

クリーネ論理関数族の主項展開と簡単形に関する考察

荒木 智行*・異 久行*・向殿 政男**

Some Consideration on a Disjunction of All the Prime Implicants and
a Minimal Disjunctive Form of a Family of Multiple-valued
Kleenean Switching Functions

Tomoyuki ARAKI, Hisayuki TATSUMI and Masao MUKAIDONO

Abstract

It has been well known that Nelson theorem is a base for deriving all the prime implicants of a binary switching function and Clause Selection Method executes it efficiently. We propose a improved Clause Selection Method generalized to a family of multiple-valued Kleenean switching functions. Further, we propose an efficient algorithm to minimize these functions. It is an application of the proposed Clause Selection Method and we have succeeded in reducing unessential phrases that are generated in the middle of minimization.

1. は じ め に

2 値論理関数の主項を求めるための手法として Nelson の定理²⁾ がよく知られている。Nelson の定理は、乗法形式で与えられた論理関数を加法形式に展開することを必要とする。節展開法⁴⁾ は、これを効率良く行うための手法である。クリーネ論理関数族の中には、Nelson の定理を拡張した定理が成立する関数があることが知られている^{6,7)}。本論文では、これらの主項展開を求める方法として節展開法が拡張できることを示す。節展開法は山口によりファジィ節展開法⁵⁾ と名付けられ、クリーネ論理関数族の一つであるファジィ論理関数に対して拡張されているが、主項展開を求めるものではなく、最簡形を求める中間の段階としての拡張がなされている。本論文では、節展開法を主項展開を求める手法として位置付け、ファジィ論理関数、多値クリーネ論理関数、定数係数を持ったファジィ論理関数等をその特殊な場合として含むクリーネ論理関数族に対して一般化を行い、そのためのアルゴリズムを示す。更に、いかなる最簡形にも現われない主項 (不

必要項) をなるべく含まない論理式表現を狭義のクリーネ関数族に関して求めることができることを示し、そのアルゴリズムを示す。

2. 諸 準 備

ここではまずクリーネ論理関数族の定義を明らかにし、以降の議論で必要となる定義、定理について述べる。

[定義 1] クリーネ論理関数族とはクリーネ論理の公理 (k1) 交換律, (k2) 結合律, (k3) 吸収律, (k4) 分配律, (k5) べき等律, (k6) ド・モルガン律, (k7) 復帰律, (k8) 最小元の存在, (k9) 最大元の存在, (k10) クリーネ律, を満たすモデルであり、論理式で表現できる関数の集合である。変数の数は無限個でも良いが、本論文では有限個 (n 個) とする。このとき論理式は次のように帰納的に定義される。

(D1.1) 変数 x_1, x_2, \dots, x_n , 定数 c_1, c_2, \dots, c_t は論理式である。

(D1.2) F が論理式であれば $\sim F$ も論理式である。

(D1.3) F, G が論理式であれば、 $F \cdot G, F \vee G$ は論理式である。

1994 年 9 月 16 日受理

* 情報工学科

** 明治大学 理工学部 情報科学科

(D1.4) (D1.1)~(D1.3)で定まるもののみが論理式である。

以降、特に誤解が生じない限り論理式とそれの表現する関数は同一視する。論理演算は、本論文では $x \cdot y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, $\sim x = 1 - x$ を採用する。また、変数 x_i のとる真理値および定数 c_i の値は、有限基数 (m 値) の場合は、 $0, 1/(m-1), 2/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1$ であり、無限基数の場合、実数閉区間 $[0, 1]$ の任意の値である。以上で定まるものを**広義のクリーネ論理関数族**という。クリーネ論理の公理に (k11) 中心 $\sigma = \sim \sigma$ なる σ の存在、を付け加えたとき、それを満足するモデルである論理関数の集合を**狭義のクリーネ論理関数族**という。□

