

2次元線型離散システムの安定性判別法

The stability conditions of literal coefficients
for linear 2-D digital systems

高 橋 貞 良*

Sadayoshi TAKAHASHI

Abstract

This paper is concerned with the problem of finding stability condition for multidimensional discrete systems. The discrete systems of sampled multi-dimensional data are required. For instance 2-D discrete systems are used for the enhancement of photographic data such as weather photos and medical x-ray images. One of the important problems in using recursive discrete systems is stability. The stability condition is the following: The output data of the discrete systems are bounded if the input data are bounded.

For testing the stability condition in case of 2-D discrete systems, various methods have been proposed. But almost all papers aimed at the method of using numerical calculations. This paper aims at the stability conditions represented by literal coefficients of transfer function of discrete systems.

1. ま え が き

多次元離散システムの安定性については、最近では Decarlo *et al.*¹⁾, Bose²⁾ の仕事がある。Decarlo は数値計算的に、一方 Bose は代数的な方法を用いることで判定を可能としている。しかしながら両方法とも最終的に数値の計算を行わなければならない。本論文は、安定条件を文字係数で与えられた伝達関数の係数の代数式で表現しようとするものである。この場合、問題は1変数多項式の正值問題に帰着される。

2. 安定性の定義

2次元巡回型デジタルシステムの伝達関数を

$F(Z_1, Z_2) = A(Z_1, Z_2)/B(Z_1, Z_2)$ (A, B はそれぞれ分子, 分母多項式) とするとき, このシステムが構造的に安定であるための必要十分条件は,

$1/B(Z_1, Z_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_{ij} Z_1^i Z_2^j$ と展開するとき,

$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |h_{ij}| < +\infty$ となることである²⁾。

3. 定 理

定理 1

2次元巡回型デジタルシステムが構造的に安定であるための必要十分条件は、伝達関数の分母多項式を $B(Z_1, Z_2)$ とするとき、次式が成立することである²⁾。

$$B(Z_1, Z_2) \neq 0, |Z_1| \leq 1, |Z_2| \leq 1$$

定理 2 (Huang の定理)³⁾

2次元巡回型デジタルシステムが構造的に安定であるための必要十分条件は、伝達関数の分母多項式を $B(Z_1, Z_2)$ とするとき、次の2つの式が成立することである。

$$B(Z_1, 0) \neq 0, |Z_1| \leq 1 \quad (1)$$

$$B(Z_1, Z_2) \neq 0, |Z_1| = 1, |Z_2| \leq 1 \quad (2)$$

4. 安定性判別の変形

次に $S_1 = (1 - Z_1)/(1 + Z_1)$, $S_2 = (1 - Z_2)/(1 + Z_2)$ なる変換を行うことにより定理3が導かれる。

定理3

伝達関数 $F(Z_1, Z_2)$ を有する2次元ディジタルシステムが安定であるためには、

$F(Z_1, Z_2) = E(S_1, S_2)/G(S_1, S_2)$ と置くと、 (E, G) は多項式関数 G に対して、次の2条件が満足されることが十分な条件である。

- (1) 任意の実数 $x_1 (S_1 = jx_1)$ に対して $x_2 (S_2 = jx_2)$ に関する複素係数方程式 $G(jx_1, jx_2) = 0$ の根がすべて上半平面にあること。
- (2) $G(S_1, 1) = 0$ の根がすべて左半平面にあること。

但し、 $Z_i = -1 (i=1, 2)$ については変換式の分母が0になるため別に調べなければならないが、 $Z_i = -1$ に対しては $S_i = \infty$ が形式的に対応するので、簡単に判別できる。

定理4 (Sturm の定理の応用)⁵⁾

N_a 次の多項式 $f(z)$ の係数の実数部と虚数部とを分離して $f(z) = \phi(z) + j\psi(z)$ と置く。このとき、実軸の上側および下側にある $f(z)$ の根の数を複根も数えてそれぞれ N_u, N_l とし $\phi(z)$ と $\psi(z)$ から互除法によって得られる関数列から $\pm\infty$ における符号の変化の数を各々 $V(+\infty), V(-\infty)$ とすれば、 $f(z)$ が実根を持たないとき、

$$N_u = (1/2)\{N_a + V(+\infty) - V(-\infty)\}$$

$$N_l = (1/2)\{N_a + V(-\infty) - V(+\infty)\}$$

なる関係が存在する。

次に終結式と $\pm\infty$ における多項式の符号の変化に関する定理5を述べる。

定理5⁵⁾ 任意の二つの多項式

$$f_0(x) = \sum_{i=0}^{N_a} a_i x^{N_a-i}, \quad f_1(x) = \sum_{i=0}^{N_a} b_i x^{N_a-i}$$

において、終結式を

$$R_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{2k-1} & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{2k-1} & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & a_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & b_0 & b_1 & \cdots & b_k \end{vmatrix} \quad (k=1, \dots, N_a)$$

