

OU 過程の Wavelet による分析と孤立波形検出への応用

立 花 康 夫*・嶋 明 弘**

On the Analysis of OU Process by Wavelet and its Application
to the Detection of Isolated Signal

Yasuo TACHIBANA* and Akihiro SHIMA**

Abstract

This paper deals with a detection method of isolated useful signal in the ground noise. We propose a subset of the spectrum of Haar's and Daubechies' Wavelet. The ratio of the power spectrum sum on the proposed subset and total power spectrum sum is used for the detection process. Also, we use OU (Ornstein-Uhlenbeck) process for the ground noise model and 1 period sinusoid function for the approximation of the useful signal. We show the appropriateness and effectiveness of the proposed method by some numerical examples.

1. は じ め に

背景雑音の中に突発的に生じる孤立した波形を検出する問題は地質学上の地震の発生⁽¹⁾や物流の通過の検出等多くの局面で見いだされる。従来より、雑音の中に通信波等のような継続的に存在する有為な信号が存在するか否かという問題は信号検出論として特に通信系の分野で深く研究されてきた。孤立状波形の検出に関しては砂原⁽²⁾がその理論的な根拠を与えている。観測してサンプルとして得られた信号が雑音のみの信号発生源からのものであるか、雑音だけではなく有為な信号が重畳されている信号発生源からのものであるかを判別するには統計的仮説検定論によらねばならない⁽³⁾。文献 (2) の中では尤度比による検出法が示されている。著者は Neyman-Pearson の最強力検定を用いて有意信号の検出率と誤検出率を求めその効果を論じている⁽⁴⁾。多くの場合、対象になる信号では背景雑音は定常的である。そのため、観測波形を確定波形として見れば概周期関数⁽⁵⁾と連続スペクトルの波形が加わったものである。このような確定信号は N. Wiener によれば一般調和解析⁽⁵⁾により周波数による

分解ができる。調和解析の結果として時間軸上で孤立していたパルス状の信号は周波数スペクトル領域では広範囲に広がる。そのために孤立状の有義信号の検出は周波数領域では困難となることが予想される。正弦波を基にした Fourier 解析ではなくて Wavelet 変換に基づいて⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾ 信号を展開したとき、その係数の分布を Wavelet スペクトルとするとこれが信号検出に有効であることが予想される。すなわち背景雑音の Wavelet スペクトルは通常の Fourier スペクトルと同じように広範囲に分布するであろうが、時間軸上で孤立した有義信号は Wavelet 変換の局在性⁽⁷⁾の性質に基づいて孤立した Wavelet スペクトル分布となることがある。これは Wavelet スペクトル領域で信号検出を実施することに効果があることを示している。著者らは既にこの考え方に基づき長い時間区間と短い時間区間での Wavelet パワースペクトルの比に基づく検出法を提案した⁽¹⁰⁾。しかしそこでは手法の提案に終わり理論的な効果の評価も数値的な検討もなされないうままであり具体的な効果の判断はなされなかった。

今回の論文ではこの基本的な考えを基に Haar⁽⁸⁾と Daubechies⁽⁹⁾の Wavelet に対して一つの部分スペクトルの概念を与え、それを基に数値的な検討を加えている。この論文では背景雑音は OU 過程 (Ornstein-Uhlenbeck Process)⁽¹¹⁾ であると考えてその Wave-

1995 年 9 月 19 日受理

* 電気電子工学科

** 三菱電機 (株) 情報技術総合研究所

let スペクトルの構造を与える。Wavelet としては台の有界な Haar⁽⁸⁾ と Daubechies⁽⁹⁾ の Wavelet を用いる。観測信号は 1 周期分の正弦波を用いる。時間領域で与えた 2 つのパラメータでこれら台の有界な Wavelet に対して一つの部分スペクトルの集合を定義する。まず、孤立波形はこの部分スペクトルにより完全に元の波形が復元できることを示す。この性質を用いて現在より有限時間過去にわたる観測値の Wavelet スペクトルの内、この部分集合の上のパワースペクトル部分和とパワースペクトルの総和の比により検出の指標を作成する。数値的なシミュレーション結果を実施し、この指標が背景雑音の中での孤立状波形の検出に有効であることを示す。

2 背景雑音

この論文で扱う背景雑音の性質を実際に即して与えることにする。現在このような信号の処理は計算機を用いたデジタル信号処理となる。サンプル周期を T_s として k を整数空間 Z の点 $k \in Z$ として時刻 $t = kT_s$ での信号 $\xi(t)$ の値を便宜的に $\xi(k)$ と表す。すなわち $\xi(*)$ において $*$ が実数 R に含まれればアナログ信号を Z に含まれればデジタル信号を表すことにする。そうすると $\xi(k)$ はデジタル信号である。ところで信号は時刻 t を定めると値の確定する確定信号と確率変数としてののみ定まる確率過程としての信号がある。背景雑音はこの確率過程である。そこで確率過程は大文字 $X(k)$ で表し、確定信号である観測値(サンプル値)を小文字 $\xi(k)$ で表す。有限個の時刻での観測値 $\xi(k-K+1), \xi(k-K+2), \dots, \xi(k)$ の相関関数や度数分布などの統計的な分析を行うと信号 $X(i)$ と $X(j)$ ($i \neq j$) は決して独立ではないがしかし $X(k-K+1), X(k-K+2), \dots, X(k)$ は全体で K 次の非特異(共分散行列が正則)な正規分布に従うことがわかる。このような信号 $X(t)$ は OU 過程 (Ornstein-Uhlenbeck Process)⁽¹¹⁾ であると言われる。OU 過程は良く研究されていてブラウン運動の事実上のモデルである。また OU 過程は 1 次系に Wiener 過程信号を印可させて発生させる。すなわち $W(t)$ を Wiener 過程とすると区間 $I_1 = [a_1, b_1] (a_1 \leq b_1)$ と $I_2 = [a_2, b_2] (a_2 \leq b_2)$ に対して $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ (空集合) ならば $E\{*\}$ は平均を表すとして

