

# 水中で自由振動する楕円柱振子に加わる流体力

岩 永 正 裕\*・山 岸 陽 一\*

## Fluid Forces Applied to Pendulum of Elliptic Cylinder

Masahiro IWANAGA and Yōichi YAMAGISHI

### Abstract

As well known, the added mass of circular cylinder is calculated by the potential theory, and the flow pattern of the potential theory is different from the real flow pattern. But the result of added mass by the potential theory is coincide with the experimental result. We want to know whether they agree even in the case of more complicated shapes of bodies.

As the first step to know this, we suspended an elliptic cylinder by columns, and studied the free motion of them in water, changing the attack angle. The change of angle of columns was measured with the non-contact type encoder. To obtain the drag coefficient and the added mass coefficient, we simulated the motion of the pendulum by a computer for various values of them and we chose the values which made the most fitted simulation result to the experimental result.

The experimental conditions were as follows. We used the brass elliptic cylinder of minor axis 20 mm, major axis 30 mm, length 290 mm and we made experiments changing the attack angle of elliptic cylinder.

As a result, the experimental value of the added mass coefficient and the theoretical value showed similar tendencies in relation to the attack angle of elliptic cylinder.

### 1. ま え が き

非定常運動する円柱に加わる付加質量はポテンシャル理論で求められ、等速運動する円柱周りの流れとポテンシャル流れは大きく異なるにもかかわらず、ポテンシャル理論で求められた付加質量は実験結果と比較的よく一致することが知られている<sup>1)</sup>。ではどの程度複雑な形状の物体にまでポテンシャル理論で求めた付加質量は適用できるのであろうか。

これを知る第一歩として本報告では楕円柱の付加質量を調べる。色々な迎え角に設定した楕円柱を振り運動させ、この運動を最も良くシミュレートできるように抗力係数と付加質量係数を決定する。一方ポテンシャル理論を用いて付加質量係数を求め、実験結果との程度一致するかを調べる。

### 記 号

- $A$ : 楕円柱の長径
- $B$ : 楕円柱の短径
- $C_{Di}$ : 側板の抗力係数
- $C_{DE}$ : 楕円柱の抗力係数
- $C_{Mi}$ : 側板の付加質量係数
- $C_{ME}$ : 楕円柱の付加質量係数
- $F_i$ : 側板の浮力
- $g$ : 重力加速度
- $I_i$ : 側板の慣性モーメント
- $L_E$ : 楕円柱の長さ
- $L_{EG}$ : 楕円柱の重心距離
- $L_F$ : 側板の浮心と支点の距離
- $L_G$ : 側板の重心距離
- $L_i$ : 側板全体の長さ
- $L_X$ : 側板の支点から水面までの距離
- $M_E$ : 楕円柱の質量
- $M_i$ : 側板の質量

$M_{addE}$ : 楕円柱の付加質量

$S_E$ : 楕円柱の最大投影面積 ( $A \times L_E$ )

$W$ : 側板の幅

$\delta$ : 側板の厚さ

$\rho$ : 水の密度

$\theta$ : 鉛直を0とした振子の振れ角

$\dot{\theta}$ : 角速度

$\ddot{\theta}$ : 角加速度

## 2. 実験装置および方法

### 2.1 実験装置ならびに実験方法

実験装置を Fig. 1 に示す。水槽はガラス製で寸法は  $900 \times 450 \times 450$  mm であり水道水を満たした。供試体として真鍮製で長径 30 mm, 短径 20 mm, 長さ 290 mm の楕円柱を使用し, この楕円柱を真鍮製で長さ 430 mm, 幅 20 mm, 厚さ 3 mm の 2 枚の側板の下端付近に取り付ける。この側板はボールベアリングで支

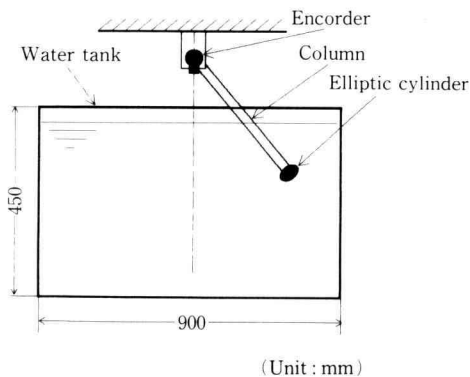


Fig. 1. Experimental Apparatus.

