

代 用 電 荷 法 の 一 般 化

平 山 弘*・石 野 秀 紀**

Generalization of the Charge Simulation

Hiroshi HIRAYAMA and Hideki ISHINO

Abstract

The charge simulation method is often used in some parts of electrical engineering as an effective and simple method for solving Laplace equation. From Cauchy's integral formula, it is shown that this method can be extended in simpler form and it gives an effective method for solving two dimensional Laplace equation.

1. は じ め に

代用電荷法とは、電極表面の電荷の作る電界を仮想電荷で代用させる方法である。代用電荷法では、電極の内部に置く一つ一つの電荷（代用電荷）は、電極の電位と直接の関係を持っていない。電荷全体でできるだけ電極の形に近い等電位面ができるようにするだけである。

1969年、旧西ドイツのミュンヘン工科大学高電圧研究所のSteinbiglerは、空気中の回転対称電極の周囲の電界を計算する方法に関する学位論文を提出し、簡単な原理、高い精度、短い計算時間で関心のある人々を驚かせた。これが代用電荷法の始まりである。Steinbiglerの独創的なところは次の3点であろう。

- ① 電極表面上の電荷分布を電極内部に置いた仮想電荷の動きで置換した。
- ② 代用電荷として線電荷、リング電荷を利用し、大幅に効率を上げた。
- ③ 回転対称場という制限はあるものの、汎用計算法を生み出すという、はっきりとした意図のもとに開発している。

その後、代用電荷法は高電圧工学で必要な多くの形状の問題の解析に応用され、成果を上げてきた。

しかし、厚みのない領域の外部問題にうまく適用で

きない点が問題になり、ミュンヘン工科大のSingerは、表面電荷法を発表し、宅間は円板電荷を使用する代用電荷法を発表した。1980年同じ問題に対し、村島と久原がリーマン面を使う方法を発表し、2次元問題に限られるが、完全な解決を与えた。

電気工学では代用電荷法とともに境界要素法がよく使われる。代用電荷法と境界要素法は有限要素法に比較して、未知数の次元が1次元小さい点で同一であり、さらに、線形の問題、開いた場の問題に適している点でも同一であるが、計算時間の短さ、高い精度を与えることなどで代用電荷法が優れている。

本文では、代用電荷法の性質を損なわずに代用電荷法を拡張することにより、精度の向上を図ろうというものである。この方法が今まで行われなかった背景には、計算量の増加と理論的な確立がなかったことがあげられる。しかし、現在コンピュータの速度が向上し、多少の計算量の増大はまかなえるようになってきた。そこで、この代用電荷法を一般化した式を現実に使用できることを計算して示した。

2. 代用電荷法の拡張

代用電荷法の公式を数学的にみると、2次元ではコーシーの積分定理に相当する。閉曲線Cの内部および境界上で $f(\zeta)$ が正則でCの内部の任意の点を z とすると (Fig. 1)

1994年9月22日受理

* 機械システム工学科

** 機械システム工学科大学院修士課程

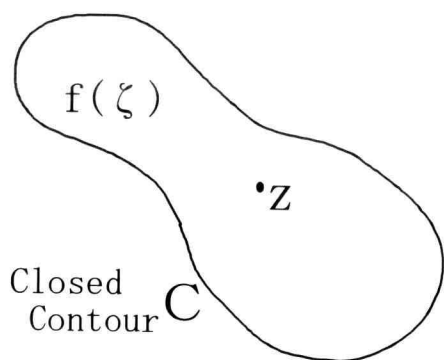


Fig. 1. Function Image

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1)$$

Z で積分し、その不定積分を $F(z)$ とすると

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \log(\zeta - z) d\zeta \quad (2)$$

台形公式で近似すると

$$F(z) \approx \sum_{i=1}^N a_i \log(\zeta_i - z) \quad (3)$$

(ここで a_i は定数)