$$E\{(W(b_1) - W(a_1))(W(b_2) - W(a_2))\} = 0 \quad (1)$$

であり、また、

$$E\{(W(b_1) - W(a_1))^2\} = b_1 - a_1 \quad (2)$$

である。ここで $W(b) - W(a) (a \leq b)$ は平均 0, 分散 $b - a$ の正規分布に従う。実際、OU 過程 $B(t)$ は Wiener 過程 $W(t)$ により伊藤微分⁽¹¹⁾ の形式で 1 次方程式により

$$dB(t) + \alpha B(t)dt = \beta dW(t) \quad (3)$$

と表される。 α と β は適当な正の定数である。(3) 式を満たす $B(t)$ は

$$B(t) = \beta \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} dW(\tau) \quad (4)$$

で与えられる。従って

$$E\{B(t)\} = 0 \quad E\{B(t)B(s)\} = \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\alpha|t-s|} \quad (5)$$

となる。従って $B(t)$ は定常過程で自己共変量 $\gamma(t)$ とスペクトル測度 $F(\omega)$ は

$$\gamma(t) = E\{|B(t) - E\{B(t)\}|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega) \quad (6)$$

$$F(\omega) = \frac{\beta^2}{2\alpha} \left(\frac{\omega}{\omega^2 + \alpha^2} \right) \quad (7)$$

で与えられる⁽¹¹⁾。 $F(\omega)$ はすなわち OU 過程のパワースペクトルの分布を示している。 T を適当な正数としてヒルベルト空間 $L^2[0, T]$ の正規直交基を $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ とする。このとき

$$S_n = \int_0^T \varphi_n(t) dW(t) \quad (n=0, 1, \dots) \quad (8)$$

とすると $S_n (n=0, 1, \dots)$ は互いに独立で平均 0, 分散 1 の正規分布に従う確率変数である。このとき

$$B(t) = B_0 + \beta \sum_{n=0}^{\infty} S_n \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \varphi_n(\tau) d\tau \quad (9)$$

となる。ここで B_0 は $S_n (n=0, 1, \dots)$ と互いに独立で正規分布に従う確率変数で時間軸の基準により定まる。(9) 式は時刻 t を固定したときの性質であって確率パラメータを固定したときの時間の関数すなわち標本(見本過程)としての等式ではない。以上が背景雑音の確率的モデルとしての設定である。図 1 と図 2 は OU 過程発生例を示している。実際に観測される背景雑音はこれらのいずれかの形に近いものが多い。

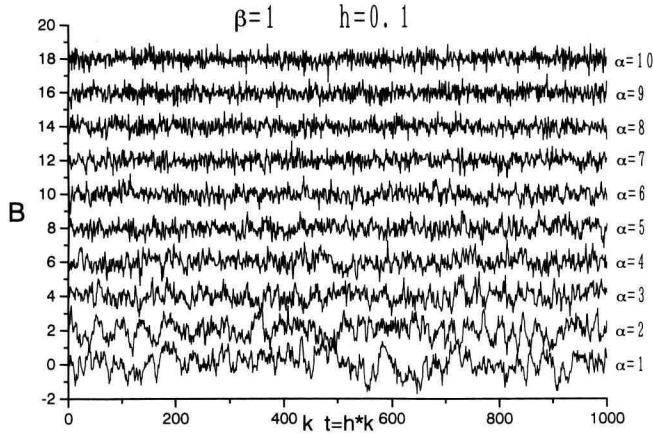


図 1. OU 過程発生例 1

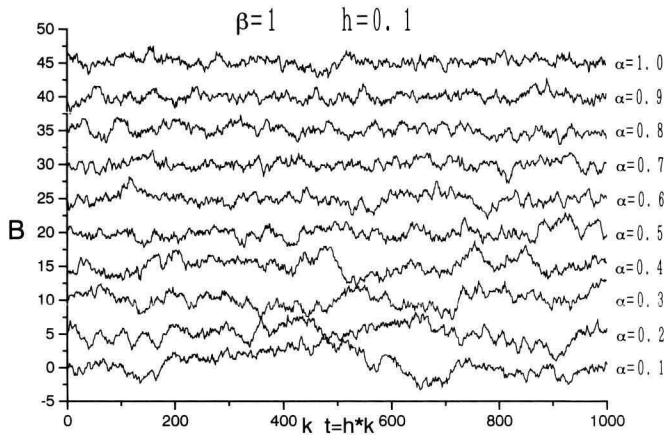


図 2. OU 過程発生例 2

3 多重解像度近似と Wavelet

Wavelet は Y. Meyer 等に端を発し S. Mallat⁽⁶⁾ や I. Daubechies⁽⁸⁾ 等を経て数学的に明確な姿を整えることになった。ここでは結果を利用する立場から公理論的な定義を与えておく。実数 \mathbf{R} 上のヒルベルト空間を $L^2(\mathbf{R})$ として、その部分空間の列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ が以下の条件を満たすとき多重解像度近似⁽⁶⁾ という。 $x \in \mathbf{R}$ として

$$1^\circ \quad V_j \subset V_{j+1} \quad j \in \mathbf{Z} \quad (10)$$

$$2^\circ \quad \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \text{ is dense in } L^2(\mathbf{R}) \quad \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} \quad (11)$$

$$3^\circ \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbf{Z} \quad (12)$$

$$4^\circ \quad f(x) \in V_j \Rightarrow f(x - 2^{-j}k) \in V_j \quad \forall j \in \mathbf{Z} \quad (13)$$

