ブール加法形式の不変量について

巽　久行*・荒木　智行**・向殿　政男**・木澤　誠*

On Invariants of Boolean Disjunctive Form

Hisayuki TATSUMI*, Tomoyuki ARAKI**, Masao MUKAIDONO**
and Makoto KIZAWA*

Abstract

A group of logic forms, called Boolean disjunctive forms for a binary logic function, is defined, and the enumerating problem of its number has been studied. It is known that the number of them is finite, but enumerating them exactly is very difficult. Because this enumeration is essentially identical to enumerating elements of a certain kind of distributive lattice.

In this paper, the NP-equivalence classes in binary logic functions are adopted as the objects of enumeration. These classes are made up by regarding two classes as the equivalent classes when they have only different Negation or Permutation from each other in terms of the variables. This paper describes NP-equivalence classes on Boolean disjunctive forms and give a set of invariants to enumerate easily Boolean disjunctive forms under these classes.

1. まえがき

2値論理関数は，通常ブール式(論理式またはブール多項式とも呼ばれる）により表現されている。ブール式は一般に加法形式（加法標準形または論理和形とも呼ばれる）に展開されて使用される場合が多い。ある2値論理関数を表現するブール加法形式の数は，有限であるが一般に数多く存在する。2値論理関数を表現するブール加法形式の数を求める問題[1]は，fuzzy論理関数の数え上げ問題[2,3]，正則3値論理関数の数え上げ問題[4]，および3値多数決関数の数え上げ問題[5]の他に，最近活発に研究されているKleene-Stone論理関数の数え上げ問題[6]，多値Kleene関数の数え上げ問題[7]等の，多値論理関数の数え上げ問題の基礎となる点からも重要である。ブール加法形式の数え上げはある有限分配束の元の数を求める問題に帰着されるが，この問題は極めて困難であることが知られており[8]，数え上げのための良いアルゴリズムは今のところ，見出されていない。本論文では，文献［1］で与えたブール加法形式の数を数え上げるために有効な同値類の分類を整理補足し，省略されていた不変量の証明を示す。この不変量により，ブール加法形式の数を求める際に使われていたNP同値類よりも，類の数が少ない同値類で数え上げることができる。

1992年10月1日受理
* 情報工学科
** 明治大学

2. 諸性質

本節では，ブール加法形式の定義とその諸性質を示す。これらは既に著者らが報告している文献［1］の記述と重複するが，必要最小限にとどめてその概要を列挙する。

各変数 $x_i(i=1, \cdots, n)$ と論理演算AND(・),OR(∨)およびNOT(－)との結合で表現される論理式を，ブール式という。変数 x_i は $\{0, 1\}$ の値を取るので，ブール式は

$$f: B^n \rightarrow B \quad \text{但し } B=\{0, 1\}$$

なるある2値論理関数 f を表現している。また，変数 x_i とその否定 $\bar{x}_i$ を文字（リテラル）といい，幾つかの文字をある変数について肯定，否定とが同時に現れないように論理積（AND）で結合した論理式を積項とい

う。便宜上，変数が1つも存在しないものも1つの積項（これを1と記す）とする。α_i, α_j（但し $i \neq j$）を2つの積項とするとき，

$$\alpha_i \subseteq \alpha_j \Leftrightarrow \alpha_j \text{ の文字はすべて } \alpha_i \text{ に現れる}$$

で積項同志の包含関係が定義される。これより，n 変数のすべての積項からなる集合（これを $\boldsymbol{\Phi}_n$ と記す）は，包含関係⊆に関して半順序集合を成している。

2値論理関数 f が積項の論理和（OR）から構成されるブール式で表現されているとき，ブール式とそれが表現する2値論理関数とを同一視して，以降 $f=\alpha_1 \vee \cdots\cdots \vee \alpha_m$ と記すことにする。

[定義 2.1]

ブール式 $f=\alpha_1 \vee \cdots\cdots \vee \alpha_m$ において，

$$\forall i, j \text{（但し } i \neq j\text{）}; \ \alpha_i \subsetneqq \alpha_j$$

なるとき，特に f はブール加法形式で表現されているという。但し，積項が1つも存在しないものも1つのブール加法形式（これを0と記す）とする。

任意の2値論理関数 f に対して，それを表現し得るブール加法形式の数は有限であるが，一般に複数個存在する。今，$V=\{0, 1/2, 1\}$ として，V に次のような半順序関係≼を定義する。