この公式は、周期関数の一周期に渡る数値積分になるので、非常に精度がよいことが知られている。

また、 $f(z)$ を n 回微分してみると

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (4)$$

となり、これはグルサの公式となる。

上記と同様な方法により近似すると

$$f^{(n)}(z) \approx \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{(\zeta_i - z)^{n+1}} \quad (5)$$

となる。ここで、 $f^{(n)}(z)$ を改めて求める関数 $f(z)$ 、 $n+1$ を p とすると

$$f(z) = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{(\zeta_i - z)^p} \quad (6)$$

と近似できる。

代用電荷法にならない ζ_i を電荷点と呼び、電荷を配置する。

境界上に N 個の拘束点 (z_j) を置き、その点で境界条件を満たすように $a_i (i=1-N)$ を決定する。

$$f(z_j) = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{(\zeta_i - z_j)^p} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

これは、 a_i に関する連立一次方程式となり、ガウスの消去法で求めることができる。求めた a_i を (6) 式に代入することにより近似解 $f(z)$ を求めることができる。

このように、代用電荷法をもとにコーシーの積分定理、グルサの公式を適宜利用した式が (6) 式となる。

今回、(6) 式を利用して、簡単な問題をいろいろな p の場合について解き、代用電荷法との性能比較を行った。

3. 電 荷 配 置

代用電荷法の計算精度は仮想電荷と拘束点の配置に顕著に依存するので、良い配置を選ぶことが重要である。拘束点は電極表面上なので、まず拘束点の位置を定めそれに対応させて仮想電荷の位置を決めるのが普通である。

電荷配列と誤差

代用電荷の配列は、決め方によっては、大きな違いがある。良い配置と悪い配置では境界上の誤差が、2, 3 桁違うこともあり、この差は非常に大きい。ゆえに、配列と誤差の関係について知っておく必要がある。

対向型配置と千鳥型配置

対向型配置とは、境界上の拘束点と電荷点とを結び合わせる線を考えると、境界中にある 1 点で交わるように拘束点と電荷点を置く配置である。

対向型配置の隣り合う電荷点の中間点に設定した点を改めて電荷点とした配置の仕方を千鳥型配列という。今回は、一般に精度の高い対向型配置を用いた (Fig. 2)。

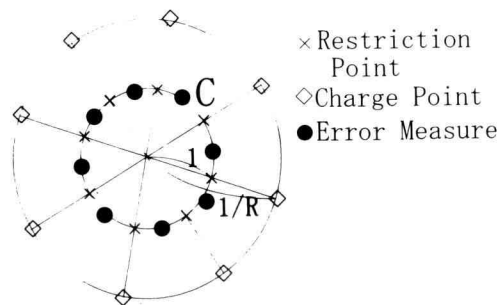


Fig. 2. Charge Position

境界縮小 (拡大)

境界を考えると、境界上に拘束点を取り、領域のほぼ中央で全境界を見通せる適当な点 O を考え、 O を縮小の中心として、縮小率 R で境界を縮小する。そのとき、拘束点の移る位置を電荷点とする。縮小率 R が 1 ならば電荷点は拘束点に一致し、0 ならば中心 O に全ての電荷を集中して置いたことになる。ここでは外部問題として説明したが、内部問題の場合は、境界を拡大率 E で拡大し、電荷点を決める。 E が 1 ならば電荷点は拘束点に一致し、 ∞ に近づけば無限遠に配置したことになる。 $R=1/E$ として、外部問題の場合と同じ形式でできる。

この電荷配置法は、

① パラメータが R だけである。

② R の大小が解くべき連立方程式の善し悪しに対応している。

の 2 点で意味がある。なめらかな境界の場合、境界上の誤差が縮小率 R に強く依存するという事実から、電荷配置を決定する問題は 1 変数 R のみの最適化問題として考えるのが現実的である。

連立方程式との関係

R が非常に 1 に近い場合を考えると、拘束点の最近接電荷の電位係数だけが飛び抜けて大きくなる。行列では、対角項のみが大きくなり、ほかの要素は対角項に比べて極端に小さい。つまり、連立方程式は、各々独立な式の集合に近くなり、もっとも解きやすく、連立方程式に性質は最良である。