以降、単にクリーネ関数族といった場合には広義のクリーネ関数族の意味で用いる。定数または真理値の集合を表わすのには記号 V を用いる。また V の元について、 $1/2$ を超えない最大の V の元を h^0 , $1/2$ より小さくない最小の V の元を h^1 と記すことにする。広義のクリーネ関数族は $FW(V) = \{f \mid f: V^n \rightarrow V, \{0, 1\} \subseteq V \subseteq [0, 1], f \text{ は論理式で表現される}\}$ のような写像の集合として $FW(V)$ と記される。狭義のクリーネ関数族とは、具体的には V の元として中心 $1/2$ を含む関数の集合のことをいう。よって $h^0 = h^1 = 1/2$ である。無限基数の論理関数、例えばファジィ論理関数、定数係数を持ったファジィ論理関数は狭義のクリーネ関数族に属する。また、有限基数でも奇数基数の多値クリーネ論理関数は狭義のクリーネ関数族に属する。しかしながら、偶数基数の多値クリーネ論理関数は広義のクリーネ関数族には属するが狭義のクリーネ関数族には属さない。狭義のクリーネ関数族を $FN(V)$ と記すことにする。

[定義2] 変数 x_i とその否定 $\sim x_i$ および定数のことを**文字**という。特に、定数を含めないときは**変数の文字**という。□

[定義3] $f \in FW(V)$ には、次のように3つのタイプの積項と和項がある。積項については、

(Type 1) 定数 ($> 1/2$) を含み、すべての i について $x_i, \sim x_i$ が同時に現われないもの。

(Type 2) 定数 ($\leq 1/2$) を含み、すべての i について $x_i, \sim x_i$ が同時に現われないもの。

(Type 3) ある i について $x_i, \sim x_i$ を同時に含むもの。定数が省略された場合は、 h^1 が定数として含まれ

ているものと見なす。

Type 1 の積項を**単積項**といい、Type 2, Type 3 の積項を**相補項**という。和項については、

(Type 1) 定数 ($< 1/2$) を含み、すべての i について $x_i, \sim x_i$ が同時に現われないもの。

(Type 2) 定数 ($\geq 1/2$) を含み、すべての i について $x_i, \sim x_i$ が同時に現われないもの。

(Type 3) ある i について $x_i, \sim x_i$ を同時に含むもの。定数が省略された場合は、 h^0 が定数として含まれているものと見なす。

Type 1 の和項のことを**単和項**といい、Type 2, Type 3 の和項を**相補和項**という。□

[定義4] 相補項(相補和項)で、すべての変数を含み、定数として $h^1(h^0)$ を含むものを**相補最小項(相補最大項)**という。

任意の相補項は相補最小項の和で、また任意の相補和項は相補最大項の積で表現できる。

(例1) 3変数の Type 3 の相補和項の場合。但し、 $V = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ とする。

$$\begin{aligned} & x_1 \vee \sim x_1 \vee x_2 \\ &= x_1 \vee \sim x_1 \vee x_2 \vee x_3 \cdot \sim x_3 \\ &= (x_1 \vee \sim x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3) \\ &= (x_1 \vee \sim x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee 1/3) \cdot (x_1 \vee \sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3 \vee 1/3). \end{aligned}$$

(例2) 3変数の Type 3 の相補和項の場合。但し、 $V = [0, 1]$ とする。

$$\begin{aligned} & x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \\ &= x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee x_3 \cdot \sim x_3 \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3) \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee x_3 \vee 1/2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3 \vee 1/2). \end{aligned}$$

[定義5] $f \in FW(V)$ が単積項と相補最小項の和で表現されているとき f は**主加法標準形**であるという。また単和項と相補最大項の積のときは**主乘法標準形**であるという。□

[定理1]^{2,6)} $f \in FW(V)$ は主加法標準形(主乘法標準形)で一意に表現できる。(証明略)

[定義6] $f \in FW(V)$ の積項 α について、 $\alpha(a) \leq f(a) (\forall a \in V^n)$ が成立するとき、 α を f の**内項**とい

う。 f の内項のうち、それから文字を取り除く、または定数を大きくしたら、もはや f の内項でなくなるものを主項という。□

[定義 7] すべての主項の和を主項展開という。□

[補題 1]⁶⁾ $f, g \in FW(V)$ をそれぞれ主項展開で表わされた論理式であるとする。このとき $f \cdot g$ を加法形式に展開して $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_s$ を得たとする。このとき $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_s$ は関数 $f \cdot g$ の主項展開である。

(証明略)

[定理 2]⁶⁾ $f \in FW(V)$ が主乗法標準形 $f = E_1 \cdot E_2 \dots E_s \cdot D_1 \cdot D_2 \dots D_t$ (但し、 E_i は単和項、 D_j は相補最大項) で表現されているとき、これを加法形式に展開して $f = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ を得たとする。このとき、 $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ は f の主項展開である。(証明略)