5° V_0 から $L^2(\mathbf{Z})$ 上への同型写像が存在し \mathbf{Z} 上のシフト演算と可換である。

ここで $L^2(\mathbf{Z})$ は自乗和有界な数列のなすヒルベルト空間である。すなわち、

$$L^2(\mathbf{Z}) = \left\{ \{a_j\}_{j \in \mathbf{Z}} : \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 < \infty \right\} \quad (14)$$

である。このような $L^2(\mathbf{R})$ の部分空間の列が存在しなければ議論は空虚になるが、幸いなことに V_0 として $L^2(\mathbf{R})$ の任意の関数の幅 1 の階段関数全体を考えると

上記の性質がすべて満足される。公理 5° より明確な唯一つの関数 $\phi(x)$ が定まりしかも $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は空間 V_0 の正規直交基となる。関数 $\phi(x)$ を多重解像度近似 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ の Scaling 関数という。 $\{\sqrt{2^j} \phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は公理 3° と 4° により空間 V_j の正規直交基となる。ところで

$$1/2 \phi(x/2) \in V_{-1} \subset V_0 \quad (15)$$

であるので $1/2 \phi(x/2)$ は $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ で展開できる。すなわち $\{h_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ が存在して

$$1/2 \phi(x/2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(x-k) \quad (16)$$

従って $\hat{\phi}(\omega)$ を $\phi(t)$ の Fourier 変換として

$$\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\omega k} \quad (17)$$

となる。すなわち数列 $\{h_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ は Scaling 関数 $\phi(t)$ 従って多重解像度近似 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を規定している。これは次の定理にまとめられる⁽⁶⁾。

定理 1

関数 $H(\omega)$ が多重解像度近似 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を規定するための必要十分条件は

$$(a) \quad |h_k| = O(1+k^2)^{-1} \quad (18)$$

$$(b) \quad |H(0)| = 1 \quad (19)$$

$$(c) \quad |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (20)$$

$$(d) \quad H(\omega) \neq 0 \quad \omega \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (21)$$

である。このとき

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H(2^{-k}\omega) \quad (22)$$

となる。次に公理 1° を考慮して V_{j+1} の中で V_j の直交補空間を O_j とする。すなわち、

$$V_{j+1} = V_j \oplus O_j \quad (23)$$

とする。関数 $H(\omega)$ に対して

$$G(\omega) = e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \quad (24)$$

とすると

$$\hat{\phi}(\omega) = G(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \quad (25)$$

として $\hat{\phi}(\omega)$ の Fourier 逆変換 $\phi(t)$ を多重解像度近似 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ の Wavelet 関数といい $\{\sqrt{2^j} \phi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は空間 O_j の正規直交基となる。ここで j を dilation, k を translation と呼ぶ。ところで公理 2° と (23) から

O_j は互いに直交した適当な整数 M_0 に対して

$$L^2(\mathbf{R}) = V_{M_0} \oplus \left(\bigoplus_{m=M_0}^{\infty} O_m \right) \quad (26)$$

が成立する。すなわち、関数 $\forall f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0} x - n) \rangle \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0} x - n) + \sum_{m=M_0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f(x), \sqrt{2^m} \phi(2^m x - n) \rangle \sqrt{2^m} \phi(2^m x - n) \quad (27)$$

のように直交展開される。ここで $\langle * \rangle$ は内積を表す。 M_0 は通常 $M_0 = 0$ とする。実はこのような性質の関数族はすでに Haar により知られていた⁽⁸⁾。以後 Scaling 関数と Wavelet 関数を総称して Wavelet と呼ぶ。

4 有限近似

多重解像度近似は詰まるところ適当な数列 $\{h_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ を与えて Scaling 関数 $\phi(x)$ (又は Wavelet 関数 $\psi(x)$) を与えることにより一意に定まる。I. Daubechies⁽⁸⁾ は適当な有限列を与えて台の有界な Scaling 関数 (と Wavelet 関数) を与えた。この関数 $\phi(x)$ はパラメータ $N (= 2, 3, \dots)$ で定まり、その台は $[0, 2N-1]$ である⁽⁹⁾。同じく Wavelet 関数 $\psi(t)$ の台は $[-(N-1), N]$ で与えられる。実はこの系列に入ると思われる $N=1$ に相当するのが Haar 関数 ($\phi(x)$ と $\psi(x)$ を含む) である^{(5),(8)}。先に述べた最も単純な多重解像度近似は Haar 関数により得られる。以後、我々は $N (= 1, 2, 3, \dots)$ として Haar 関数を含む Daubechies の関数による Wavelet のみを考える。 $\forall f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ は 2 節に述べたような確率過程の見本過程である場合にはその台は決して有界ではない。従って $\phi(x)$ と $\psi(x)$ の台が有界であっても (27) 式に現れた内積の積分の上下限は有界ではない。しかし $f(x)$ の台を $[0, 2N-1]$ とするようにこの区間の外部をゼロとすると、(27) 式に現れる内積は例えば

$$\langle f(x), \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0} x - n) \rangle = \int_0^{2N-1} f(x) \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0} x - n) dx \quad (28)$$

となる。従ってこの内積の値がゼロでない n は $n \in [n/0, nh/0]$ に限定される。(28) 式の右辺第 2 項の内積についても同じことが言える。従って

$$f(x) = \sum_{n=nl0}^{nh0} \langle f(x), \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0}x - n) \rangle \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0}x - n) \\ + \sum_{m=M_0}^{\infty} \sum_{n=nl(m)}^{nh(m)} \langle f(x), \sqrt{2^m} \phi(2^m x - n) \rangle \sqrt{2^m} \phi(2^m x - n) \quad (29)$$