持された軸から吊り下げられている。側板の形状は Fig. 2 に示すように両端を半円状に削ってある。振子の振れ角を知るために側板上端支点部に 1 回転当り 3,600 パルスの非接触型エンコーダー(キャノン製 TR36)を設置して, この信号をエンコーダーカウンタボードを介してパーソナルコンピュータに取り込んで楕円柱振子の時間と振れ角  $\theta$  の関係を求めた。

実験は次の 3 段階に分けて行った。

1) 2 枚の真鍮側板を空中において自由振動させ, この振動をワークステーションでコンピュータシミュレーションして最もよく近似できるようにボールベアリングの固体摩擦を求める。

2) 次に水中で同様の実験を行い 2 枚の側板の抗力係数と付加質量係数を同様の処理で求める。

3) 最後に側板に供試物体を取り付け水中で振動させ側板に関する固体摩擦, 抗力と付加質量を取り除き楕円柱に関する抗力係数と付加質量係数を求める。

楕円柱の角度は長径方向が進行方向と一致する場合を  $0^\circ$  として,  $-90^\circ \sim 90^\circ$  の範囲で迎え角  $\alpha$  を変化させて実験を行った。 $\alpha$  の向きは Fig. 3 の向きを正にとった。

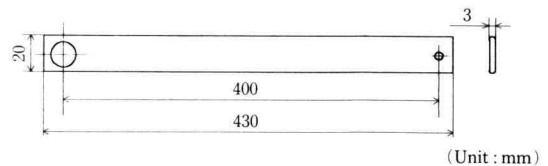


Fig. 2. Column

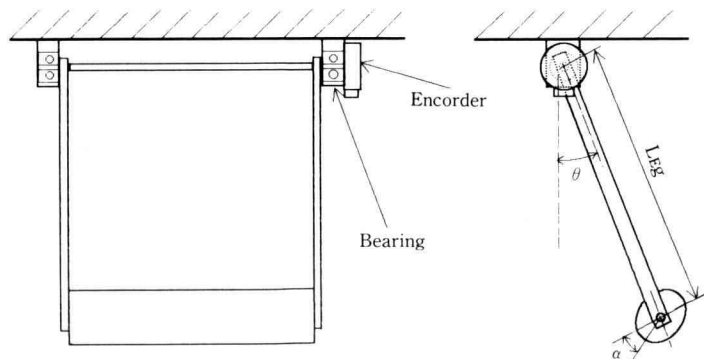


Fig. 3. Pendulum of elliptic cylinder.

## 2.2 実験結果整理方法

## 2.2.1 振子の運動方程式

Fig. 3 のような振子の運動を考える。運動方程式は慣性モーメント  $I$ , 角加速度  $\ddot{\theta}$ , トルク  $T$  を用いて  $I\ddot{\theta} = T$  と表される。

慣性モーメントは, 振子と側板の慣性モーメントと, これらに加わる付加質量による慣性モーメントの和となる。トルクは振子と側板に加わる重力と浮力によるトルクと, それらに加わる抗力によるトルクの和になる。

慣性モーメントならびにトルクの各項は Table 1 の よって

ようになり, これらをまとめると次式のような運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{(\text{側板の慣性モーメント})+(\text{楕円柱の慣性モーメント})+(\text{側板の付加質量による慣性モーメント})+(\text{楕円柱の付加質量によるモーメント})\} \cdot \ddot{\theta} \\ & = -(\text{側板の重力によるトルク})-(\text{側板の抗力によるトルク})+(\text{側板の浮力によるトルク}) \\ & \quad -(\text{楕円柱の重力によるトルク}) \\ & \quad -(\text{楕円柱の抗力によるトルク})+(\text{楕円柱の浮力によるトルク}) \end{aligned}$$

Table 1. Formula of torque and moment of inertia.