[定義 8] $f \in FW(V)$ を表現する加法形式のうちで次の (1), (2), (3) の優先順位で条件を満たすものを f の最簡形という。

(1) 項数最小 (2) 文字数最小 (3) 変数の文字数最小 □

[定理 3] 最簡形は主項の和で表わせる。(証明略)

[定義 9] $f \in FW(V)$ のいかなる最簡形にも現われる主項を必須主項という。また、 $f \in FW(V)$ のいかなる最簡形にも現われない主項を不必要項という。□

[定理 4] 単積項はすべて必須主項である。

[補題 2] $f, g \in FW(V)$ とし、 $g = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t$ を g の主項展開であるとする。また、 C を Type 2 の相補和項であるとする。 $f = g \cdot C$ なる関係があるとするとき f を加法形式に展開して $f = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_s$ を得たとする。このとき $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_s$ は f の主項展開である。

(証明) C が相補最大項である場合は補題 1 より、この補題は成立する。 C が相補最大項でない場合を考える。問題を小さくするために、 C はひとつの変数 x_k のみを含まいとして証明する。 C は Type 2 の相補和項であることから $C = C^0 \vee p$ (但し、 C は互いに相補的でない変数の文字の和であり、 p は $p > 1/2$ なる定数である。) このとき、 $C = C \vee x_k \cdot \sim x_k =$

$(C^0 \vee p \vee x_k) \cdot (C^0 \vee p \vee \sim x_k)$ のように C は相補最大項の積に展開できる。このとき、

$$\begin{aligned} f &= g \cdot (C^0 \vee p \vee x_k) \cdot (C^0 \vee p \vee \sim x_k) \\ &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot (C^0 \vee p \vee x_k) \cdot (C^0 \vee p \vee \sim x_k). \end{aligned} \quad \dots (L.2.1)$$

相補最大項はそれ自身を $FW(V)$ の関数と見たとき主項展開を表わしているので補題 1 より (L.2.1) 式を加法形式に展開したものは主項展開である。クリーネ論理では結合律が成立するので展開の順序には依存しない。よって (L.2.1) 式の後ろの 2 つの和項から展開する。 $(C^0 \vee p \vee x_k) \cdot (C^0 \vee p \vee \sim x_k) = C^0 \vee p \vee x_k \cdot \sim x_k$ なので

$$\begin{aligned} f &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot (C^0 \vee p \vee x_k \cdot \sim x_k) \\ &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot C^0 \\ &\quad \vee (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot p \\ &\quad \vee (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k. \\ f &= g_1 \vee g_2 \vee g_3 \text{ とすると,} \\ g_1 &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot C^0 \\ g_2 &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot p = \bigcup_{i=1}^t (p \cdot \beta_i), \\ g_3 &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k = \bigcup_{i=1}^t (x_k \cdot \sim x_k \cdot \beta_i). \end{aligned}$$

ここで $p > 1/2 \geq x_k \cdot \sim x_k$ なる関係があることから $p \cdot \beta_i > x_k \cdot \sim x_k \cdot \beta_i$ が成立する。よって $f = g_1 \vee g_2 \vee g_3$ を加法形式に展開したとき g_3 を展開して得られた積項はすべて g_2 を展開して得られた積項に包含され省略されてしまう。よって g_3 から得られる積項はすべて主項とはなり得ない。よって、

$$\begin{aligned} f &= g_1 \vee g_2 \\ &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot p \vee (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k \\ &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot p \vee (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k \\ &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot (C^0 \vee p) \\ &= (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot C \end{aligned}$$

この場合補題は満たされた。 C に x_k 以外の変数が含まれない場合も同様に証明できる。(証明終)

[定理 5] $f \in FW(V)$ が乗法形式 $f = E_1 \cdot E_2 \dots E_s \cdot H_1 \cdot H_2 \dots H_t$ (ただし、 E_i は単和項、 H_j は Type 2 の相補和項) で表現されているとき、これを加法形式に展開して $f = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ を得たとする。このとき、 $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ は f の主項展開である。