R が 0 に近いと、行列式に各要素が同じ程度の大きくなり、桁落ちが起きやすくなり、解きにくくなる。 R が 1 から 0 へ変化するにつれ、連立方程式の性質は最良から最悪へ変化する。 R が大きいところではガウス・ザイデル法のような繰り返し計算でも解けるが、 R が小さくなるとガウスの消去法のような直接法でしか

解けなくなる。さらに小さくなると直接法でも解けなくなる。

R が小さいところで発生する桁落ちは、拘束点における誤差を調べればわかる。拘束点における誤差が丸め誤差に比べて 10^5 ほど大きいとすれば、5 桁の桁落ちが発生している。

(6) 式を用いても、代用電荷法と同様に高精度で近似できると期待できる。また、代用電荷法との類推から、電荷配置を代用電荷法と同様にする。なお、中心から拘束点までの距離を 1、電荷点までの距離を $1/R$ とした。これは、縮小率 R を 0 から 1 の範囲で収め、扱いやすくするためである。

4. 性能評価

今回は、簡単のため閉曲線 C は半径 1 の単位円とした。リーマンの写像定理や、ジューコフスキ翼形状の写像変換などの方法で円に写像して考察する場合がよくある。よって、円という特殊な閉曲線を用いても弊害はないと考える。

誤差を調べることによって性能評価を行った。問題の解およびその近似解である (6) 式は調和関数であるため、その差である誤差は調和関数になる。したがって、誤差関数の絶対値の最大値は、最大値原理より閉曲線 C の境界上に現れる。よって、評価点は境界上に置くことによって誤差の最大値を得る (Fig. 2)。

誤差評価の仕方は、理論式に評価点の座標を直接代入する方法、あるいは、試験解の電荷数よりも多くの電荷を持たせたものを理論解とする方法があるが、今回は試験解の電荷数の 3, 4 倍の電荷を持たせ、なおかつその点を理論式に直接代入する方法を用いた。なお、以下の式を誤差関数として用いた。

$$Eps(z) = f(z) - \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{(\xi - z)^p} \quad (8)$$

p が 1, 5, N が 8, 12, 16 を動くときの誤差と代用電荷法での誤差を Fig. 4 に示した。

このとき使用した厳密解は $\exp(z) + z$ である。他の関数の場合にも同様な結果が得られる。(sin(z) + z^2 の場合を Fig. 5 に示す。) この結果から、電荷数 N を増加させることによって、誤差は小さくなることがわかる。関数を (6) 式のように仮定してもよいことを示している。電荷数が多くなると桁落ち誤差がでて、精度が悪くなっているものがある。これは、計算精度を上げる