	a elliptic cylinder	a column
Moment of inertia	$M_E(A^2+B^2)/4+M_E L_{EG}^2$	$I_i \quad \text{※1}$
Moment of inertia by added mass	$M_{addE} \cdot L_{EG}^2$	$C_{Mi} \cdot \rho \cdot \delta \cdot W \cdot (L_i^3 - L_x^3)/3$
Torque by gravitational force	$-M_{EG} L_{EG} \sin \theta$	$-M_i g L_g \sin \theta$
Torque by buoyancy	$\rho \pi A B L_{EG} L_{EG} \sin \theta$	$F_i \cdot L_F \quad \text{※2}$
Torque by drag	$-(C_{DE}/2)\rho \dot{\theta} \dot{\theta} \cdot S_E L_{EG}^3$	$-C_{Di}\delta\rho \dot{\theta} \dot{\theta} \cdot (L_i^4 - L_x^4)/8$

$A$ : Length of major axis of the elliptic cylinder.

$B$ : Length of minor axis of the elliptic cylinder.

$C_{DE}$ : Drag coefficient of the elliptic cylinder.

$C_{Di}$ : Drag coefficient of the column.

$C_{Mi}$ : Added mass coefficient of the columns.

$F_i$ : Buoyancy of the columns.

$g$ : Acceleration of gravity.

$I_i$ : Moment of inertia of the column.

$L_E$ : Length of the elliptic cylinder.

$L_{EG}$ : Distance between the fulcrum and the center gravity of elliptic cylinder.

$L_F$ : Distance between the fulcrum and the center buoyancy of column.

$L_g$ : Distance between the fulcrum and the center gravity of column.

$L_i$ : Distance between the fulcrum and the tip of column.

$L_x$ : Distance between the fulcrum and the water surface.

$M_E$ : Mass of the elliptic cylinder.

$M_i$ : Mass of the column.

$M_{addE}$ : Added mass of the elliptic cylinder.

$S_E$ : Maximum projectjed area of the elliptic cylinder ( $A \times L_E$ ).

$W$ : Width of the column.

$\delta$ : Thickness of the column.

$\rho$ : Density of water.

$\dot{\theta}$ : Angular velocity.

※1 As the shape of the column is complex, we calculated its moment of inertia by the method of integration with a computer.

※2 As the torque by buoyancy changes in relation to the angle of the column, we calculated the value of it every step with a computer.

$$\begin{aligned}
& \{2I_i + \frac{M_E(A^2+B^2)}{4} + M_E L_{EG}^2 \\
& + \frac{2}{3} C_{Mi} \rho \delta W \times (L_i^3 - L_x^3) + M_{addE} \cdot L_{EG}^2\} \ddot{\theta} \\
& = -2M_i g L_{EG} \sin \theta - \frac{C_{Di} \delta \rho \dot{\theta} |\dot{\theta}|}{4} \cdot (L_i^4 - L_x^4) \\
& + 2F_i L_F - M_{EG} L_{EG} \sin \theta - \frac{C_{DE}}{2} \rho \dot{\theta} |\dot{\theta}| S_E L_{EG}^3 \\
& + \rho \pi A B L_{EG} L_{EG} \sin \theta
\end{aligned}$$

本研究の目的は楕円柱に加わる付加質量係数  $C_{ME}$  (付加質量  $M_{addE}$  と楕円柱が排除する流体の質量  $\rho \pi A B L_E$  の比) と抗力係数  $C_{DE}$  の値を求めることであり, 上記運動方程式を導きさらにそれを解析するに当り次のような仮定を置いた。

[付加質量による慣性モーメントについて]

楕円柱に関する付加質量は楕円柱の重心に集中して存在するものとして式を立て, 一定な値であると仮定して解析を行う。

[抗力によるトルクについて]

楕円柱に加わる抗力は楕円柱の重心に加わるものとして式を立て, 抗力係数は一定で変化しないものと仮定して解析を行う。

### 2.2.2 抗力係数ならびに付加質量係数の求め方

上記運動方程式は初期条件を実験条件に合わせて振れ始めの角度を与え, 時刻0において角速度を0として前進法で数値積分することにより簡単に解を求めることができる。このようにして求めた解と, 実験から求めた振れ角の時間変化を比較して, これらができるだけ一致するように以下のような手順で付加質量係数と抗力係数を決定した。

