

境界要素法による翼まわりの ポテンシャル流れの解析

石 綿 良 三*・川 口 隆 史*

Numerical Analysis for Potential Flow around an
Aerofoil by Boundary Element Method

Ryozo ISHIWATA and Takashi KAWAGUCHI

Abstract

It is important to analyze the potential flow field around an aerofoil in order to estimate its characteristics. So it has numerically analyzed by means of the Boundary Element Method in this study. A body with a circulation as an aerofoil has a difference of velocity potential values generated by making a round of it. Therefore the control surface for analysis has to be cut from the body to the point at infinity by slit where the potential difference exists on both sides. The boundary integrations on slit and infinity being analytically calculated, the number of the unknowns is reduced. We have only the velocity potential values on body as unknowns. The Kutta condition at the trailing edge is linked with a simultaneous system of linear equations led from the ordinary Boundary Element Method, and could be solved by any conventional algorithm.

This method was applied for a rotating cylinder and a Joukowski wing section, and the results were proved to have a reasonable coincidence with the exact solutions. This method is effective and convenient to a prediction of characteristics of aerofoils.

1. 緒 言

翼まわりの流れを解析することは航空工学をはじめとして流体機械などに至るまで応用範囲が広い。大きな離れを伴わない場合、ポテンシャル流れによる解析によって翼性能の予測が可能になる。さらに高精度の予測を必要とする場合にも、境界層計算によって流れの解析が行われるが、その前段階としてポテンシャル流れによる解析が必要である。

翼まわりのポテンシャル流れを解析するには、等角写像法、差分法、有限要素法、特異点解法、境界要素法など様々な方法がある。境界形状の任意性と未知数の個数などの点から考えると、境界積分法の一つである特異点解法（特に分布渦による方法¹⁾）や本研究で用いた境界要素法が翼性能の予測に適しているものと思

われる。

本研究では、速度ポテンシャルを未知数として線形要素を用いた。翼まわりには循環ができるため要素分割に際してはポテンシャル・ジャンプを与えなければならない。また無限遠における境界積分についても工夫をし、翼面上の速度ポテンシャルだけが未知数となるようにした。このようにして、分布渦による特異点解法と同程度の簡便さを得ることができた。また、有限要素法と組み合わせて使うことも可能である。

2. おもな記号

C_p : 圧力係数 (式 (34))

i : 虚数単位 ($=\sqrt{-1}$)

L : 翼弦長

n : 境界における外向き法線方向座標

p : 圧力

平成3年9月28日受理

* 機械システム工学科

q : 境界における法線方向速度成分 $\left(= \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)$

q^* : 重み関数 ϕ^* の法線方向微分 $\left(= \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right)$

r : 点 i からの距離

s : 境界に沿う座標

U : 一様流の流速

V : 物体表面上の流速

v_s : 境界における接線方向速度成分 $\left(= \frac{\partial \phi}{\partial s} \right)$

W : 複素ポテンシャル

x_i : 集中負荷を与える点 i の x 座標

y_i : 集中負荷を与える点 i の y 座標

z : 複素座標 $(=x+iy)$

α : 一様流の迎え角

β_i : スリットと物体表面の交点から点 i に引いた線分と x 軸のなす角 (Fig. 4)

Γ : 循環 (時計まわりを正とする)

ϕ : 速度ポテンシャル

ϕ^* : 重み関数

ρ : 流体の密度

3. 理 論

3.1 ポテンシャル・ジャンプと解析領域

流れは2次元ポテンシャル流れであり, Fig. 1 のように一様流中に単独翼が置かれているものとする。翼を囲む任意の閉曲線に沿う方向の周回積分は次のようになる。

$$\oint v_s ds = -\Gamma \quad (1)$$

ここで, Γ は翼まわりの循環を表し, これによって翼は揚力を発生する。式 (1) を速度ポテンシャル ϕ で表

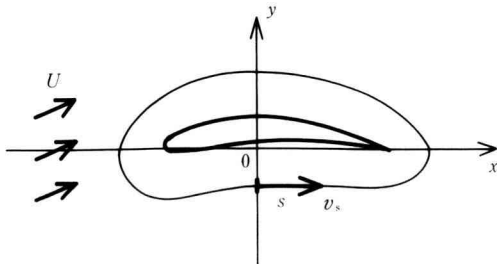


Fig. 1. Uniform flow around an aerofoil.