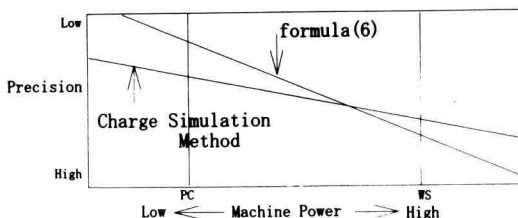
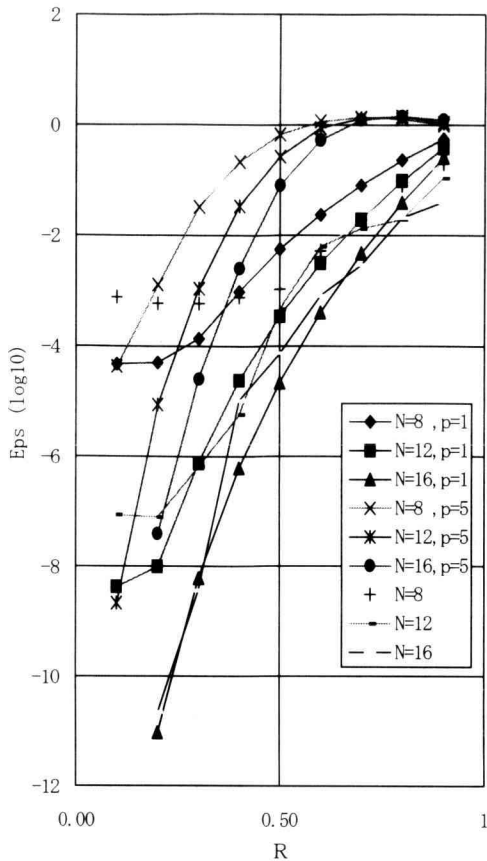
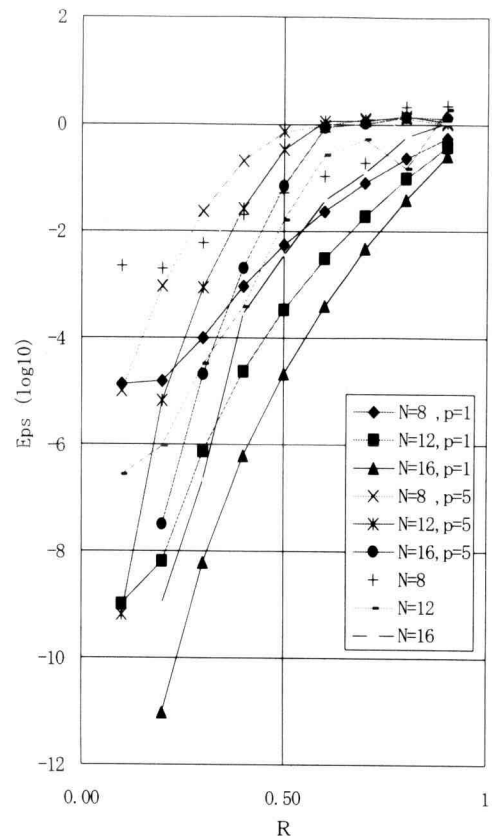


Fig. 3. Machine Power Image

Fig. 4. $e^z + z$ Fig. 5. $\sin(z) + z^2$

ことにより解消する。

次に、縮小率 R は、0 から 1 の範囲を移動する。 $R=1$ で拘束点と電荷点一致する。 $R=0$ で電荷を無限遠点に置いたことになる。一般に、電荷点が境界から離れるにつれ、急速に精度が良くなる。しかし、電荷点が遠すぎると、連立方程式の形が悪くなり、解きにくくなる。また、桁落ちが原因で誤差が大きくなる。

そして、 p は、 $(\xi - z)$ を p 乗しているの、 R が大きいところでは、誤差が大きくなってしまい、代用電荷法を用いた方が精度がよい。しかし、 R がある程度以上小さい範囲において、精度が良くなる。Fig. 5 を見ると、 $p=5$ で $N=8, 12$ の場合、 R が 0.1 の時に精度が良くなっているのがわかる。また、 $N=16$ の場合も含め精度が他の時より急速によくなっているのがわかる。このことから、 R がさらに小さくなれば p を大きくすればするほど精度が良くなるだろうという予測が

立つ。

計算結果では、 $N=8, 12$ のとき実際に代用電荷法よりも良いという結果が Fig. 4, 5 より得られる。

今回はパーソナルコンピュータの仕様上この精度までしか計算できなかったが、大型機やスーパーコンピュータなどを使用することにより、良い結果が得られると思われる。

今回、条件数も調べてみた。乗数 p が大きくなるにつれて、小さくなる傾向が見られた。この値は代用電荷法よりも小さい値であるので、この点からも精度がよいことがわかる。なお、条件数は本来固有値を求めて計算する必要があるが、簡単のためリンパック流の方法を使用した (Table 1)。