1) まず抗力係数ある値に仮定して, 付加質量係数を数個用意する。これらの係数のもとで解を求め実験値と比較して, 周期が最も一致する付加質量係数を求める。

2) 付加質量係数は上で求めた値を用い, 抗力係数を数個用意する。これらの係数のもとで解を求め実験値と比較して, 振幅が最も一致する抗力係数を求める。

この過程を付加質量係数, 抗力係数の範囲を狭めながら繰り返し, 最終的なそれらの値を求める。

### 2.3 楕円柱の付加質量係数の理論値

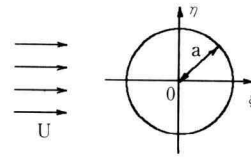
速度  $U$  の平行流中に置かれた楕円柱まわりのポテンシャル流れは, 周知のように複素ポテンシャル

$$W = U \left( \xi + \frac{a^2}{\xi} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\xi)^{*3}$$

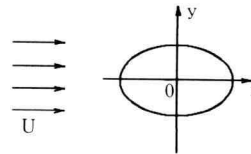
で与えられる半径  $a$  の円の周りの  $\xi$  平面上の流れ (Fig. 4(a) 参照) を Joukowski の写像関数

$$Z = \xi + \frac{c^2}{\xi}$$

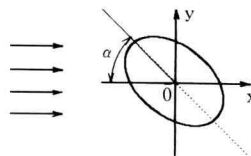
を用いて等角写象すれば  $Z$  平面の流れ (Fig. 4(b) 参



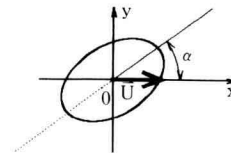
(a)  $\xi$ -plane (Flow around fixed circular cylinder)



(b)  $Z$ -plane (Flow around fixed elliptic cylinder)



(c)  $Z$ -plane (Flow around fixed elliptic cylinder with attack angle)



(d)  $Z$ -plane (Flow around moving elliptic cylinder with attack angle)

Fig. 4. Conformal mapping of the  $\xi$ -plane on the  $Z$ -plane.

\*3 筆者らは初め循環の変化を考慮に入れない衝撃力としての計算を行い付加質量係数を求めて提出したが, 循環に関する項を追記するべきであり, その項を含めても抗力に関しては同じ結果 (式 (8)) となる, との指示があり, 2.3 中の式に循環  $\Gamma$  に関する項を追記しました。

照)として求めることができる。この楕円柱に迎え角  $\alpha$  を与えるには写像関数を

$$Z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \cdot e^{-2i\alpha} \quad (1)$$

に変更すればよい (Fig. 4(c) 参照)。

静止流体中を速度  $U$  で  $x$  方向に進む迎え角  $\alpha$  の楕円柱周りの流れを表す複素ポテンシャルは次のようになる (Fig. 4(d) 参照)。

$$W = UZ - U \left( \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\zeta)$$

これに式 (1) の迎え角  $\alpha$  の符号を反転した式

$$Z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \cdot e^{2i\alpha} \quad (2)$$

を代入すると

$$W = \frac{U}{\zeta} \cdot (c^2 e^{2i\alpha} - a^2) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\zeta) \quad (3)$$

となる。

式 (2), (3) は静止流体中を速度  $U$  で  $x$  方向に進む迎え角  $\alpha$  の楕円柱周りの  $Z$  平面の流れを表すが、圧力分布はベルヌーイの式

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} (U^2 - u^2) \quad (4)$$

で与えられ、この圧力の右辺第 2 項を楕円柱表面で積分して抗力を求めてもダランベールの背理として知られるように 0 となる。いま付加質量を求めるには、楕円柱が加速度運動したとき  $\frac{\partial U}{\partial t}$  によって発生する

式 (4) の  $-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  によって発生する圧力を見積り、これを楕円柱表面で積分して抗力を求めればよい。式 (3) と  $W = \Phi + \Psi i$  を用いて加速度運動によって生じる圧力分布は次式のように求まる。

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \text{Real} \left( \frac{c^2 e^{2i\alpha} - a^2}{\zeta} \right) - \frac{\rho}{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \cdot \text{Real} (i \log(\zeta))$$