となる。上記パラメータ $nl0$, $nh0$, $nl(m)$, $nh(m)$ は以下のように与えられる。

$$nl0 = -2(N-1) \quad (30)$$

$$nh0 = 2^{M_0}(2N-1)-1 \quad (31)$$

$$nl(m) = -(N-1) \quad (32)$$

$$nh(m) = 2^m(2N-1) + N-2 \quad (33)$$

Haar 展開の場合には $N=1$ であるので

$$nl0 = nh0 = 0, nl(m) = 0, nh(m) = 2^m - 1 \quad (34)$$

となる。これは古くから知られていた⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾。(29)式で無限大となるのは dilation m のみである。(29)式で m を M までに制限した

$$f(x) \approx f_M(x) = \sum_{n=nl0}^{nh0} \langle f(x), \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0}x - n) \rangle \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0}x - n) \\ + \sum_{m=M_0}^M \sum_{n=nl(m)}^{nh(m)} \langle f(x), \sqrt{2^m} \phi(2^m x - n) \rangle \sqrt{2^m} \phi(2^m x - n) \quad (35)$$

が我々の用いる有限展開である。

5. Daubechies の Wavelet の計算

Daubechies の Wavelet を定める係数 $\{\sqrt{2}h_j\}_{j=0}^{2N-1}$ は文献(9)に $N=2 \sim 10$ の範囲で 12 桁の精度で与えられている。 $\phi(x)$ の計算については文献(9)に $\phi(x)$ に収束する関数の例が示されている。また C.A. Micchelli の再分割法の紹介が文献(7)にある。ここでは恒等式(16)から

$$1/2\phi(x/2) = \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi(x-k) \quad (36)$$

が得られる。(36)式よりただちに

$$(1-2h_0)\phi(0) = 0 \quad (37)$$

$$(1-2h_{2N-1})\phi(2N-1) = 0 \quad (38)$$

が得られる。少なくとも $N=2 \sim 10$ では

$$1-2h_0 \neq 0 \quad 1-2h_{2N-1} \neq 0 \quad (39)$$

であるので

$$\phi(0) = 0 \quad \phi(2N-1) = 0 \quad (40)$$

が得られる。そこで、 $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\phi(k) = 0 \quad (k \leq 0, k \geq 2N-1) \quad (41)$$

である。(41)式の条件から(36)式は未知数 $2N-2$ 、方程式の数 $2N-2$ の線形同次方程式となる。また、 $\phi(x) \neq 0$ であり(36)式と $\phi(x)$ は連続関数であることから $\phi(x)$ は全ての整数点でゼロとなることはない。そこで(36)式の $2N-2$ 個の線形方程式は 1 次従属であり解はその内の最大 $2N-3$ 個の 1 次独立な方程式から定まる。そこで(36)式で

$$\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & \cdots & \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ h_{2N-1} & h_{2N-2} & \cdots & h_3 & \\ 0 & \ddots & & \vdots & \\ \ddots & & h_{2N-1} & h_{2N-3} & h_{2N-3} \end{bmatrix} \leftarrow N \quad (42)$$

$$\mathbf{F} = [\phi(1) \ \phi(2) \ \cdots \ \phi(2N-3)]^T \quad (43)$$

$$\mathbf{b} = 2[0 \ \cdots \ 0 \ h_0 \ h_2 \ \cdots \ h_{2N-4}]^T \quad (44)$$

として最初の $2N-3$ 個の方程式を書き直すと

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{F} = \mathbf{b} \phi(2N-2) \quad (45)$$

となる。 T は転置記号である。少なくとも $N=2 \sim 10$ で $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ は正則なので(42)式より

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \phi(2N-2) \quad (46)$$

となる。ここで例えば(45)式で $\phi(2N-2) = 1$ として得られる $\{\phi(j)\}_{j=1}^{2N-2}$ は実は正しい値とは定数倍だけ異なりこれを $\{\phi'(j)\}_{j=1}^{2N-2}$ としておく。 $\{\phi'(j)\}_{j=1}^{2N-2}$ は(36)式のもう一つ残りの式

$$\phi'(2N-2) = 2\{h_{2N-2}\phi'(2N-2) + h_{2N-1}\phi'(2N-3)\} \quad (47)$$

を満たす。次に(36)式から L を正の整数として

$$\phi'\left(\frac{j}{2^L}\right) = 2 \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi'\left(\frac{j}{2^{L-1}} - k\right) \quad (48)$$