[定義 2.2]

a, b を V の元とするとき，

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \leq b \leq 1/2 \text{ または } 1/2 \leq b \leq a$$

この関係を次のようにして，V の n 個の直積 V^n にまで拡張定義する。

[定義 2.3]

$\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, \cdots, b_n)$ を V^n の元とするとき，

$$\boldsymbol{a} \preccurlyeq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \forall i; \ a_i \preccurlyeq b_i$$

これより集合 V^n は，半順序関係≼に関して半順序集合を成す。ここで V^n と積項の集合 $\boldsymbol{\Phi}_n$ との間に，次のような1対1対応が存在する。

[定義 2.4]

$\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_n) \in V^n$ と，$\alpha=x_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n} \in \boldsymbol{\Phi}_n$ とは，次のとき互いに対応している。

$$\begin{aligned} a_i=1 &\quad \Leftrightarrow \quad x_i^{a_i}=x_i \\ a_i=0 &\quad \Leftrightarrow \quad x_i^{a_i}=\bar{x}_i \\ a_i=1/2 &\quad \Leftrightarrow \quad x_i^{a_i}=1 \end{aligned}$$

この対応により，積項についての命題はすべて半順序集合 V^n の元についての命題として解釈出来る。

[定義 2.5]

半順序集合 V^n の任意の元 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が互いに比較不可能なとき，即ち

$$\forall i, j \text{（但し } i \neq j\text{）}; \ \boldsymbol{a}_i \not\preccurlyeq \boldsymbol{a}_j$$

なるとき，集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は V^n における反鎖であるという。但し，空集合も1つの反鎖とする。

ある2値論理関数 f が包含する積項を，f の内項という。f のすべての内項に対応する V^n の元からなる集合を，$V^n(f)$ で記すことにする。$V^n(f)$ は，半順序関係≼に関して半順序集合をなし，その極大元は f の主項に対応する元に等しい。$V^n(f)$ は，その極大元の集合（これを $\partial V^n(f)$ と記す）により一意的に定まる。V^n のうち，1/2 の個数が k 個のものから成る集合を，V_k^n とする。特に $V_0^n=B^n$ である。$V_k^n(f)$ の元についても同様に定義する。また，V^n の任意の元 $\boldsymbol{a}$ に現れるすべての 1/2 を，0または1で置き換えて得られる B^n の元からなる集合を，$\boldsymbol{a}^*$ で記す。即ち，$\boldsymbol{a}^*=\{\boldsymbol{b} \in B^n \mid \boldsymbol{b} \preccurlyeq \boldsymbol{a} \in V^n\}$ である。

[定理 2.1]

ある2値論理関数 f を表現するブール加法形式と，

$$\boldsymbol{a}_1{}^* \cup \cdots\cdots \cup \boldsymbol{a}_m{}^* = V_0^n(f)$$

を満たす $V^n(f)$ の反鎖 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ とは1対1に対応する。

（証明）

$\alpha_1 \vee \cdots\cdots \vee \alpha_m$ を，f を表現する n 変数の1つのブール加法形式とする。$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ に対応する $V^n(f)$ の元を各々 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ とすると，$\alpha_i \subsetneqq \alpha_j$ より $\boldsymbol{a}_i \not\preccurlyeq \boldsymbol{a}_j$ となるので，集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は $V^n(f)$ の1つの反鎖である。さらにこの反鎖に対して集合 $\{\boldsymbol{a}_1{}^*, \cdots, \boldsymbol{a}_m{}^*\}$ は一意に定まり，f を表現している。逆も同様である。

（証明終）

以上により，ある2値論理関数 f を表現するブール加法形式の数を求める問題は，$V^n(f)$ の反鎖 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ のうち，それらが包含する V_0^n の元の集合が，$V_0^n(f)=\{\boldsymbol{b} \in B^n \mid f(\boldsymbol{b})=1\}$ と一致するものを求める問題に帰着された。さらに，$V^n(f)$ のうち，V_0^n の元からなる集合を無視した半順序集合を $V_{\bar{0}}^n(f)$ とすると，$V^n(f)$ と $V_{\bar{0}}^n(f)$ との対応は1対1であるから，この問題は次のように若干改良できる。