さて楕円柱表面の圧力分布は  $\zeta = ae^{i\varphi}$  とおいて上式より求まる。

$$p = -\rho \frac{\partial U}{\partial t} \left\{ \frac{c^2}{a} \cos(2\alpha - \varphi) - a \cos(\varphi) \right\} + \frac{\rho}{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \varphi \quad (5)$$

一方

$$\begin{aligned} Z &= a \cdot e^{i\varphi} + \frac{c^2}{a} e^{i(2\alpha - \varphi)} \\ &= a \cos \varphi + \frac{c^2}{a} \cos(2\alpha - \varphi) \\ &\quad + i \left\{ a \sin \varphi + \frac{c^2}{a} \sin(2\alpha - \varphi) \right\} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi + \frac{c^2}{a} \cos(2\alpha - \varphi) \\ y &= a \sin \varphi + \frac{c^2}{a} \sin(2\alpha - \varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

式 (5), (6) を用いて

$$\begin{aligned} \oint p dy &= -\rho \frac{\partial U}{\partial t} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{c^2}{a} \cos(2\alpha - \varphi) - a \cos(\varphi) \right\} \\ &\quad \times \left\{ a \cos \varphi - \frac{c^2}{a} \cos(2\alpha - \varphi) \right\} d\varphi \\ &\quad + \frac{\rho}{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \int_0^{2\pi} \varphi \left\{ a \cos \varphi - \frac{c^2}{a} \cos(2\alpha - \varphi) \right\} d\varphi \\ &= \rho \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\pi}{a^2} (a^4 + c^4 - 2a^2 c^2 \cos 2\alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

この力の向きは  $x$  の負の方向であり、式 (7) で与えられる大きさの抗力が楕円柱に加わることになる。なお  $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$  に比例する項は部分積分を行って 0 となることがわかる。

楕円の長径、短径を  $A, B$  とすると

$$\begin{aligned} a + \frac{c^2}{a} &= A \\ a - \frac{c^2}{a} &= B \end{aligned}$$

となり式 (7) をこれらを用いて書き換えると

$$\begin{aligned} \oint p dy &= \rho \frac{\partial U}{\partial t} \pi \left( \frac{A^2 + B^2}{2} - \frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2\alpha \right) \end{aligned}$$

となる。

従って付加質量係数は次式で与えられ、楕円柱が加速度運動するとき付加される質量と楕円柱が排除した流体の質量の比を表す。

$$C_{ME} = \frac{\int p dy}{\rho \pi AB \frac{\partial U}{\partial t}} \quad (8)$$

$$= \frac{\frac{A^2 + B^2}{2} - \frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2\alpha}{A \cdot B}$$

### 3. 実験結果

Fig. 5は楕円柱を迎え角  $\alpha$  を  $0^\circ$  で振子運動させた実験結果であり、縦軸に楕円柱振子の振れ角  $\theta$ 、横軸に時間をとった。実線は抗力係数  $C_{DE}$  を 0.64、付加質

量係数  $C_{ME}$  を 0.66 としたときのコンピュータシミュレーション結果であり、実験結果とよく一致していることがわかる。

Fig. 6は、縦軸に抗力係数  $C_{DE}$ 、横軸に楕円柱の迎え角  $\alpha$  を取って実験値を整理したものである。各迎え角に対する実験点は 25~100 個あり、その平均値を●で表す。■は従来の研究結果を表し<sup>2)</sup>、本研究結果とほぼ一致している。

Fig. 7は縦軸に付加質量係数  $C_{ME}$  を、横軸に楕円柱の迎え角  $\alpha$  を取って実験値を整理したものである。●は Fig. 6と同様の意味である。実線はポテンシャル理論による楕円柱の付加質量係数を表したものであり、

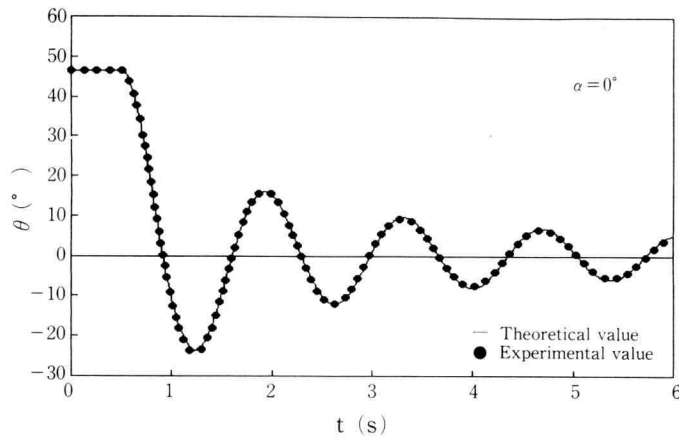


Fig. 5. Comparison of experimental results with calculated results.