であるので x 軸上 $1/2^L$ の分解能で $\phi'(j/2^L)$ が計算できる。ところで(19)式と(20)式から

$$\hat{\phi}(0) = \int_0^{2N-1} \phi(x) dx = 1 \quad (49)$$

であるので結局、

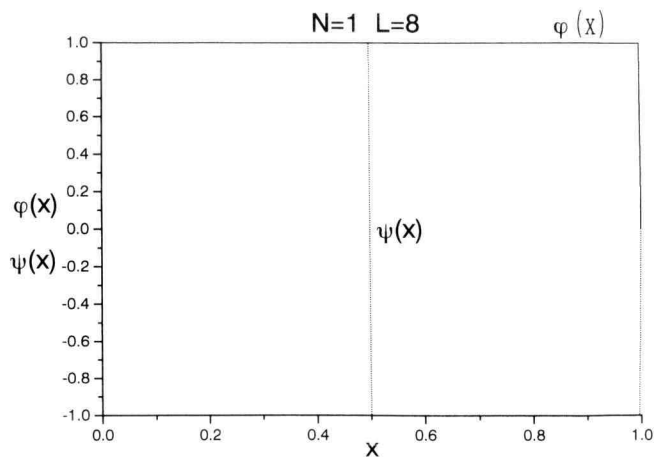
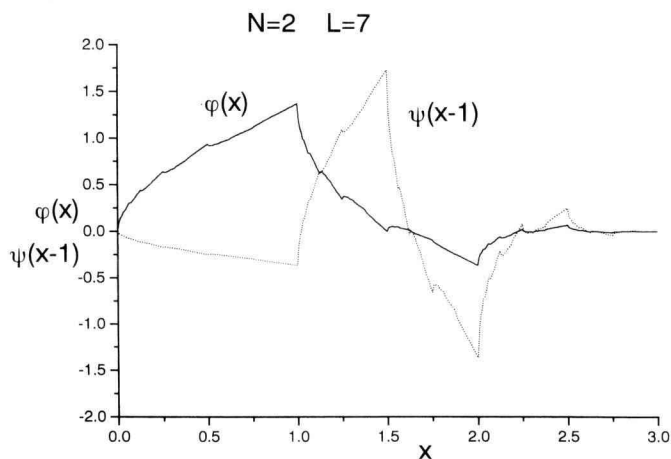


図 3. Haar-Wavelet

図 4. Daubechies-Wavelet $N=2$

$$\phi\left(\frac{j}{2^L}\right) = \frac{2^L \phi'\left(\frac{j}{2^L}\right)}{\sum_{i=0}^{2^L(2N-1)-1} \phi'\left(\frac{i}{2^L}\right)} \quad (50)$$

により非常に良い Scaling 関数の近似値が得られる。
次に (25) 式から

$$\phi(x) = 2 \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k h_k \phi(2x+k-1) \quad (51)$$

Wavelet 関数の近似値も計算できる。すなわち共に x 軸上 $1/2^L$ の分解能で近似値が得られた。実際に (35) 式の右辺 $F_M(x)$ で所定の関数を近似してみる。図 3 ～図 5 はこのようにして計算した Haar 及び Daube-

chies のウェーブレット関数を図示したものである。また、図 7～図 10 には Haar 及び Daubechies の有限ウェーブレット展開による孤立状波形の近似例を与えている。これらの数値例を基にして所望の近似度を得るためのパラメータの値を設定することができる。また、これらの Wavelet での有限展開では Fourier 展開と同じように Gibbs の現象が発生することが知られている⁽¹⁷⁾。

6. 部分スペクトル近似

我々はこの論文で部分スペクトルの集合を定義す

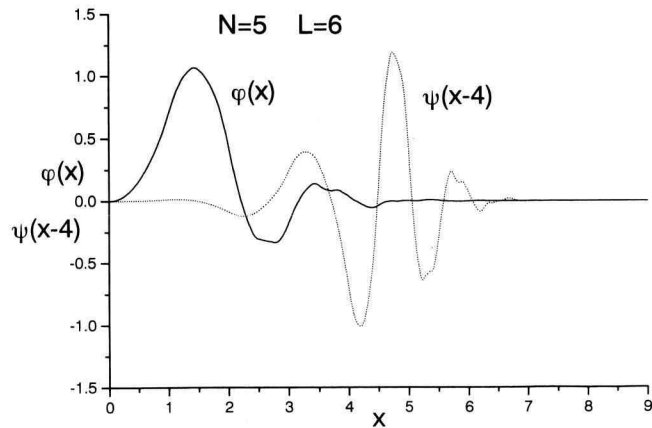
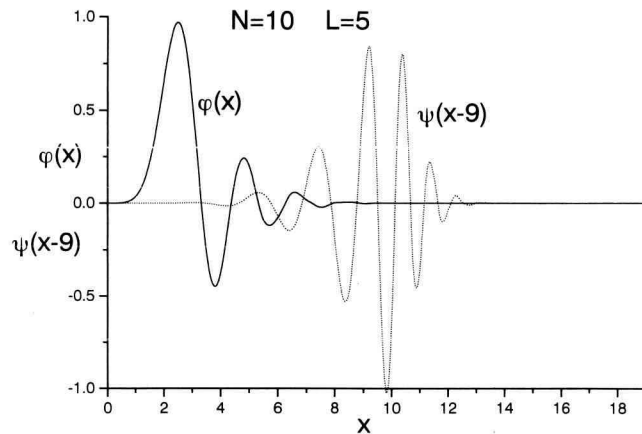
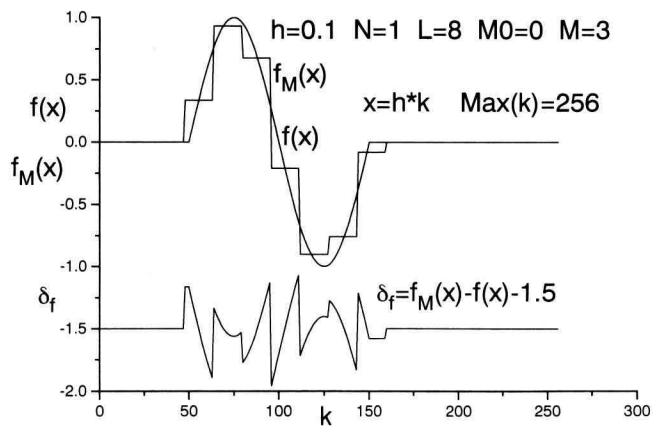