[定理 2.2]

ある 2 値論理関数 f を表現するブール加法形式の数は，半順序集合 $V_o^n(f)$ に存在する反鎖の数に等しい。

（証明略）

以上の議論より，ある 2 値論理関数を表現するブール加法形式の数を数え上げる問題は半順序集合の反鎖の数を数え上げる問題に帰着されたが，半順序集合の反鎖に関して次の定理が知られている[8]。

[定理 2.3]

半順序集合から得られる反鎖の集合は，集合演算 $\cup$ および $\cap$ に関して有限分配束を成す。

（証明略）

これよりブール加法形式の数を求める問題は，有限分配束の元の数を求める問題に等しい。一般に有限分配束の元の数を求める問題は Dedekind 問題（単調 2 値論理関数の数え上げ問題）等に見られるように，極めて困難であることが知られている[8]。

n 変数のすべてのブール加法形式の数を求めるには，ある 2 値論埋関数 f を表現するブール加法形式の数（以下，$|BD(f)|$ と記す）を求める方法を，すべての 2 値論理関数 2^{2^n} に対して適用すればよい。しかしながら次の定理により，数え上げは 2 値論理関数全体の集合の中で，変数の否定（Negation）および変数の置換（Permutation）に対して異なる関数のみを取り扱えばよい。

[定理 2.4]

2 値論理関数 f を表現するブール加法形式の数 $|BD(f)|$ は，変数の否定および変数の置換に関して不変である。

（証明）

f が包含する積項に対応する半順序集合 $V^n(f)$ は，変数の否定および変数の置換に対して同型である。よって，この半順序集合から作られる $V_o^n(f)$ の反鎖の数は等しい。（証明終）

この定理により，2 値論理関数の集合を変数の否定および変数の置換に関する同値類（これを NP 同値類と呼ぶ）に分類して，各同値類の代表関数に対してのみ，それを表現するブール加法形式の数を数え上げればよい。しかしながらブール加法形式の数のみを問題にする場合には，半順序集合 $V_o^n(f)$ 上の NP 同型（以下便宜的に，$\simeq_{NP}$ と記す）は条件として強すぎる。そこで以下のように考えて，数え上げの対象となる NP 同値類を減少させる。

定理 2.2 より，ブール加法形式の数 $|BD(f)|$ は，半順序集合 $V_o^n(f)$ により一意に定まる。さらに $V_o^n(f)$ はその極大元により一意に定まるが，その極大元の集合 $\partial V_o^n(f)$ は，

$$\partial V_o^n(f) = \partial V_{0,1}^n(f) \cup \partial V_1^n(f)$$

により，一意に分割される。ここで，$\partial V_{0,1}^n(f)$ および $\partial V_1^n(f)$ は，それぞれ要素 1/2 が 2 個以上および 1 つのみからなる $V^n(f)$ の極大元を示す。そこで 2 値論理関数 f を，存在する項がすべて主項で，その主項の文字数が n-2 個以下からなる 2 値論理関数を $f_{\overline{0,1}}$ および n-1 個のみからなる 2 値論理関数を f_1 で表現すれば，以下の式で計算できる。

[定理 2.5]

$$|BD(f)| = |BD(f_{\overline{0,1}})| \times 2^{|f_1|}$$

但し，$|f_1|$ は f_1 の主項の数を表わす。

（証明）

$\partial V_{0,1}^n(f) \cap \partial V_1^n(f)$ は空集合より，$\partial V_o^n(f)$ から定まる半順序集合 $V_o^n(f)$ の反鎖は，$\partial V_{0,1}^n(f)$ から定まる半順序集合 $V_{0,1}^n(f)$ の反鎖に対して，$\partial V_1^n(f)$ の反鎖を加えるか否かの 2 通りである。ここで $\partial V_1^n(f)$ は，その部分集合がすべて反鎖であるから定理が成立する。（証明終）

この定理により，2 値論理関数 $f_{\overline{0,1}}$ のみからなる半順序集合 $V_{0,1}^n(f_{\overline{0,1}})$ 上の NP 同値類を作成して，その NP 同値類の代表関数に対する反鎖の数，即ちブール加法形式の数 $|BD(f_{\overline{0,1}})|$ のみを数え上げればよい。