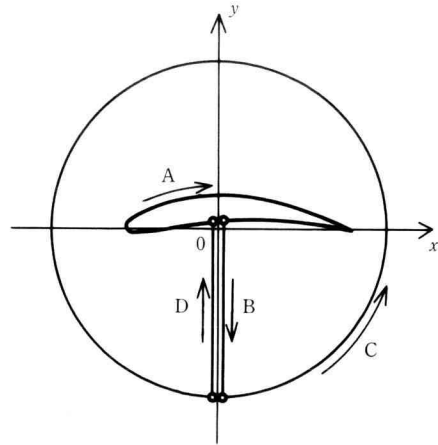


Fig. 2. Control surface for a body with circulation.

すと,

$$\oint \frac{\partial \phi}{\partial s} ds = \oint d\phi = -\Gamma \quad (2)$$

となり, 反時計まわりに一周すると速度ポテンシャル ϕ は Γ だけ小さくなることがわかる。したがって, ϕ を未知数として解析するためには Fig. 2 のようにスリットのある領域を検査領域とする必要がある。スリットの幅は限りなく狭いものとする。便宜上, 解析境界を四つに分け, 物体表面上を A, スリットの右側を B, 外周を C, スリットの左側を D とする。境界 B と D 上では Γ の分だけポテンシャルに差 (ポテンシャル・ジャンプ) を生じ, 次の関係が成り立つ。

$$\phi_B = \phi_D + \Gamma \quad (3)$$

ここでは, スリットが y 軸上になるように座標を定め, 外周境界は原点を中心とする半径 R の円周とし, $R \rightarrow \infty$ のときの極限を考えるものとする。

3.2 境界要素法の適用

Fig. 2 の領域に境界要素法を適用するが, 境界要素法によるポテンシャル解析は文献 2), 3) をはじめ多くの文献に記述されている。いま, 解析領域を Ω とすれば, 領域内で次式が成り立つ。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

これに重み関数 ϕ^* を導入し, 重み付き残差法を適用すると,

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi) \phi^* d\Omega = 0 \quad (5)$$

これを2回部分積分すると,

$$\int_{\Omega} \phi (\nabla^2 \phi^*) d\Omega = - \int_{\Omega} q \phi^* ds + \int_{\Omega} \phi q^* ds \quad (6)$$

ただし, 式(6)の右辺の積分は境界上の周回積分を意味している。ここで, 重み関数 ϕ^* にラプラス方程式の基本解を選ぶことにする。ある点 i に一つの集中負荷が作用しているときの基本解は,

$$\phi^* = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \quad (7)$$

ここで, r は点 i からの距離を表している。式(7)を式(6)に代入し, 整理すると,

$$c_i \phi_i + \int q \phi^* ds = \int q \phi^* ds \quad (8)$$

定数 c_i は点 i が領域内点の場合 1, 境界上の場合領域のなす角を 2π で除した値 (なめらかな境界上のとき 1/2, 直角のとき 1/4) である。

3.3 無限遠における積分

式(8)の境界上の積分のうち, 無限遠の外周境界 C 上の積分を考える。無限遠では迎え角 α , 流速 U の一様流で翼まわりの循環を Γ とすれば, 無限遠における複素ポテンシャル W は次式で表される。

$$W = Ue^{-i\alpha}z + i\frac{\Gamma}{2\pi} \log z + \text{const.} \quad (9)$$

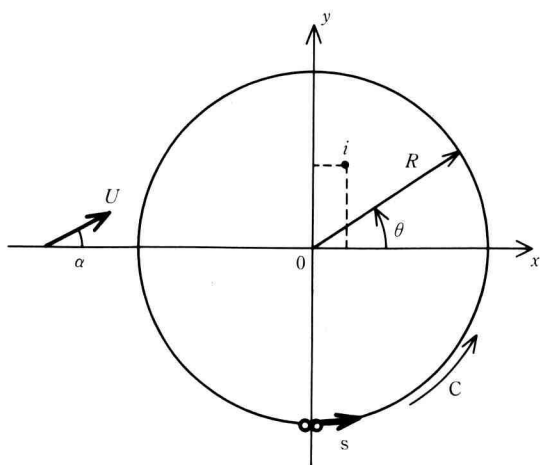


Fig. 3. Integrating path on infinite far.