Table 1. Condition Number

R	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
N=8, p=1	1.005E+07	7.973E+04	4.792E+03	6.648E+02	1.467E+02	4.350E+01	1.571E+01	6.380E+00	2.670E+00
N=12, p=1	1.005E+11	4.983E+07	5.916E+05	2.599E+04	2.358E+03	3.415E+02	6.860E+01	1.730E+01	4.740E+00
N=16, p=1	1.005E+15	3.115E+10	7.304E+07	1.015E+06	3.774E+04	2.641E+03	2.895E+02	4.420E+01	8.080E+00
N=8, p=3	2.853E+05	2.419E+03	1.631E+02	2.663E+01	7.174E+00	2.749E+00	1.504E+00	1.120E+00	1.013E+00
N=12, p=3	1.316E+09	6.960E+05	9.241E+03	4.795E+02	5.460E+01	1.034E+01	2.913E+00	1.133E+00	1.041E+00
N=16, p=3	7.545E+12	2.492E+08	6.524E+05	1.069E+04	5.005E+02	4.751E+01	7.286E+00	1.947E+00	1.093E+00
N=8, p=5	3.246E+04	3.117E+02	2.550E+01	5.214E+00	2.010E+00	1.277E+00	1.061E+00	1.008E+00	1.000E+00
N=12, p=5	7.835E+07	4.681E+04	7.594E+02	5.147E+01	7.682E+00	2.341E+00	1.300E+00	1.042E+00	1.001E+00
N=16, p=5	2.757E+11	1.027E+07	3.281E+04	7.075E+02	4.607E+01	6.102E+00	1.930E+00	1.138E+00	1.005E+00
N=8	3.040E+07	3.829E+05	2.985E+04	4.957E+03	1.286E+03	4.579E+02	1.940E+02	1.017E+02	5.040E+01
N=12	5.003E+11	3.895E+08	6.012E+06	3.193E+05	3.382E+04	5.203E+03	1.472E+03	4.724E+02	1.619E+02
N=16	6.970E+15	3.386E+11	1.029E+09	1.189E+07	6.446E+05	5.928E+04	8.967E+03	1.769E+03	4.018E+02

5. ま と め

今回の研究の結果 (6) 式でも,十分に代用電荷法と同等の近似ができることがわかった。また,今回は C++ 言語を用いたため,パーソナルコンピュータを使い,大型機への移植ができなかったが,大型計算機の 4 倍精度を使った FORTRAN プログラムで行った場合に, 10^{-18} の精度以上の計算では,代用電荷法よりもよい精度を得ることができた。

代用電荷法と同様に, N が大きく, R が小さくなるにつれて,計算精度が高くなることがわかった。また, p が大きくなるにつれて,計算精度が良くなることもわかった。しかし,計算精度が上がるにつれて,計算量が多くなる。乗数 p は,計算機の精度が追いつかなければ,代用電荷法の方が有利である。Fig. 3 で PC 系までの能力の計算機であれば代用電荷法の方がよく, WS 系までの能力を持つ計算機であれば (6) 式の方が有効である。

6. 結 論

今回の研究の結果,この方法は代用電荷法よりも有利な特徴を持っており,今後メモリの増大,計算機精度桁数の向上などのハードウェア,ソフトウェアの進

歩があれば,代用電荷法よりも利用価値のあるものになると思われる。また,今回の研究は 2 次元であるので,今後 3 次元での解析に利用できるか検討すべきである。

今回は,理論ではなく数値実験のみの傾向を調べてみただけであるので,今後理論および無限精度での計算など更なる研究が必要であろう。

参 考 文 献

- 1) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版 (1983).
- 2) 有馬朗人: 複素関数論, 共立出版 (1991).
- 3) DAVID KAHANER・CLEVE MOLER・STEPHEN NASH: NUMERICAL METHODS AND SOFTWARE, Prentice-Hall International (1989).
- 4) S.Murahashi H.Kuhara: An Approximate Method to Solve Two-Dimensional Laplace's Equation by Means of Superposition of Green's Functions on a Riemann Surface., Journal of INFORMATION PROCESSING Vol.3 No.3 (1980), pp. 127-139.