3. 不　変　量

ある論理関数 $f_{\overline{0,1}}$ が与えられたとき，それがどの NP 同値類に属するかを同型対応で判定するのは手数を要する。$f_{\overline{0,1}}$ から簡単に，一意に決定できるような指標（いわゆる不変量）が存在すれば，任意に与えられた 2 値論理関数 f から，それを表現するブール加法形式の数を求めることは極めて容易となる。我々は，$f_{\overline{0,1}}$ に関する NP 同値類の不変量（以下，$INV(f_{\overline{0,1}})$ と記す）を次のように定義する。

[定義 3.1]

f の主項のうち，その文字数が $n-k$ 個（但し，$2 \leq k \leq n$）のものを

$$\alpha_1 = x_1^{a_{11}} \cdot \cdots \cdot x_1^{a_{1n}}$$
$$\vdots$$
$$\alpha_m = x_1^{a_{m1}} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_{mn}}$$

とし，それに対応する $\partial V_k^n(f)$ の元をそれぞれ，

$$\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, \cdots, a_{1n})$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{a}_m = (a_{m1}, \cdots, a_{mn})$$

とする。この主項の個数 $|\partial V_k^n(f)|$ を P_k とする。また，$\boldsymbol{a}_i$（但し，$1 \leq i \leq m$）の j 桁目の要素からなるベクトル $(a_{1j}, \cdots, a_{mj})$（これを $\boldsymbol{c}^j$ と記す。但し，$1 \leq j \leq n$）のうち，その要素が $v\,(\in V$，但し $V = \{0, 1/2, 1\})$ に等しい個数を $|\boldsymbol{c}^j|_v$ とする。ここで便宜的に，$|\boldsymbol{c}^j|_{1/2}$ および $||\boldsymbol{c}^j|_0 - |\boldsymbol{c}^j|_1|$（これを $|\boldsymbol{c}^j|_{0-1}$ と記す）を，それぞれ q^j および r^j と記し，これから作られる数列 $(q^1, r^1), \cdots, (q^n, r^n)$ を $\{(q_k, r_k)\}$ と記すことにする。このとき数列 $\{(q_k, r_k)\}$ が k（但し，$n \geq k \geq 2$）に対して辞書式順序（$s < t$ ならば $q^s > q^t$，または $q^s = q^t$ かつ $r^s > r^t$）になるように変数の順序を置き換えて得られる数列の組

$$P_k \,|\, \{(q_k, r_k)\} \quad (\text{但し，} n \geq k \geq 2)$$

を $INV(f_{\overline{0,1}})$ と記す。

実際にこれが不変量になることを，以下に示す。

[定理 3.1]

$$f_{\overline{0,1}} \simeq_{\mathrm{NP}} g_{\overline{0,1}} \quad \rightleftarrows \quad INV(f_{\overline{0,1}}) = INV(g_{\overline{0,1}})$$

（証明）

任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，要素 a が $v\,(\in V)$ に等しい個数を $|\boldsymbol{a}|_v$ と記す。また $\boldsymbol{a}$ の任意の要素 a_i に対する否定変換を δ，$\boldsymbol{a}$ の任意の2つの要素 a_s, a_t（但し，$s \neq t$）に対する置換（互換）を σ と記す。この変換の組 (δ, σ) を τ と記すと，NP 同型写像 φ で行なわれる NP 変換 T に対して，$\tau \in T$ である。

（⇒）$f_{\overline{0,1}} \simeq_{\mathrm{NP}} g_{\overline{0,1}}$ ならば $\partial V_k^n(f_{\overline{0,1}})$ と $\partial V_k^n(g_{\overline{0,1}})$（但し，$n \geq k \geq 2$）との間に，ある NP 同型写像 φ が存在する。いま $\partial V_k^n(f_{\overline{0,1}})$ の任意の元 $\boldsymbol{a}$ に対して変換 τ を行なうと，$|\tau(\boldsymbol{a})|_{1/2} = |\boldsymbol{a}|_{1/2} (= k)$ である。よって変換 T に関して，P_k は等しい。また $\boldsymbol{a}$ の j 桁目（但し，$1 \leq j \leq n$）の要素のみからなるベクトル $\boldsymbol{c}^j$ に対して，$|\tau(\boldsymbol{c}^j)|_{1/2} = |\boldsymbol{c}^j|_{1/2} (= q^j)$，$|\tau(\boldsymbol{c}^j)|_{0-1} = |\boldsymbol{c}^j|_{0-1} (= r^j)$ である。よって変換 T に関して，数列 $\{(q_k, r_k)\}$ の辞書式順序は等しい。以上により $INV(f_{\overline{0,1}}) = INV(g_{\overline{0,1}})$ である。