積分経路は $z = Re^{i\theta}$ で, R は無限大, θ は $-\pi/2$ から $3\pi/2$ までである (Fig. 3)。したがって, 外周上では,

$$W = URe^{i(\theta-\alpha)} + i\frac{\Gamma}{2\pi}(\log R + i\theta) + \text{const.} \quad (10)$$

式(10)の実数部は速度ポテンシャル ϕ となる。 $\theta = 3\pi/2$ のときに $\phi = -UR \sin \alpha$ となるように定数を定めると,

$$\phi = UR \cos(\theta - \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\theta - \frac{3}{2}\pi \right) \quad (11)$$

法線方向速度 q は, 式(11)を R で偏微分することによって次のように求められる。

$$q = U \cos(\theta - \alpha) \quad (12)$$

原点付近にある点 $i(x_i, y_i)$ に集中負荷を作用させるときの基本解は式(7)で表される。ただし, 点 i からの距離 r は次のようになる。

$$r = \sqrt{(R \cos \theta - x_i)^2 + (R \sin \theta - y_i)^2} \quad (13)$$

式(7)の ϕ^* の外周境界上における法線方向微分値は,

$$\begin{aligned} q^* &= \frac{\partial \phi^*}{\partial R} \\ &= \frac{-R + x_i \cos \theta + y_i \sin \theta}{2\pi \{(R \cos \theta - x_i)^2 + (R \sin \theta - y_i)^2\}} \end{aligned} \quad (14)$$

式(8)左辺第2項の積分を外周上のみで行うと, 式(11), (14)を用い,

$$\begin{aligned} \int_C \phi q^* ds &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \phi q^* R d\theta \\ &= -\frac{U}{2} (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) - \frac{\Gamma}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

一方, 式(8)右辺の積分は式(7), (12), (13)を用い,

$$\begin{aligned} \int_C q \phi^* ds &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} q \phi^* R d\theta \\ &= \frac{U}{2} (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) \end{aligned} \quad (16)$$

3.4 スリット上の積分

式(8)のスリット境界上の積分を考える (Fig. 4)。点 $i(x_i, y_i)$ は物体表面上にあるものとする。スリット上では対応する点どうして式(3)および次の関係式が成り立つ。

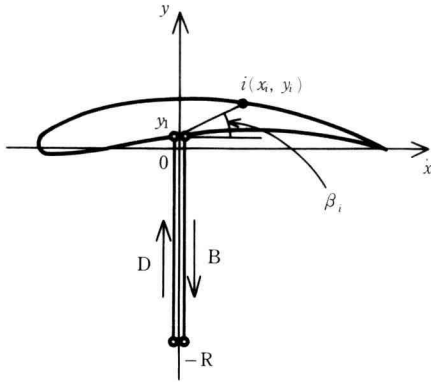


Fig. 4. Integrating paths on slit.

$$q_B = -q_D \quad (17.a)$$

$$\phi_B^* = \phi_D^* \quad (17.b)$$

$$q_B^* = -q_D^* \quad (17.c)$$

したがって、式(8)左辺第2項は、

$$\int_B \phi q^* ds + \int_D \phi q^* ds = -\Gamma \int_D q^* ds \quad (18)$$

一方、式(8)右辺は次のようになる。

$$\int_B q \phi^* ds + \int_D q \phi^* ds = 0 \quad (19)$$

いま、スリット上の点を (x, y) とすると、基本解は次式となる。

$$\phi^* = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} = -\frac{1}{4\pi} \log \{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\} \quad (20)$$

境界 D 上を点 (x, y) が動くとき、

$$q^* = \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{x_i}{2\pi \{x_i^2 + (y-y_i)^2\}} \quad (21)$$

式(21)を式(18)に代入し、積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_B \phi q^* ds + \int_D \phi q^* ds \\ = -\Gamma \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x_i}{2\pi} \int_{-R}^{y_i} \frac{dy}{x_i^2 + (y-y_i)^2} \right] \\ = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\beta_i - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 y_i はスリットと物体表面との交点の y 座標、 β_i はその交点と点 i を結ぶ線分と x 軸とのなす角 (Fig. 4) である。