$R_0 = 1$ と置く。このとき、 $f_0(x), f_1(x)$ から互除法によって得られる関数列における $\pm\infty$ での符号の変化の数を $V(+\infty), V(-\infty)$ とすれば、

$$V(-\infty) - V(+\infty) = \sum_{k=1}^{N_a} \text{sign}(R_{k-1}R_k) \quad (3)$$

となる。特にディジタルシステムが2次元の場合は a_i, b_j は1個のパラメータ付きの変数となる。定理4より定理3の(1)を満たす条件は次の補題となる。

定理5を用いて実用的な補題を著者が導いた。

5. 新しい安定判別法

補題

定理3, 定理5において、任意の実数 x_i に対して

$$V(+\infty) - V(-\infty) = N_a$$

であるためには、任意の実数 x_1 に対して

$$R_k > 0 \quad (k: \text{偶数})$$

$R_k < 0 \quad (k: \text{奇数})$ なることが、必要十分条件である。

[証明] $\text{sign}(R_{k-1}R_k)$ は0または ± 1 である。

$\sum_{k=1}^{N_a} \text{sign}(R_{k-1}R_k)$ が $-N_a$ となるためにはすべての $\text{sign}(R_{k-1}R_k) (k=1, \dots, N_a)$ が -1 とならねばならない。

$R_0 = 1$ より $R_{2k} > 0, R_{2k+1} < 0$ となる。 [証明終]

特にディジタルシステムが2次元の場合は R_k は一変数の多項式となる。

$$R_k(x) = \sum_{i=0}^{M_k} a_{i,k} x^{M_k-i} \quad (k=1, \dots, N_a)$$

と置くと

$R_k(x)$ が常に正(または負)であるための条件は、この多項式と導関数 $(d/dx)R_k(x)$ から互除法によって得られる関数列に関する $\pm\infty$ での符号の変化の数を

$$V_k(+\infty), V_k(-\infty) \text{ とすれば、}$$

$V_k(+\infty) = V_k(-\infty)$, $a_{0,k} > 0$ (< 0) である。
($k=1, \dots, N_a$)

$R_k(x)$ と $R'_k(x) = \sum_{i=0}^{M_k} (M_k - i) a_{i,k} x^{M_k-i-1}$ における

終結式を

$$r_{k,j} = \begin{vmatrix} a_{0,k} & a_{1,k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & M_k a_{0,k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{0,k} & a_{1,k} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & M_k a_{0,k} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{0,k} & a_{1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & M_k a_{0,k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{2j-1,k} & \cdot \\ (M_k - 2j + 2) a_{2j-2,k} & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{j,k} \\ \cdot & (M_k - j + 1) a_{j-1,k} \end{vmatrix}$$

($j=1, \dots, M_k$)

$r_{k,0} = 1$ とすると式 (1) より得られる条件は

$$\sum_{j=1}^{M_k} \text{sign}(r_{k,j-1} \cdot r_{k,j}) = 0 \quad (k=1, \dots, N_a) \quad (4)$$

(M_k は $R_k(x)$ の最高次の次数) となる。 $N=2$ の場合 (4) 式は変数のない文字式のみの代数式である。

6. 次元が小さい場合の安定判別法

6.1 $N=2$ の場合

$B(Z_1, Z_2) = 1 + aZ_1 + bZ_2 + cZ_1Z_2$ とすると, 得られる条件は

$$R_1(x) = Ax^2 + B < 0, |a| < 1 \text{ となる。}$$

ここで

$$A = (b-c)^2 - (1-a)^2, B = (b+c)^2 - (1+a)^2$$

$R_1(x) = 2Ax$ であるので求める条件は

$$A < 0, \text{sign}(r_{1,0} \cdot r_{1,1}) + \text{sign}(r_{1,1} \cdot r_{1,2}) = 0$$

$$r_{1,1} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{vmatrix} \quad r_{1,2} = \begin{vmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 2A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ 0 & 0 & 2A & 0 \end{vmatrix} \text{ となる。}$$

$r_{1,1} > 0$, $\text{sign}(r_{1,0}, r_{1,1}) = 1$ より $r_{1,2} < 0$ とならねばならなくなる。

$$r_{1,2} = -AB \begin{vmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2A \end{vmatrix} = -4A^3 \cdot B < 0 \text{ より, } B < 0 \text{ と}$$

なる。

よって求める条件は

$$|a| < 1, |(b-c)/(1-a)| < 1, |(b+c)/(1+a)| < 1$$

となり Shanks の導いた結果と一致する⁴⁾。

6.2 $N=3$ の場合

$B(Z_1, Z_2, Z_3) = 1 + aZ_1 + bZ_2 + cZ_3 + dZ_1Z_2 + eZ_2Z_3 + fZ_3Z_1 + gZ_1Z_2Z_3$ とすると, 得られる条件は,