（⇐）$INV(f_{\overline{0,1}}) = INV(g_{\overline{0,1}})$ ならば不変量の定義より，$\partial V_k^n(f_{\overline{0,1}})$ と $\partial V_k^n(g_{\overline{0,1}})$ との間に，ある写像 φ が存在する。$\boldsymbol{a}$ を $\partial V_k^n(f_{\overline{0,1}})$ の任意の元とすると，P_k が一致することより，$\tau(\boldsymbol{a}) \in \partial V_k^n(g_{\overline{0,1}})$ である。よって φ は上への写像である。$\boldsymbol{d}\,(\neq \boldsymbol{a})$ を $\partial V_k^n(f_{\overline{0,1}})$ の任意の元とすると，$\tau(\boldsymbol{d}) \neq \tau(\boldsymbol{a})$ である。よって φ は1対1写像である。さらに，数列 $\{(q_k, r_k)\}$ が一致することより $\tau(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{d}) = \tau(\boldsymbol{a}) \wedge \tau(\boldsymbol{d})$ で，$\boldsymbol{e}\,(\leqslant \boldsymbol{a})$ を $V_h^n(f_{\overline{0,1}})$（但し，$h < k$）の元とすると，$\tau(\boldsymbol{e}) \leqslant \tau(\boldsymbol{a})$ である。よって φ は NP 準同型写像である。同様にして，φ^{-1} も NP 準同型写像であることが示される。以上により φ は同型写像で，$f_{\overline{0,1}} \simeq_{\mathrm{NP}} g_{\overline{0,1}}$ である。（証明終）

実際に，上記の $INV(f_{\overline{0,1}})$ が $n \leq 4$ に関して不変量になることを，計算機を用いて確認した。表1〜4に，4変数以下の $f_{\overline{0,1}}$ に関する NP 同値類の不変量 $INV(f_{\overline{0,1}})$ を示す。同表において，第1欄は NP 同値類の番号である。第2欄は $INV(f_{\overline{0,1}})$ で，P_k および (q_k, r_k) を k（但し，$n \geq k \geq 2$）に対する昇順の辞書式順序で与えており，欄内の q_k/r_k は q_k と r_k とが縦に書か

表1 1変数 $f_{\overline{0,1}}$ の不変量

No	INV($f_{\overline{0,1}}$)	$f_{\overline{0,1}}$	$\|BD(f_{\overline{0,1}})\|$
	ϕ		
0	—	—	1

表2 2変数 $f_{\overline{0,1}}$ の不変量

No	INV($f_{\overline{0,1}}$)		$f_{\overline{0,1}}$	$\|BD(f_{\overline{0,1}})\|$
	p_2	$\{q_2/r_2\}$		
0	0	− − − −	0	1
1	1	1 1 0 0	f	17

表3 3変数 $f_{\overline{0,1}}$ の不変量

No	INV($f_{\overline{0,1}}$)				$f_{\overline{0,1}}$	$\|BD(f_{\overline{0,1}})\|$
	p_3	p_2	$\{q_3/r_3\}$	$\{q_2/r_2\}$		
0	0	0	− − − − − −	− − − − − −	00	1
1	0	1	− − − − − −	1 1 0 0 0 1	0f	17
2	0	2	− − − − − −	2 1 1 0 1 1	fc	145
3	0	3	− − − − − −	2 2 2 1 1 1	fe	621
4	1	0	1 1 1 0 0 0	− − − − − −	ff	6211

