。ここで，$h=2\pi/N$ である。(2.6) は等比級数だから，総和公式を適用すると

$$S=ihr^{k+1}\frac{e^{i(k+1)}\{1-e^{i(k+1)hN}\}}{1-e^{i(k+1)h}} \tag{2.7}$$

となる。$k+1$ が N の倍数である場合，(2.7) の分母の $(k+1)h$ は整数となるため，分母は零となり，この式は

成り立たない。この場合 (2.6) の元の式に戻って計算すると $S=2\pi ir^{k+1}$ であることがわかる。$k+1$ が N の倍数でない場合，(2.7) の分子は hN が常に整数となるため，分子の｛　｝の中が零となるため $S=0$ となる。(2.5) の第1項の式に N 等分の台形公式を適用する。このとき，この部分からの誤差 I_N は

$$I_N=2\pi i\sum_{j=1}^{\infty}a_{jN-1}r^{iN} \qquad (2.8)$$

この式に Laurent 展開の係数を求める公式

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz \qquad (2.9)$$

を適用すると I_N は

$$I_N=\int_c\frac{(r/z)^N f(z)}{1-(r/z)^N}dz \qquad (2.10)$$

となる。標本点数 N が十分に大きいとき，この積分を半径 D の円周上で評価しよう。関数 $f(z)$ のこの円周上での絶対値の最大値を f_D とし，さらに K_N を (2.10) の I_N の絶対値とすると (2.10) は次のように評価される。

$$K_N\leqq\frac{2\pi r(r/D)^N}{1-(r/D)^N}f_D\leqq 4\pi f_D r(r/D)^N \qquad (2.11)$$

(2.11) 式の最後の不等号は N が十分大きくて $(r/D)^N$ が 1/2 より小さいときに成り立つ。(2.11) の式から容易にわかるように K_N を小さくするには，f_D が有限で，N が十分大きいならば，D をできるだけ大きく取れば良いことになる。この D は (2.9) が成り立つような積分路で出来るだけ大きな円の半径となる。これは $f(z)$ の特異点の中で積分路の外側にあり原点に最も近い特異点までの距離となる。もし $f(z)$ が特異点を持たない場合，ここから生じる誤差は D を大きくとることによって，いくらでも小さくすることが出来ることになる。

同様に，(2.5) の第2項に対しても計算を進めることが出来る。ただし，この場合，半径 d の円周上で評価を行い，この円周上での最大値を f_d とする。このときの誤差の絶対値を J_N とすると

$$J_N\leqq 4\pi f_d r(d/r)^N \qquad (2.12)$$

となる。(2.12) の不等号も (2.11) と同様に $(d/r)^N$ が 1/2 より小さいときに成り立つ。J_N を小さくするためには，f_d が有限で，N が十分大きいならば，D とは逆に d をできるだけ小さくとれば良いことになる。原点付近に原点以外の特異点がない場合，d を小さくすればこの部分からの誤差はいくらでも小さくすることが出来る。

積分 I の誤差の絶対値 E_N は $(K_N+J_N)/2\pi$ より小さいから

$$E_N\leqq 2f_D r(r/D)^N+2f_d r(d/r)^N \qquad (2.13)$$

(2.13) の右辺は r の関数で，$d<r<D$ の条件を満たせば，式 (2.13) は常に成り立つ。r を変化させて，(2.13) の左辺の最小値を求めることを考える。f_d, f_D, R, r, N はともに正の数であるから，相加相乗平均の不等式から，

$$E_N\leqq 4(f_d f_D)^{1/2}r(d/D)^N \qquad (2.14)$$

が得られる。(2.13) の右辺と (2.14) の右辺が等しいのは，相加相乗平均の等号が成り立つ条件から，(2.13) の第1項と第2項が等しいときである。このとき，(2.13) の右辺は最小となる。すなわち誤差の限界が最小になる。(2.13) の第1項と第2項が等しいという条件から，r を求めることが出来る。容易にわかるように，N が十分に大きいとき

$$r=(Dd)^{1/2} \qquad (2.15)$$

のとき，誤差の限界が最小になることがわかる。この時の誤差は，(2.15) を (2.13) に代入することによって

$$E_N\leqq 2(f_d+f_D)(Dd)^{1/2}(d/D)^{N/2} \qquad (2.16)$$

となる。

(2.15), (2.16) の結果は標本点数 N が十分に大きい時，積分路の半径をどの様にとれば誤差の限界が最小になり，どの程度の誤差になるかを示している。Laurent 展開の係数を求める周回積分 (2.9) の積分路で最も大きい半径を持つ円とその円と同じ中心を持つ最も小さい半径を持つ円を選ぶ。それぞれの半径を D と d とする。いくらでも大きい半径またはいくらでも小さい半径をとることができる場合には，それぞれ無限大または零になるが，この場合には，適当な大きい数と小さい数で代用するものとする。半径が (2.15) で与えられるとき，誤差の上限は最小になるので，(2.15) によって得られる半径をもつ円周上で積分すれば最も効率良く計算が出来ると期待できる。