(証明) 補題1および2より明らかである。

[補題3] $f, g \in FN(V)$ とし, $g = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t$ を g の主項展開であるとする。また, C を Type 3 の相補和項であり, 変数 $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$ を含まないものとする。但し $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$ は x_1, x_2, \dots, x_n のいずれかである。 $f = g \cdot C$ なる関係があるとき $g \cdot (C \vee 1/2)$ を加法形式に展開して $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_s$ を得たとする。このとき $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_s$ は f の主項展開である。

(証明) いま, 1つの変数 x_{ik} のみを含まないとして証明する。 C は Type 3 の相補和項なので $C = (C \vee 1/2 \vee x_{ik}) \cdot (C \vee 1/2 \vee \sim x_{ik})$ と相補最大項の積に展開できる。このとき, $g \cdot (C \vee 1/2 \vee x_{ik}) \cdot (C \vee 1/2 \vee \sim x_{ik})$ を加法形式に展開したものは補題1より $f = g \cdot C$ の主項展開を表わしている。このとき,

$$(C \vee 1/2 \vee x_{ik}) \cdot (C \vee 1/2 \vee \sim x_{ik}) = C \vee 1/2 \vee (1/2) \cdot x_{ik} \cdot \sim x_{ik} \text{ であることから}$$

$$f = l_1 \vee l_2 \vee l_3, \dots \quad (L3.1)$$

ただし,

$$l_1 = (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot C, \dots \quad (L3.2)$$

$$l_2 = (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot (1/2) = \bigcup_{i=1}^t ((1/2) \cdot \beta_i), \dots \quad (L3.3)$$

$$l_3 = (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot (1/2) \cdot x_k \cdot \sim x_k \\ = \bigcup_{i=1}^t ((1/2) \cdot x_{ik} \cdot \sim x_{ik} \cdot \beta_i). \dots \quad (L3.4)$$

と表現できる。ここで $1/2 \geq (1/2) \cdot x_{ik} \cdot \sim x_{ik}$ が常に成立していることから $1/2 \cdot \beta_i \geq (1/2) \cdot x_{ik} \cdot \sim x_{ik} \cdot \beta_i$ となり, l_3 を展開して得られる積項はすべて l_2 を展開して得られる積項に包含され, 省略される。したがって, f の主項展開は

$$f = l_1 \vee l_2 \\ = (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot C \vee (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot (1/2) \\ = (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot (C \vee 1/2)$$

となり, この場合補題は満たされた。 x_{ik} 以外の複数の変数が C に現われない場合も同様に証明できる。

(証明終)

[補題4] $f, g \in FN(V)$ とし, $g = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t$ を g の主項展開であるとする。また, C を Type 3 の相補和項であるとする。 $f = g \cdot C$ なる関係があるとき f を加法形式に展開して $f = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ を得たとする。このとき $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ は f の主項の和である。もし f の主項である α_0 が $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ の中に現われない場合は α_0 は不必要項である。

(証明) C が相補最大項のとき補題1により $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_s$ は主項展開となるので, この補題は成立する。 C が相補最大項でない場合は次の条件(a), (b)の少なくとも1つが成立する場合である。

(a) C に変数 x_k が存在しない。

(b) C に定数 $1/2$ が含まれない。

補題3の証明におけるように f の主項展開は (L3.1) 式のように表現できる。また定理4により単積項はすべて必須主項であるから, 不必要項はすべて相補項である。したがって, (L3.2) 式に現われる l_1 の積項によって (L3.3), (L3.4) 式における l_2, l_3 の相補積項がすべてカバーされることを証明すればよい。また, 補題3の結果から l_3 を展開することによって得られる積項はすべて l_2 を展開して得られる積項により包含され省略されるので, l_2 の相補積項が l_1 の積項によりすべてカバーされることを証明すれば十分である。いま, C は Type 3 の相補和項であることから, 少なくとも一組の相補的に変数の文字が存在する。その変数を x_k とする。このとき $C = C^0 \vee x_k \vee \sim x_k$ と表わすことができる。このとき (L3.2) 式より

$$l_1 = (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_t) \cdot (C^0 \vee x_k \vee \sim x_k) \\ = \bigcup_{i=1}^t (\beta_i \cdot C^0) \vee \bigcup_{i=1}^t (x_k \vee \sim x_k) \cdot \beta_i \quad \dots \quad (L4.1)$$