 図 5. Daubechies-Wavelet $N=5$

 図 6. Daubechies-Wavelet $N=10$


図 7. Harr-Wavelet による近似 1

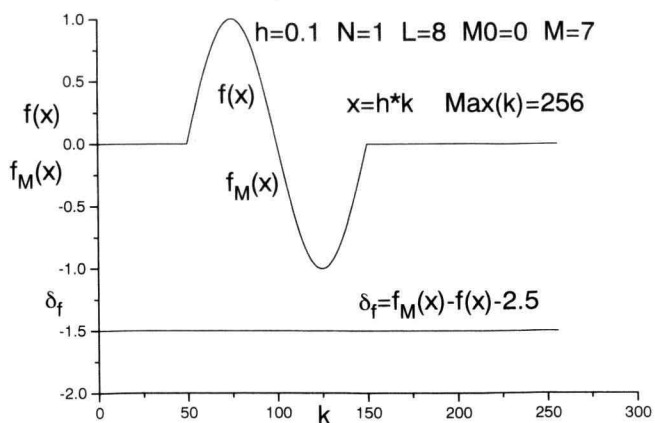


図 8. Haar-Wavelet による近似 2

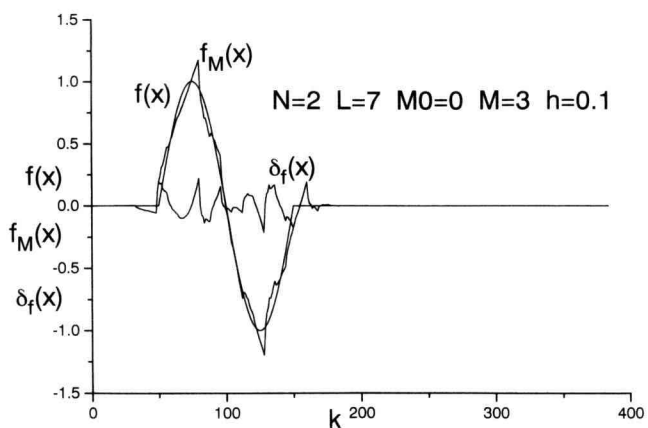


図 9. Daubechies-Wavelet による近似 1

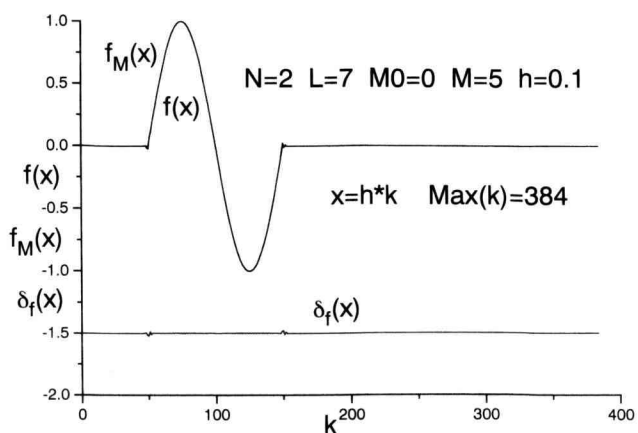


図 10. Daubechies-Wavelet による近似 2

る。 N 次の Haar または Daubechies の Wavelet スペクトルに対して 2 つの正数 x_S と x_F を次のように与える。

$$0 \leq x_S < x_F \leq 2N-1 \quad (52)$$

このとき台が $[x_S, x_F]$ に含まれる関数 $f_{S,F}(x)$ を近似するには各 dilation に対して translation は限定される。 $\phi(x)$ については

$$0 < 2^{M_0}x - n < 2N-1 \quad (53)$$

であるべきなので

$$2^{M_0}x - (2N-1) < n < 2^{M_0}x \quad (54)$$

となる。 x は

$$x_S \leq x \leq x_F \quad (55)$$

なので

$$nS0 = 2^{M_0}x_S - (2N-1) - 1 \quad (56)$$

$$nF0 = 2^{M_0}x_F - 1 \quad (57)$$

とすれば $f_{S,F}(x)$ を表すに必要な $\phi(x)$ の translation は

$$nS0 \leq n \leq nF0 \quad (58)$$

となる。次 $\psi(x)$ については

$$-(N-1) < 2^{M_0}x - n < N \quad (59)$$

であるべきなので、

$$2^m x - N < n < 2^m x + N - 1 \quad (60)$$

となる。(55) 式を考慮して

$$nS(m) = 2^m x_S - (N-1) \quad (61)$$

$$nF(m) = 2^m x_F + N - 2 \quad (62)$$

とすれば $f_{S,F}(x)$ を表すに必要な translation は

$$nS(m) \leq n \leq nF(m) \quad (63)$$

となる。 $nS0, nF0, nS(m), nF(m)$ は整数であるのでそれらを定義する式の右辺の整数部分を示すものと考えことにしよう。(58) 式と (63) 式によって与えられる部分スペクトルを我々は単に部分スペクトルと称して孤立波形の検出に用いようとする。有限展開式 (35) 式において更に translation を (58) 式と (63) 式に限定した近似和を

$$\begin{aligned} f(x) \approx f_M(x; x_S, x_F) = & \sum_{n=nS0}^{nF0} \langle f(x), \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0}x - n) \rangle \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0}x - n) \\ & + \sum_{m=M_0}^M \sum_{n=nS(m)}^{nF(m)} \langle f(x), \sqrt{2^m} \psi(2^m x - n) \rangle \sqrt{2^m} \psi(2^m x - n) \end{aligned} \quad (64)$$