(2.16) で

$$\alpha=2(f_d+f_D)(Dd)^{1/2} \qquad (2.17)$$

$$\beta=\frac{N}{2}\log\left(\frac{D}{d}\right) \tag{2.18}$$

と置くと

$$E_N \leqq \alpha e^{-\beta N} \tag{2.19}$$

となる。高橋・森の理論によれば，標本点数に対して指数関数的に誤差が減少する公式は最良であることが知られているので，上記の計算方法は積分の計算方法としては最良な公式の一つとなっている。N が十分に大きい場合には，最良の結果を得ることができると言えるが，具体的に N が 100 程度の数の場合には，この計算方法が最良の結果を与えるかどうかは具体的な α, β の数値等を調べ，検討しなければならない。

3. 有理関数近似

N. Kitahara and H. Yano が提案している方法は，関数 $f(x)$ を Cauchy の積分表示を使い，周回積分に変形し，それを台形公式を使って，この積分を離散化する方法である。次の積分を考える。

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-x}dz \tag{3.1}$$

ここで，積分路は点 x を囲む閉曲線である。(3.1) の式を x の関数と見なし，実軸上の区間 $[a, b]$ で使えるようにするためには，積分路はこの区間を囲む閉曲線でなければならない。以下の議論では簡単化のため，この区間を $[-1, 1]$ に限定する。区間 $[a, b]$ は一次式によって区間 $[-1, 1]$ に容易に変換できることから，この様に限定しても，議論は何等一般性を失うことはない。(3.1) を変換

$$z=re^{i\theta} \tag{3.2}$$

で変数変換を行う。このとき，(3.1) の積分は

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_c \frac{f(z)}{z-x}zd\theta \tag{3.3}$$

となる。台形公式を使って，離散化すると，0 から 2π までの積分は次のようになる。

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{f_j z_j}{z_j-x} \tag{3.4}$$

ここで

$$\theta_j=\frac{2\pi j}{N} \tag{3.5}$$

$$z_j=re^{i\theta_j} \tag{3.6}$$

$$f_j=f(z_j) \tag{3.7}$$

である。(3.4) は f_j, z_j が定数であることから，明らかに，関数 $f(x)$ の有理関数近似式を表わす。前の議論から，(3.4) の誤差評価は，(2.13) で表わされることが分かる。(2.13) の誤差は，N が大きくなると，第1項と第2項が等しい場合には，(2.16) のような結果となり指数関数的に減少する。等しくない場合には第1項か第2項のどちらか一方が相対的に大きくなる。この場合にも (2.13) の式から容易にわかるように指数関数的に誤差が減少する。r を (2.15) のように選ぶと，誤差は (2.16) のようになる。この時の d は，原点から x までの距雑となる。D は原点から最も近い，$f(x)$ の特異点までの距離となる。

彼らの数値実験によると，標本点数 N を大きくすると誤差は指数関数的に減少することが読み取れる。これは，(2.16) の結果から当然の結果である。また，関数

$$f(x)=\tan^{-1}x \tag{3.8}$$

の区間 $[-1, 1]$ での近似では，$\tan^{-1}x$ が $\pm i$ が特異点であるため，このままでは，積分路を円にすることは出来ない。このような場合，(2.1) で表わされる Jukowski 変換が便利である。この変換を行うと特異点は $\pm(1+2^{1/2})i$ に変換される。このとき，Jukowski 変換のため区間 $[-1, 1]$ の全体が特異点となるため，$d=1$ となる。最も近い特異点は，$\pm(1+2^{1/2})i$ なので，$D=1+2^{1/2}$ となる。(2.15) によって，最もよい近似式が得られる積分路の半径が求められる。

$$r=(1+2^{1/2})^{1/2}=1.55377 \tag{3.9}$$

N. Kitahara and H. Yano の数値実験の結果では，$r=1.6$ のとき大変良い近似式であると結論している。これは，(3.9) の結果と全く同じ結果である。

誤差評価 (2.16) の結果は，N. Kitahara and H. Yano の誤差評価

$$\text{Error} \leqq \frac{2\pi^3}{3N^2}M \tag{3.8}$$

（ここで，M は定数，N は上の式と同じ標本点数である。）と比較して，数値実験の結果を多く説明できる点でよい結果である。

4. 結　　論

複素平面上の周回積分の台形公式による数値積分の誤差評価を行った。この結果から，Cauchy の積分表示から得られる，有理関数近似式の誤差評価が得られる。これによれば，この有理関数近似式は，次数を上げると誤差は指数関数的に減少することがわかった。この誤差評価は，通常の Taylor 展開と同じように誤差が指数関数的に減少することを示している。また，精度の良い有理関数近似式を得るための離散化方法も示した。このように，単純な計算法によって得られた有理関数近似式が，非常に精度が良いことは，有理関数近似式の利用に拍車がかかるものと思われる。

参 考 文 献

1）N. Kitahara and H. Yano : An Approximation of Real Anaytic Function Based on Cauchy's Integral Representation, Information Processing Society of Japan, Vol. 4, No. 2, 1981

2）山内，森口，一松：数値計算法 I, 培風館（1965）

3）山内，森口，一松：数値計算法 II, 培風館（1967）

4）H.L. Garabedian : Approximation of Function, Elsevier Publishing Company (1964)

5）H. Takahashi, M. Mori : Error Estimation in the Numerical Integretion of Analytic Function, Rep. Compt. Centre. Univ. Tokyo, 3 (1970) pp. 41-108

6）平山　弘：複素平面上の数値積分，幾徳工業大学紀要 B 理工学編，11（1987）pp. 67-73