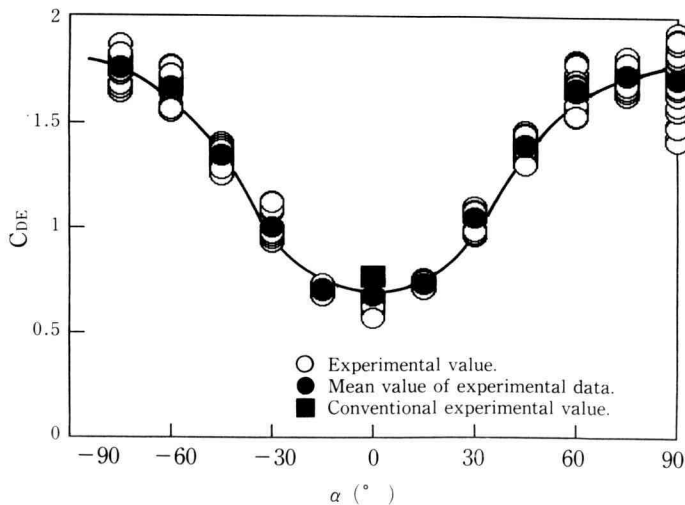


Fig. 6. Relation between drag coefficient and attack angle.

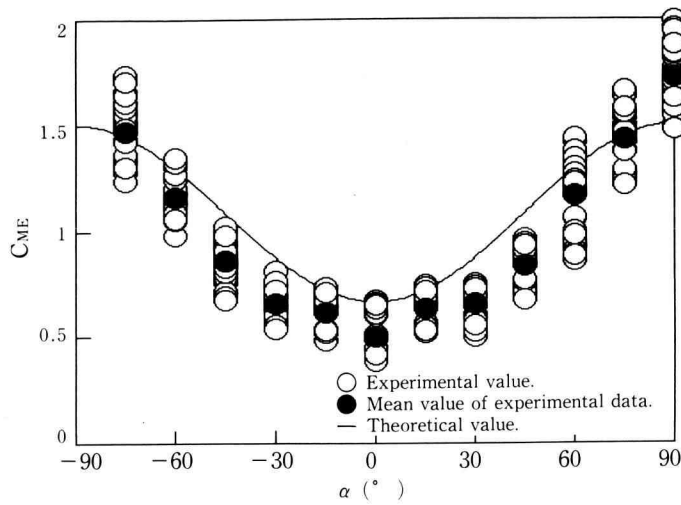


Fig. 7. Relation between added mass coefficient and attack angle.

実験値とほぼ同じ傾向がみられる。

#### 4. む す び

迎え角を変化させながら長径 30 mm, 短径 20 mm の楕円柱を振子運動させ、非接触型のエンコーダを用いて精度良くその運動を記録し、その運動を最も良くシミュレートできる抗力係数と付加質量係数を求めた。一方ポテンシャル理論から付加質量係数を求めて実験結果と比較した。その結果付加質量係数の迎え角に対する変化について実験結果と理論結果は細部に差異はみとめられるものの傾向はほぼ一致することがわかった。

#### 5. 謝 辞

本研究は本学 4 年次卒業研究として行われたものであり、下記の諸君の協力を得た。ここに謝意を表します。

高須 啓寿, 高橋 康夫  
武藤 裕司, 吉川 英彰

#### 6. 参 考 文 献

- (1) 岩永・山岸, 水中で自由振動する円柱振子に加わる流体力, 神奈川工科大学研究報告, No. B-14 (1990), 21.
- (2) Sighard F. Hoerner, FLUID-DYNAMIC DRAG, (1958), 3-11.