(L4.1) 式の後半部分と (L3.3) 式の l_2 の積項の間には $x_k \vee \sim x_k \geq 1/2$ が成立することから $(x_k \vee \sim x_k) \cdot \beta_i \geq (1/2) \cdot \beta_i$ が成立し, l_2 の積項はすべてカバーされる。

(証明終)

補題3および4により $f \in FN(V)$ については次の定理が導かれる。

[定理6] $f \in FD(V)$ が乗法形式 $f = E_1 \cdot E_2 \dots E_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \dots C_l$ (ただし, E_i は単和項, C_j は相補和項) で表現されているとき, これを加法形式に展開して $f = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ を得たとする。このとき, $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ は主項の和である。もし f の主項である α_0 が $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_u$ の中に現われない場合は α_0 は不必要項である。

(証明) 定理5および補題3および4より明らかである。 (証明終)

定理6は $f \in FN(V)$ については一般には成立しないが, ある条件のもとで成立させることは可能である。ここでは詳細は述べない。

[性質1] α を相補項, C を相補和項とするととき,
 $\alpha \cdot C = \alpha$ である。□

3. 節展開法の一般化

2節で得られた結果からクリーネ論理関数族に属する論理関数の主項展開を求めるために節展開法の一般化アルゴリズムを示す。基本的な一般化としては定理2の結果から $f \in FW(V)$ なる任意の関数の主乘法標準形を効率良く加法形式に展開することにより主項展開は得られるが、ここでは補題2, 3および4, 定理5の結果を用いて、より効率良く主項展開が求められるよう節展開法を一般化する。また、性質1は、最終的に得られる積項が相補項になる場合には、相補和項に対する展開は不要であることを示している。この事実により、木の節点数を減少させるための工夫が、以下のアルゴリズムの S1, S2 選択の部分で適用できる。

[アルゴリズム1] (一般化された節展開法)

[Step1] 乗法形式で与えられた $f \in FW(V)$ について、もし $f \in FN(V)$ であれば f の Type 3 の相補和項 C を $C \vee 1/2$ で置き換える。 $f \in FN(V)$ の場合は Type 3 の相補和項 C を相補最大項の積に展開する。そして各和項を構成する文字の集合を集めたものを節点とする。この節点は木の根になり、非終端節点である。

[Step2] 木の非終端節点を S とする。

(S1 選択) もし S に至る直前の枝の文字が定数 ($\leq 1/2$) であった場合、 S から相補和項以外で文字数最小、頻度と最大の和項を選び、それを C_0 とする。

(S2 選択) もし S にそれ以前の枝の変数の文字の否定 (x_i か $\sim x_i$) を含む和項が存在し、更にこの和項以外に相補和項があれば、この x_i か $\sim x_i$ を含む和項を C_0 とする。そのような和項が補数ある場合には、それらの内で文字数最小、頻度と最大の和項を選ぶ。

(S3 選択) S1, S2 選択に該当しない場合、 S から文字数最小、頻度と最大の和項を選び、それを C_0 とする。

以上で選ばれた C_0 に含まれる文字を、頻度順に並べたものを O_S とする。ここで $O_S = \langle L_1, L_2, \dots, L_i, \dots \rangle$ と記す。但し、各 L_i はラベルである。

[Step3] S から枝出しを以下のように行う。

- (a) S より O_S の順位の高い文字から枝出しを行い、その枝には L_i とラベルを付ける。新しい節点 $S_k(L_i)$ は、 L_i を含む和項を消去し、更に S1, S2 選択のときには、 $S_k(L_i)$ の中のすべての相補和項も消去する(性質1による)。 $S_k(L_i)$ が空ならば有効節点とする。
- (b) $S_k(L_i)$ より、 L_1, L_2, \dots, L_{i-1} を取り除く。この結果、空となる和項があれば無効節点とする。
- (c) 操作(a), (b)の結果、有効節点でも無効節点でもなければ、その節点は非終端節点である。

[Step4] 枝出しされていない非終端節点がなくなるまで、Step2, Step3 を繰り返す。

[Step5] 得られた木について、根から有効節点へ至る道に付けられた枝のラベルとなっている各文字の積を、すべての有効節点について求める。これらはすべて f の内項であり、他の項に包含されるものをすべて取り除けば、残ったものが f のすべての主項である。
 (アルゴリズム終わり)