表4　4変数 $f_{\overline{0,1}}$ の不変量

No	INV($f_{\overline{0,1}}$)						$f_{\overline{0,1}}$	$\|BD(f_{\overline{0,1}})\|$
	p_4	p_3	p_2	$\{q_4/r_4\}$	$\{q_3/r_3\}$	$\{q_2/r_2\}$		
0	0	0	0	---- ----	---- ----	---- ----	0000	1
1	0	0	1	---- ----	---- ----	1 1 0 0 0 0 1 1	000f	17
2	0	0	2	---- ----	---- ----	1 1 1 1 1 1 1 1	111f	289
3	0	0	2	---- ----	---- ----	2 1 1 0 0 1 1 2	003f	145
4	0	0	2	---- ----	---- ----	2 2 0 0 0 0 0 0	f00f	289
5	0	0	3	---- ----	---- ----	2 2 1 1 1 1 0 0	8ff4	4913
6	0	0	3	---- ----	---- ----	2 2 1 1 1 1 2 2	053f	1237
7	0	0	3	---- ----	---- ----	2 2 2 0 1 1 1 3	007f	621
8	0	0	3	---- ----	---- ----	3 1 1 1 0 2 2 0	0c3f	1237
9	0	0	3	---- ----	---- ----	3 1 1 1 0 2 2 2	033f	1241
10	0	0	4	---- ----	---- ----	2 2 2 2 0 0 0 0	6ff6	83521
11	0	0	4	---- ----	---- ----	2 2 2 2 2 2 2 2	eee0	5297
12	0	0	4	---- ----	---- ----	3 2 2 1 1 2 0 3	fbc0	5299
13	0	0	4	---- ----	---- ----	3 2 2 1 1 2 2 3	fec0	5317
14	0	0	4	---- ----	---- ----	4 2 1 1 0 2 1 1	cff0	10553
15	0	0	5	---- ----	---- ----	3 3 2 2 0 0 3 3	f7e0	22706
16	0	0	5	---- ----	---- ----	3 3 2 2 2 0 3 3	fde0	22787
17	0	0	5	---- ----	---- ----	3 3 2 2 2 2 3 1	efe0	22697
18	0	0	5	---- ----	---- ----	3 3 2 2 2 2 3 3	fee0	22869
19	0	0	5	---- ----	---- ----	4 2 2 2 1 3 1 1	cff8	45217
20	0	0	6	---- ----	---- ----	3 3 3 3 3 3 1 1	fbd8	97282
21	0	0	6	---- ----	---- ----	3 3 3 3 3 3 3 1	fde8	98041
22	0	0	6	---- ----	---- ----	3 3 3 3 3 3 3 3	fee8	98825
23	0	0	6	---- ----	---- ----	4 4 2 2 2 2 2 2	eff0	97257
24	0	0	6	---- ----	---- ----	6 2 2 2 0 0 0 0	3ffc	385513
25	0	0	7	---- ----	---- ----	4 4 3 3 3 1 2 2	dff8	416977
26	0	0	7	---- ----	---- ----	4 4 3 3 3 3 0 0	bfbc	416810
27	0	0	7	---- ----	---- ----	4 4 3 3 3 3 2 2	eff8	420325
28	0	0	8	---- ----	---- ----	4 4 4 4 2 2 2 2	eff6	1787807
29	0	0	9	---- ----	---- ----	6 4 4 4 3 1 1 1	bffc	3846230
30	0	0	12	---- ----	---- ----	6 6 6 6 0 0 0 0	7ffe	38462300
31	0	1	0	---- ----	1 1 1 0 0 0 0 1	---- ----	00ff	6211
32	0	1	1	---- ----	1 1 1 0 0 0 0 1	1 0 0 1 0 1 1 0	ffc0	53238
33	0	1	2	---- ----	1 1 1 0 0 0 0 1	1 1 0 2 1 1 2 0	ffe0	229283
34	0	1	2	---- ----	1 1 1 0 0 0 0 1	2 0 0 2 0 0 0 0	ff3c	456349
35	0	1	3	---- ----	1 1 1 0 0 0 0 1	1 1 1 3 2 2 0 0	ffd8	987846
36	0	1	3	---- ----	1 1 1 0 0 0 0 1	1 1 1 3 2 2 2 0	ffe8	992313
37	0	1	4	---- ----	1 1 1 0 0 0 0 1	2 1 1 4 2 1 1 0	ffbc	4256361
38	0	1	6	---- ----	1 1 1 0 0 0 0 1	2 2 2 6 0 0 0 0	ff7e	39739369
39	0	2	0	---- ----	2 2 1 1 0 0 1 1	---- ----	fff0	2325923
40	0	2	1	---- ----	2 2 1 1 0 0 1 1	0 0 1 1 1 1 0 0	fff8	10083670
41	0	2	2	---- ----	2 2 1 1 0 0 1 1	0 0 2 2 0 0 0 0	fff6	43722077
42	0	3	0	---- ----	3 2 2 2 0 1 1 1	---- ----	fffc	103893164
43	0	4	0	---- ----	3 3 3 3 1 1 1 1	---- ----	fffe	1087646789
44	1	0	0	1 1 1 1 0 0 0 0	---- ----	---- ----	ffff	31901034831