3.5 積分の合成と定式化

式(8)に式(15), (16), (19), (22)を代入し、さらに物体表面上で法線方向速度 q が0であることから次式が導かれる。

$$\begin{aligned} c_i \phi_i + \int_A \phi q^* ds = U(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) \\ + \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - \beta_i \right) \end{aligned} \quad (23)$$

以上により、式(8)における境界上の積分は物体表面上の積分だけに行うことができた。したがって物体表面上の速度ポテンシャル ϕ だけを未知数として解析できることになる。

そこで、Fig. 5 のように物体まわりを N 分割し、節点1でポテンシャル・ジャンプを与えることにする。つまり、節点 $(N+1)$ を想定(実際には未知数には含めない)し、

$$\phi_{N+1} = \phi_1 + \Gamma \quad (24)$$

と考える。

解析にあたっては線形要素を用いることにする。式(23)の積分を節点における速度ポテンシャル ϕ_j で離散化すると^{2,3)}の次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N H_{ij} \phi_j = U(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) \\ + \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - \beta_i \right) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、

$$H_{ij} \equiv h_{ij}^{(1)} + h_{ij}^{(2)} + \delta_{ij} c_i \quad (26.a)$$

$$h_{ij}^{(1)} \equiv \frac{l_j}{4\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi_j) \log \frac{1}{r} d\xi_j \quad (26.b)$$

$$h_{ij}^{(2)} \equiv \frac{l_j}{4\pi} \int_{-1}^1 (1 + \xi_j) \log \frac{1}{r} d\xi_j \quad (26.c)$$

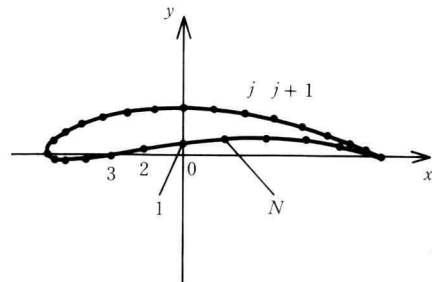


Fig. 5. Boundary elements for an aerofoil.

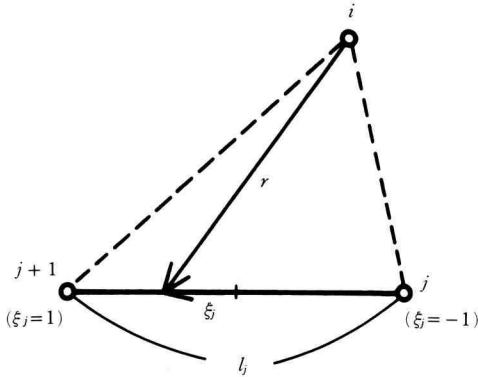


Fig. 6. Integration along a boundary element.

ただし, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ, r は点 i からの距離, l_j は節点 j と節点 $(j+1)$ の距離, ξ_j はその2点間の無次元座標であり, $\xi_j = -1$ のとき節点 j , $\xi_j = 1$ のとき節点 $(j+1)$ となる (Fig. 6). 節点 1 と節点 $(N+1)$ は同じ座標であるので式 (25) における $H_{i1}\phi_1$ は式 (24) より次のように考える。

$$\begin{aligned} H_{ij}\phi_j &= (h_{i1}^{(1)} + \delta_{i1}C_1)\phi_1 \\ &+ (h_{iN}^{(2)} + \delta_{iN}C_{N+1})\phi_{N+1} \\ &= \{h_{i1}^{(1)} + h_{iN}^{(2)} + \delta_{i1}(C_1 + C_{N+1})\}\phi_1 \\ &+ (h_{iN}^{(2)} + \delta_{iN}C_{N+1})\Gamma \end{aligned} \quad (27)$$

ここで, H_{i1} を改めて次のように定義する。

$$H_{i1} \equiv h_{i1}^{(1)} + h_{iN}^{(2)} + \delta_{i1}(C_1 + C_{N+1}) \quad (28)$$

このようにすると式 (25) は次のように修正される。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N H_{ij}\phi_j &= U(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) \\ &+ \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - \beta_i \right) - (h_{iN}^{(2)} + \delta_{iN}C_{N+1})\Gamma \end{aligned} \quad (29)$$