$$R_1(x) = A_1x^2 + B_1 < 0, (|a| < 1)$$

$$A_1 = (b-c)^2 - (1-a)^2, B_1 = (b+c)^2 - (1+a)^2$$

$$R_2(x, y) = Ax^2y^2 + Bx^2 + Cy^2 + Dxy + E < 0$$

ここで

$$A = (c-e-f+g)^2 - (1-a-b+d)^2$$

$$B = (c+e-f-g)^2 - (1-a+b-d)^2$$

$$C = (c-e+f-g)^2 - (1+a-b-d)^2$$

$$D = 8(d+fe-ab-cg), E = (c+e+f+g)^2 - (1+a+b+d)^2$$

$$(d/dx)R_2(x, y) = 2Axy^2 + 2Bx + Dy \text{ である。}$$

$$r_{2,1}(y) = \begin{vmatrix} Ay^2+B & Dy \\ 0 & 2(Ay^2+B) \end{vmatrix}$$

$$r_{2,2}(y) = \begin{vmatrix} Ay^2+B & Dy & cy^2+E & 0 \\ 0 & 2(Ay^2+B) & Dy & 0 \\ 0 & Ay^2+B & Dy & cy^2+E \\ 0 & 0 & 2(Ay^2+B) & Dy \end{vmatrix}$$

ここで $r_{2,1}, r_{2,2}$ は変数 y の関数である。求める条件は, すべての y に対して

$$\text{sign}(r_{2,0} \cdot r_{2,1}) + \text{sign}(r_{2,1} \cdot r_{2,2}) = 0 \quad (5)$$

となる。

すべての y に対して $r_{2,0} \cdot r_{2,2} < 0$ の場合を除いて $r_{2,1}$

が符号を変化させると上式の左辺の値は変化するので、求める条件は、 $(r_{2,0}, r_{2,2})$ がすべての y に対して常に正 (または負) でない場合は物理的に不適な解となる。

すべての y に対して

$$(1) \quad r_{2,0} \cdot r_{2,2} < 0 \text{ または,}$$

$$(2) \quad r_{2,0} \cdot r_{2,2} \geq 0, r_{2,1} \text{ が正常に正 (または負) となる。}$$

$r_{2,0} = 1$ より (5) 式を満たす条件は、 $r_{2,2} < 0$ となる。

$$r_{2,2}(y) = R_2(y) \text{ とおくと,}$$

$$R_2(y)$$

$$= (Ay^2 + B) \begin{vmatrix} 2(Ay^2 + B) & Dy & 0 \\ Ay^2 + B & Dy & cy^2 + E \\ 0 & 2(Ay^2 + B) & Dy \end{vmatrix}$$

$$= -(Ay^2 + B)\{4Acy^4 + d \times (AE + BC - D^2/4)y^2 + 4BE\}$$

となり $y^2 = w$ とおき、右辺の第2項を $F(w)$ とすれば

$$F(w) = 4ACw^2 + 4(AE + BC + D^2/4)w + 4BE > 0 \quad (w \geq 0)$$

が求める条件となり、 $N=2$ の場合の方法を用いると、最終的に

$$D^2 < 4(AE + BC) + 8\sqrt{ABCE} \\ A < 0, B < 0, C < 0, E < 0 \text{ を得る。}$$

7. む す び

2次元の離散システムが安定である条件が式(4)より文字式で得られることを示した。本論文のテーマは純数学的にも興味深い問題であるし、文字係数で安定領域を与えることにより、周波数領域での任意の条件下において安定な最適解を計算機で得られることが可能となる。特に3次元以上の場合には多少計算の技巧を要するが、工学的には十分な条件としては、同様な方法で解を得ることが可能である。

8. 謝 辞

終始あたたく見守っていただいた神奈川工科大学 神田好作教授及び討論に加わっていただいたペンシルベニアステート大学 N.K. Bose 教授に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Decarlo, R., Saeks, R. and Murray, J.: "Multivariable Nyquist theory", INT. J. Control, Vol. 25, No. 5, pp. 657-675 (1977).
- 2) Bose, N.K.: "Applied Multidimensional Systems Theory", Van Nostrand Reinhold Company (1982).
- 3) Huang, T.S.: "Stability of two-dimensional recursive filters", IEEE Trans., Vol. AU-20, No. 2, p. 158 (June 1972).
- 4) Shanks, J.L., Treitel, S. and Justice, J.H.: "Stability and synthesis of two-dimensional recursive filters", *ibid.*, p. 115.
- 5) 高木貞治: "代数学講義", p. 96 定理 3.5 及び第 10 章 p. 359, 共立出版 (昭 43).

付 録

$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e > 0$ の場合の考察

$$R_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 3b & 2c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & d \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & 0 \\ 0 & 4a & 3b & 2c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & d \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 4a & 3b & 2c \end{vmatrix}$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 4a & 3b & 2c \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 4a & 3b \end{vmatrix}$$

$$R_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 4a \end{vmatrix}$$

$$R_0 = 1$$

このとき

$$\sum_{i=1}^4 \text{sign}(R_{i-1} \cdot R_i) = 0$$

が求める条件となり, $a > 0$ のもとで (1) $R_2 < 0, R_4 > 0$ 及び (2) $R_2 \geq 0, R_3 < 0, R_4 > 0$ が求める条件となる。

求める条件を図示すると, 下図のような単一な開連結領域となる。

図.