4. 最簡形について

通常、論理関数の簡単化は次のような2つのステップを通して行われることが多い。

- (1) f のすべての主項を見い出す。
- (2) f を被覆する最小の主項の組み合わせを見い出す。

しかしながら簡単化を考える場合、ステップ(1)で必ずしもすべての主項を見い出す必要はなく、不必要項はなるべく除去されている方が望ましい。従って、 $f \in FN(V)$ に限りステップ(1)で行う手法として定理6より、次のようなアルゴリズムが考えられる。

[アルゴリズム2]

[Step1] 乗法形式で表現された $f \in FN(V)$ について、各和項を構成する文字の集合を集めたものを節点とする。この節点は木の根になり、非終端節点である。

[Step2] ~ [Step4] はアルゴリズム1と同じ。

[Step5] 得られた木について、根から有効節点へ

至る道に付けられた枝のラベルとなっている各文字の積を、すべての有効節点について求める。これらはすべて f の内項であり、他の項に包含されるものをすべて取り除けば、 f の最簡形に現われ得る主項はすべて含まれている。
(アルゴリズム終わり)

ステップ(2)に関しては、最小被覆問題に帰着される。しかしながら、 $f \in FW(V)$ ではファジィ論理関数⁸⁾同様、単積項は必須主項となり、また、相補最小項は相補項の主項によってのみ被覆されるので、 $f \in FN(V)$ に関してはアルゴリズム2で、また $f \in FN(V)$ に関してはアルゴリズム1で得られた相補項と主項と f の主加法標準形に現われる相補最小項との間で最小被覆をとれば良い。

5. あ と が き

本論文では、クリーネ論理関数族を定義し、節展開法がクリーネ論理関数族に対して一般全できることを示し、主項展開および最簡形を求めるための効率の良いアルゴリズムを示した。しかしながら、これらのアルゴリズムは改善できる部分が多く残っており、計算オーダーの評価、および計算機による実験を行い、更に良いアルゴリズムとすることが今後の課題である。また、クリーネ論理関数族は多値ハードウェアの設計⁹⁾、あいまいさを取り扱えるデータベースの問い合わせ言語等と密接な関係があり、その表現形式は目的により異なってくると思われる。本論文では、加法形式、乗法形式に基づいた主項展開、最簡形の導出を試みたが、今後は利用されるアプリケーションに適した表現形式、特にあいまいさを取り扱えるデータベース

への利用を考え、考察していくつもりである。

参 考 文 献

- 1) 高木, 向殿: 多値クリーネ関数の基本的性質, 信学論 (D-I), Vol. J-74-D-I, No. 12, pp. 797-804 (1991).
- 2) 高木, 向殿: 多値クリーネ関数の論理式表現, 信学論 (D-I), Vol. J-75-D-I, No. 2, pp. 69-75 (1992).
- 3) Nelson, R.J.: SIMPLEST NORMAL TRUTH FUNCTION, J. Symbolic Logic, Vol. 20, No. 2, pp. 105-108 (1954).
- 4) 上林, 岡田, 矢島: 節展開法を用いた論理関数の主項の生成, 信学論 (D), Vol. J-62-D, No. 2, pp. 89-96 (1979).
- 5) 山口: ファジィ節展開法を用いたファジィ論理関数のファジィ主項生成アルゴリズム, 信学論 (D), Vol. J-73-D-I, No. 8, pp. 657-663 (1990).
- 6) Araki, T., Tatsumi, H., Mukaidono, M., Ohmae, Y.: On the Fuzzy Switching Function with Arbitrary Constants and Generalization of Nelson Theorem for Fuzzy Logic, 1st Asian Fuzzy Systems Symposium, pp. 158-165 (1993).
- 7) 荒木, 巽, 向殿: Nelson の定理の拡張について 多値論理研究ノート, Vol. 15, No. 12, pp. 12_1-12_10 (1992).
- 8) Mukaidono, M.: An Improved Method for Minimizing Fuzzy Switching Functions, 14th ISMVL, IEEE, pp. 196-201 (1984).
- 9) 畑, 大和: クリーネ係数を含む多値論理表現とその簡単化, 多値論理研究ノート, Vol. 16, No. 1, pp. 1_1-1_8 (1993).