以上により, 物体表面上の速度ポテンシャル ϕ_j だけを未知数とし, 未知数の削減を図ることができた。一樣流の流速 U , 迎え角 α , 物体まわりの循環 Γ が与えられれば, 式 (29) を解くことができる。なお, 対角成分 H_{ii} は全境界 (外周およびスリット上も含める) で H_{ij} の総和をとると 0 になることから^{2,3)}, 次式から計算した。

$$H_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N H_{ij} \quad (30)$$

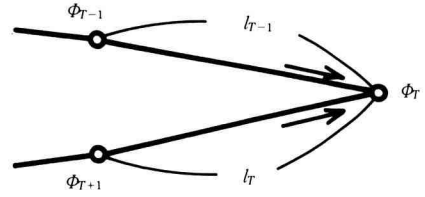


Fig. 7. The Kutta condition at a trailing edge.

3.6 クッタの条件

循環 Γ は一般には未知数であり, クッタの条件より求められる。「翼の後縁がよどみ点になる」ことがクッタの条件であるが, 翼の後縁角が 0 の場合には厳密な意味でのよどみ点にはならない。そこで通常はクッタの条件の物理的意味を考え, 「後縁からなめらかに流れ去る」ということを条件とする。これは言い換えれば, 翼の後縁において背面と腹面の流速が等しいということであり, 近似的に次式で表される。

$$\frac{\phi_T - \phi_{T-1}}{l_{T-1}} = \frac{\phi_T - \phi_{T+1}}{l_T} \quad (31)$$

ここで, ϕ_T は後縁, ϕ_{T-1} と ϕ_{T+1} はその前後における速度ポテンシャル, l_{T-1} と l_T は節点間の距離 (Fig. 7) である。式 (31) を整理すると,

$$-\phi_{T-1} + \left(1 - \frac{l_{T-1}}{l_T}\right)\phi_T + \frac{l_{T-1}}{l_T}\phi_{T+1} = 0 \quad (32)$$

数値解析では式 (29) における Γ を $(N+1)$ 番目の未知数とし, $(N+1)$ 番目の式として式 (32) を加えた。式 (29), (32) は次のようになる。

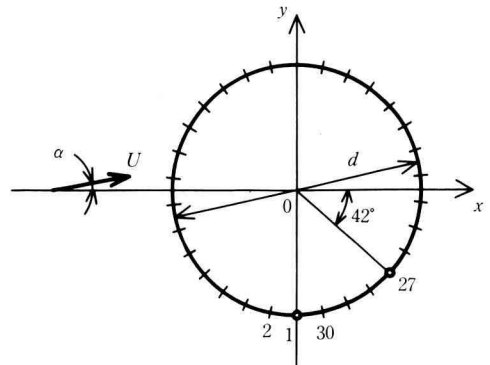


Fig. 8. Uniform flow around a rotating Cylinder.

$$\sum_{j=1}^{N+1} H_{ij} \phi_j = U(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) \quad (33)$$

ここで,

$$\phi_{N+1} \equiv \Gamma$$

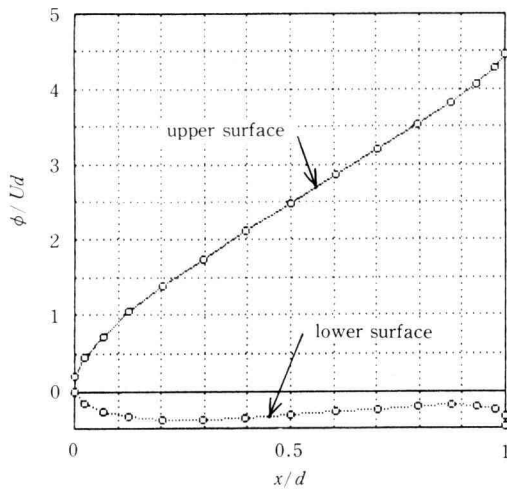
$$H_{i,N+1} \equiv \frac{1}{2\pi} \beta_i - \frac{3}{4} + h_{iN}^{(2)} + \delta_{i1} c_{N+1} \\ (i=1 \sim N)$$