と表す。台が $[x_S, x_F]$ に含まれる関数 $f(x)$ の場合には全スペクトルによる近似式 $f_M(x)$ ((35) 式) と部分スペクトルによる近似式 $f_M(x; x_S, x_F)$ ((64) 式) は全く一致する。この事実を確認するために数値例を示す。図 11 は $N=2$ の場合で図 12 は $N=4$ の場合であり共に $f(x)$ を極めて良く近似している。勿論この場合 $f_M(x) = f_M(x; x_S, x_F)$ が成立している。

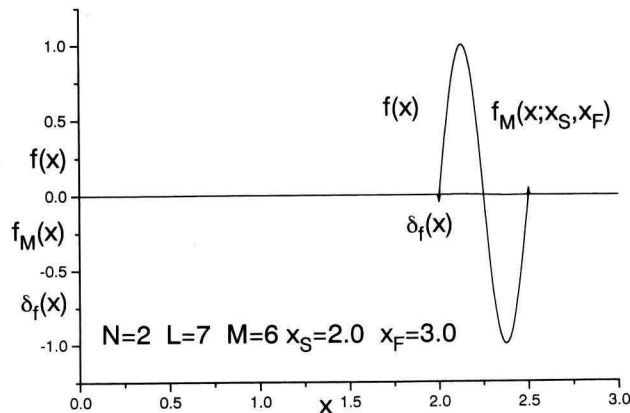


図 11. 部分スペクトルによる近似 1

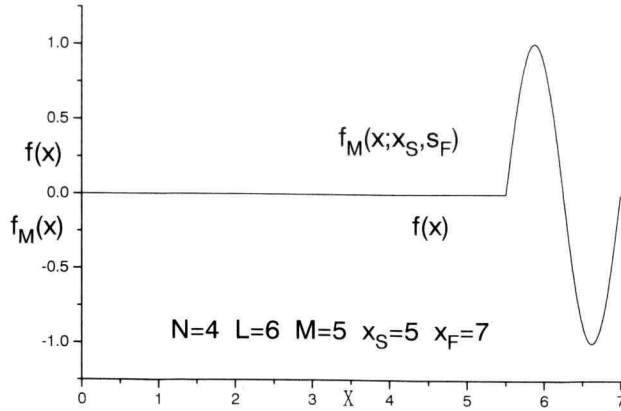


図 12. 部分スペクトルによる近似 2

7. 孤立波形の検出法

信号の観測値 $\xi(k)$ (サンプル値) において現在時刻を k とする。現在より過去にわたり $N_H = (2N-1)2^L + 1$ 個のサンプル点 $\xi(k-N_H), \xi(k-N_H+1), \dots, \xi(k)$ を考える。ここで現時刻 k を固定して

$$f(i) = \xi(k - N_H + i) \quad (i=0, 1, \dots, N_H) \quad (65)$$

とおく。 $f(x)$ は台が $[0, 2N-1]$ の信号 $F(x)$ の分解能 $1/2^L$ のサンプル点

$$f(i) = F(i/2^L) \quad (i=0, 1, \dots, N_H) \quad (66)$$

と考える。 $f(i)$ を有限近似した (35) 式はここでは本来 $F_M(x)$ と書くべきであるが、便宜上これを $f_M(x)$ と書くことにする。部分スペクトルを定めるパラメータ (x_S, x_F) を与えてその部分スペクトル上の和も $F_M(x; x_S, x_F)$ と記すべきであるが、これも便宜上 $f_M(x; x_S, x_F)$ と記しておく。 $f_M(x)$ のスペクトルすなわち全スペクトルの自乗の和すなわちパワースペクトル総和は

$$\begin{aligned} P_M(x) = & \sum_{n=n_{l0}}^{nh0} |\langle f(x), \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0}x - n) \rangle|^2 \\ & + \sum_{m=M_0}^M \sum_{n=n_{l(m)}}^{nh(m)} |\langle f(x), \sqrt{2^m} \phi(2^m x - n) \rangle|^2 \end{aligned} \quad (67)$$

である。また $f_M(x; x_S, x_F)$ のスペクトルの和すなわちパワースペクトル部分和は

$$\begin{aligned} P_M(x; x_S, x_F) = & \sum_{n=n_{S0}}^{nF0} |\langle f(x), \sqrt{2^{M_0}} \phi(2^{M_0}x - n) \rangle|^2 \\ & + \sum_{m=M_0}^M \sum_{n=n_{S(m)}}^{nF(m)} |\langle f(x), \sqrt{2^m} \phi(2^m x - n) \rangle|^2 \end{aligned} \quad (68)$$

である。明らかなように

$$0 \leq P_{M,S,F} \leq P_M \quad (69)$$

である。孤立状波形の台の幅が $x_H - x_S$ 以内としてみる。時刻の進行と共に孤立波形は $f(i)$ の i の大きな値の部分に現れる。いずれその全容が $f(i)$ の中に入りそこでは

$$P_{M,S,F} = P_M \quad (70)$$

となる。それ以前及びそれ以後では

$$P_{M,S,F} \leq P_M \quad (71)$$

となる。ところで背景雑音は定常的であるために時刻 k が変化しても P_M 及び $P_{M,S,F}$ はほぼ一定でしかも

$$r_k = P_{M,S,F}/P_M \quad (72)$$

の値もほぼ一定となると考えられる。すなわち背景雑音の中に埋もれた孤立波形がある場合にはパワースペクトル比 r_k はそこで 1 に近い値となり背景雑音のみの場合には一定値 ε ($0 < \varepsilon < 1$) より小さな値となるといえると考えられる。そこで

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & r_k > \varepsilon \\ 0 & r_k \leq \varepsilon \end{cases} \quad (73)$$