れていることを示す。第3欄はこのNP同値類の代表関数で，$f_{\overline{0,1}}$ の最小項表示を16進に直して与えている。第4欄はそのブール加法形式の数 $|BD(f_{\overline{0,1}})|$ である。

この表より，2値論理関数 f のNP同値類の数（n=1, 2, 3, 4の場合，それぞれ3, 6, 22, 402）に比べて，ブール加法形式の数のみを問題にした $f_{\overline{0,1}}$ のNP同値類は，その類の数がかなり減少していることが分かる。また3変数以下については，第2欄より P_k だけでも不変量になる。

2値論理関数を通常のNP同値類に分類する問題は，$\{0, 1\}=B$ からなる n 次元集合 B^n の任意の部分集合を，NP変換に対して不変であるような類に分割する問題である。これについては既に，その同値類の数を構成的に与える式，および一意に決定する不変量を与えるアルゴリズムが示されている[9]。これに対してここで考察している次の問題，即ち f の主項のうち，その文字数が $n-2$ 個以下から構成される論理関数 $f_{\overline{0,1}}$ のNP同値類を求める問題は，極めて困難である。

あとがき

本論文で述べた不変量は，2値論理関数を表現するブール加法形式の数え上げに帰着できる多値論理関数の数え上げ問題の基礎を与えるものである。与えられた2値論理関数を表現するブール加法形式の数，さらには n 変数のブール加法形式の数を求めるアルゴリズムが確立されれば，現在これらの多値論理関数の数え上げ問題の限界である4変数を越えることが可能となる。

謝　辞

日頃御指導頂く前本学情報工学科西岡篤夫教授，および現情報工学科石井博章教授に深謝致します。

参考文献

1) 巽，向殿：ブール加法形式の数え上げ問題，信学論(D)，Vol. J66-D, No. 10, pp. 1201-1208 (1983).

2) Mukaidono M.: New Canonical Forms and Their Applications to Enumerating Fuzzy Switching Functions, IEEE Proc. 12-th Int. Symp.

on Multiple-Valued Logic, pp. 275-279 (1982).

3) Berman J. and Mukaidono M.: Enumerating fuzzy switching functions and free Kleene algebra, Comp. Math. Appl. Vol. 10, pp. 25-35 (1984).

4) 巽, 向殿: 正則3値論理関数の数え上げ問題, 信学論 (D), Vol. J68-D, No. 5, pp. 1027-1034 (1985).

5) Yamamoto Y. and Mukaidono M.: Meaningful Special Classes of Ternary Logic Functions — Regular Ternary Logic Functions and Ternary Majority Functions, IEEE Trans. on Comp. Vol. 37, No. 7, pp. 799-806 (1988).

6) Takagi N. and Mukaidono M.: Fundamental Properties of Kleene-Stone Logic Functions, IEEE Proc. 21-th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp. 275-279 (1991).

7) Hata Y., Yuhara M., Miyawaki F. and Yamato K.: On the Complexity of Enumerations for Multiple-Valued Kleenean Functions and Unate Functions, IEEE Proc. 21-th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp. 55-62 (1991).

8) Birkoff, G.; Lattice theory, Amer. Math. Soc. (1967).

9) Harrison M.A.: Introduction to switching and automata theory, McGraw-Hill, (1965).

10) 巽, 荒木, 向殿, 木澤: ブール加法形式の不変量について, 情報処理学会第45回全国大会, 3x-5 (1992. 10).