$$H_{N+1,T-1} = -1$$

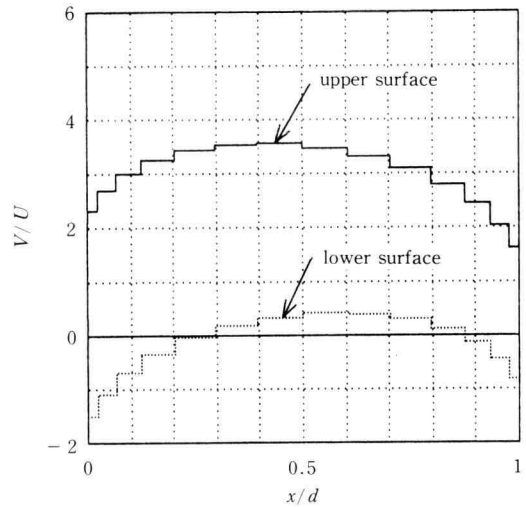
$$H_{N+1,T} = 1 - \frac{l_{T-1}}{l_T}$$

$$H_{N+1,T+1} = \frac{l_{T-1}}{l_T}$$

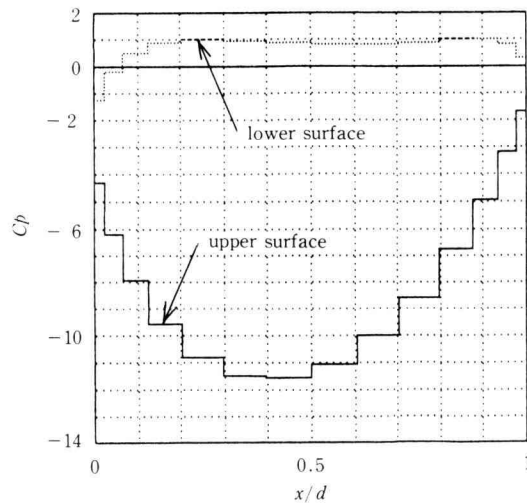
ただし、上記以外の $H_{N+1,j}$ は 0、右辺の $(N+1)$ 成分も 0 である。式 (33) を解くことによって、物体表面の速度ポテンシャル分布 ϕ_j 、および循環 Γ が求められ



(a) velocity potential distribution



(b) velocity distribution



(c) pressure distribution

Fig. 9. Potential flow around a rotating cylinder.

る。なお、境界条件は物体表面上すべての節点で自然境界条件 $q_n=0$ を与えていることになる。基本境界条件は、式 (11) を導く過程で定数を定めているので別に規定する必要はない。