とし $\delta_k=1$ なら信号あり、 $\delta_k=0$ なら雑音のみという検出法が得られる。

8. 数 値 例

6 節の孤立波形検出法の妥当性と有効性を確かめるために数値シミュレーションを実施した。図 13 は T_S

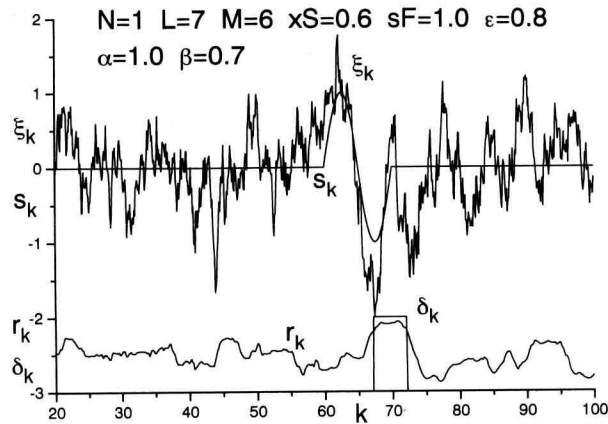


図 13. 信号検出の過程 1

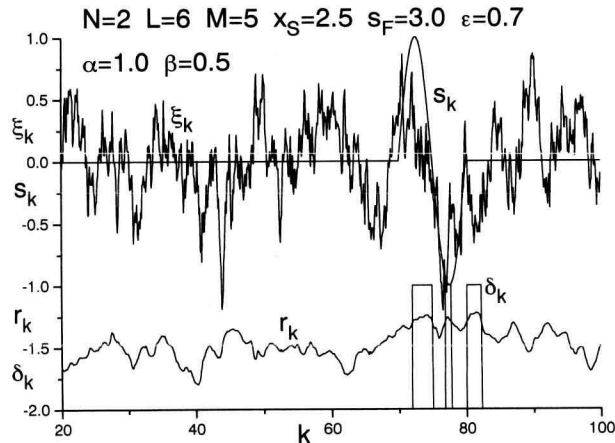


図 14. 信号検出過程 2

$=0.1, \alpha=1.0, \beta=0.7$ として雑音を OU 過程で発生した。(5) 式より $E\{|B|^2\} = \beta^2/2\alpha$ なので雑音レベル l_N は

$$l_N = \beta/\sqrt{2\alpha} \approx 0.5 \quad (74)$$

である。また、有意孤立信号は (s_k として図示) 1 周期の正弦波で振幅は 1 である。そこで S/N 比は $S/N \approx 2$ と考えられる。そして $N=1, L=7, M_0=0, M=6$ として $x_S=0.6, x_F=1.0, \epsilon=0.8$ を計算した。図 13 には δ_k が有意信号をとらえている様子が示されている。

同じように図 14 は $T_S=0.1, \alpha=0.1, \beta=0.5$ の場合である。有意信号は図 13 の場合と同じであるので $S/N \approx 2.83$ となる。 $N=2, L=6, M_0=0, M=5, x_S=2.5,$

$x_F=3.0, \epsilon=0.7$ の場合の結果を示したものでありやはり δ_k が有意信号をとらえている。こちらの例はいくらか S/N が良いので検出するまでの時刻が早くなっている。

9. ま と め

OU 過程で表現される背景雑音の中に出現する孤立波形の検出法について論じた。Haar 及び Daubechies の Wavelet スペクトルにおいて時間軸上の一部を局在させるスペクトルの部分集合を与え、その上でのパワースペクトルの部分和と全パワースペクトルの総和の比により孤立波形を見いだす方法を与えた。数値シ

ミュレーションによりその有効性を示した。

文 献

- (1) 横田, 立花, 他「気象庁納め地震活動等総合監視システム」三菱電機技報, Vol. 63, No. 9, pp. 744-747, 1989. 9.
- (2) 砂原「オンラインデータ処理による信号の検出・推定」日本機械学会誌, Vol. 78, No. 682, pp. 819-825, 1975. 9.
- (3) E.L. Lehmann, "Statistical Test", John Wiley & Sons, New York, 1959.
- (4) 立花「雑音に埋もれたブロック状信号の検出」第15回確率システムシンポジウム, 日本自動制御協会, 1983. 10.
- (5) 河田龍夫「応用数学概論 II」岩波全書, 1952.
- (6) S.G. Mallat, "Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(R)$ ", Trans. of the American Mathematical Society, Vol. 315, No. 1, pp. 69-87, 1989. 9.
- (7) I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Trans. IT, Vol. 36, No. 5, pp. 961-1005, 1990. 9.
- (8) A. Haar, "Zur Theorie der Orthogonalen Functionssysteme", Math. Ann., Vol. 69, pp. 331-371, 1910.
- (9) I. Daubechies, "Orthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets", Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. 91, pp. 908-996, 1988. 9.
- (10) 嶋, 立花「孤立波形のウェーブレット変換による検出」第9回デジタル信号処理シンポジウム, 電子情報通信学会, 1994. 11.
- (11) 伊藤 清「確率論」岩波書店, 1963.
- (12) 立花, 半場「高速ハール展開について」電気学会情報処理研究会資料 IP-73-13, 1973. 7.
- (13) 半場, 立花「有限ハール展開を用いた心電図の表現と認識について」電気学会論文誌 C, Vol. 7, No. 7, pp. 149-156, 1976. 7.
- (14) 立花「階段関数近似による適応型フィルタ」電子通信学会研究会資料, CAS82-65.
- (15) E.H. Cheney, "Introduction to Approximation Theory", McGraw-Hill, 1966.
- (16) 守本「ウェーブレットと数値解析」三菱総研講演録
- (17) 立花, 嶋「有限ウェーブレット展開でのギブスの現象」第9回デジタル信号処理シンポジウム, 1994. 11.