4. 計 算 例

まず本方法の信頼性を確認するため、Fig. 8 に示す回転円柱まわりの流れを計算した。円柱表面を 30 等分

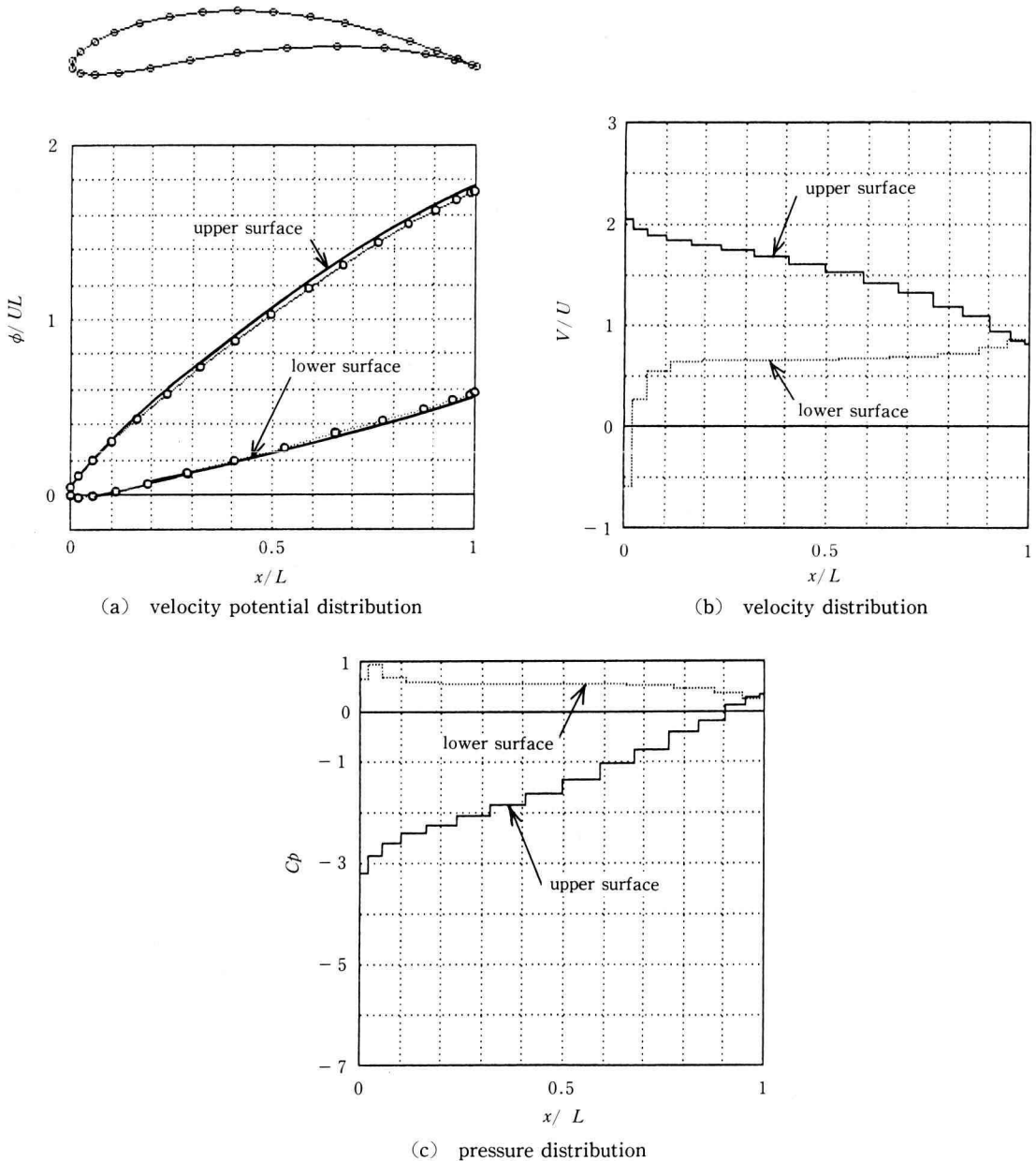


Fig. 10. Potential flow around a Joukowski wing section.
($\xi_0/c = -0.1$, $\eta_0/c = 0.2$, $\alpha = 10^\circ$)

し、節点 27 (x 軸から時計まわりに 42° の点) でクッタの条件を適用し、迎え角を $\alpha = 10^\circ$ とした。結果を Fig. 9 に示す。(a) は速度ポテンシャル分布、(b) は速度分布、(c) は次式で定義される圧力係数の分布を示している。

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \left(\frac{V}{U} \right)^2 \quad (34)$$

ここで、 p_∞ は無限遠点における圧力、 p は物体表面における圧力、 V はその点の流速である。計算で求められた循環は $\Gamma/Ud = 4.896$ 、これに対して厳密解は 4.951 であり、 -1.1% の誤差となり、信頼性が確認された。なお、速度ポテンシャル分布の厳密解は Fig. 9(a) の数値解の曲線によく一致しているので図示は省略した。

次にジューコフスキー翼形まわりの流れに対する計算例を示す。翼形のパラメータは、 $\xi_0/c = -0.1$ 、 $\eta_0/c = 0.2^{41)}$ とした。迎え角は $\alpha = 10^\circ$ 、翼表面上を 30 分割とした。結果を Fig. 10 に示す。求められた循環は $\Gamma/UL = 1.15$ であり、厳密解 ($\Gamma/UL = 1.21$) に対して -5.0% の誤差となった。この主な原因は後縁での翼厚が 0 と

いう特異性によるものと思われる。Fig. 10(a) は速度ポテンシャル分布を表し、太い実線は厳密解であり、妥当な結果が得られていることがわかる。

5. 結 言

循環を持つ物体まわりの流れを境界要素法で解析した。ポテンシャル・ジャンプの与え方、無限遠における外周積分の処理方法を示し、物体表面上の速度ポテンシャルだけを未知数とすることに成功した。本方法は翼性能の予測などに効果的である。

文 献

- 1) 例えば、水野、工学院大学研究報告、第 51 号 (1981), p. 31.
- 2) Brebbia, C., A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press Limited, (1978).
- 3) 神谷・田中・田中共訳、境界要素法入門、培風館、(1980)、2) の和訳、
- 4) 例えば、石綿、ターボ機械、第 19 巻第 1 号 (1991-1), p. 52.