反磁性電流による磁気機械効果の可能性

宍戸文雄
電気電子工学

Possibility of Magneto-Mechanical Effect Induced by Diamagnetic Current

Fumio Shishido

Abstract

The possibility of magneto-mechanical effect induced by diamagnetic current is studied. In order to obtain some insight into the case of Landau diamagnetism, which is most interesting but requires exact treatment, a simple reduced one dimensional model is discussed. The relation between the single value condition of the wave function and Bloch-Bohm theorem is examined. A conclusion that a neutral particle keeps a permanent motion at least in a small system if it has a hard core potential. The important phase variation near the potential is examined in detail.

Key Words: Permanent motion of neutral particle, Bloch-Bohm theorem, Phase variation near hard core

ランダウ反磁性の基礎論においてはいくつかの未解明の問題が残されている。その一つの例は表面ポテンシャルの影響で表面に局在する巨大な反磁性が生ずることがあるのかどうかということである[1,2,3]。これは以前はよく取り扱われたのであるが、その後未解明のまま放置されているようである[4]。その他に表面電流による磁気機械効果がある。即ち、中性粒子が表面に接触しているときそれが表面電流に引きずられて、熱平衡における永久運動が観測されるかどうかということであり、この論文で初めて扱う問題である。

周知のように、磁場内の導体にはランダウ反磁性が生じ表面には永久電流が流れる。中性粒子が表面に接触しているとき電流方向に引きずられて永久運動を起こしそうにみえるが、簡単に推断はできない。

非平衡の電流であればもちろん引きずられるのであるが、熱平衡においては電子と中性粒子とのエネルギーの授受の時間平均は０である。中性粒子の永久運動が存在するとすれば、そのときのほうが電子系の自由エネルギーが低いはずである。電子系の確率密度分布を流体のようなものと考えれば、確かにこれは有りそうなことにみえる。流体力学にダランベールのパラドックスという有名な問題がある。摩擦の無い完全流体の一様な流れの中に球を入れる、この球には力が働かないので初期条件の速度を保ち続けるという結論である。実際には流れと同じ速度のとき流体の運動エネルギーが最小であると計算でき、異なった速度の状態は不安定平衡であるという常識的な結論が得られる。
完全流体の問題は非散逸という性質を反磁性と共有する点では示唆的である。しかし後者では自由エネルギーが極小であり前者ではそうではないという点では異なっている。自由エネルギーが極小の状態に関しては Bloch-Bohm の定理が引用される[5]。以後簡単のため絶対零度を考えることにして自由エネルギーをエネルギーでおきかえる。
Bloch-Bohm の定理によると、最低状態に関しては、

磁場が０のとき　　電子系の全運動量は０

磁場が有限のとき　電子系の重心の速度は０

ということになる。ランダウ反磁性では表面電流が存在するが、このことと全電子系の重心の速度が０とは矛盾しない。この定理を中性粒子に適用するとそれは静止しているという興味の無い結論になってしまいそうであるが、果たしてそうであるかを以下に議論する。

Bloch-Bohm の定理はランダウ反磁性だけでなくいかなる反磁性にも適用される一般的なものである。他方ランダウ反磁性は最も精密な扱いを要求される反磁性である。従って以下の取り扱いではランダウ反磁性そのものではなく、一次元に縮約されたモデルに関して中性粒子は静止してしまうのかどうかの議論を進める。

軸対称で断面が薄い円環形の導体の軸方向（z方向）に一様な磁場 H が印加されているとする。１個の独立な電子の波動関数は $\exp(ik_z z)\Psi(s,r)$ と書ける。ここで s は円周上の座標である。以後 z方向の波動関数とハミルトニアンの扱いは省く。円環の薄い極限では s方向だけの１次元の問題に縮約してしまい、

$$(1/2m)[P_s+(e/c)A]^2\Psi(s)=E\,\Psi(s), \qquad (\ A=(1/2)Hr\ )$$

但し

$$\Psi(s+L)=\Psi(s)$$

ここで P_sは s方向の運動量、L は円周の長さ、A はベクトルポテンシャル、E はエネルギーの固有値を表す。
もしも一周して元の値に戻る(一価性)という条件を取り外してしまえば、

$$[P_s+(e/c)A]=0 \quad 即ち \quad E=0$$

が最低状態となり反磁性は生じない。このことは古典論では磁性は現れないという一般論に対応する。
一価性から、Aが小のときは、

$$P_s=0 \quad E=(1/2m)(e/c)^2A^2=(1/8m)(e/c)^2(rH)^2$$

が最低状態に対応し、原子分子の反磁性の一般論に一致する。
次に1個の電子と1個の中性粒子とが円環内で相互作用をしている場合を考えよう。そのラグランジアンは

$$L=(1/2)m(dx/dt)^2-(e/c)A(dx/dt)+(1/2)M(dX/dt)^2-U(x-X) \tag{1}$$

と書ける。ここで xは電子の座標、Xは中性粒子の座標、Mはその質量である。
運動量とハミルトニアンは、

$$p_x=m(dx/dt)-(e/c)A, \qquad P_X=M(dX/dt) \tag{2}$$

$$H=(1/2m)[p_x+(e/c)A]^2+(1/2M)P_X{}^2+U(x-X) \tag{3}$$

となる。次に重心座標 u と相対座標 v とを導入しよう。

$$x=u+[M/(m+M)]v, \qquad X=u-[m/(m+M)]v \tag{4}$$

(4) を (1) に代入して、

$$\begin{aligned}L=&(1/2)(m+M)(du/dt)^2-(1/2)[mM/(m+M)](dv/dt)^2\\&-(e/c)A\{du/dt+[M/(m+M)](dv/dt)\}-U(v)\end{aligned} \tag{5}$$

となり、u と v とに共役な運動量 P と p およびハミルトニアンを求めると、

$$P=(m+M)(du/dt)-(e/c)A, \qquad p=[mM/(m+M)](dv/dt)-[M/(m+M)](e/c)A \tag{6}$$

$$H=[1/2(m+M)][P+(e/c)A]^2+[(m+M)/2mM]\{p+[M/(m+M)](e/c)A\}^2+U(v) \tag{7}$$

となり、(6) を (4)に代入して、

$$\begin{aligned}dX/dt&=[1/(m+M)][P+(e/c)A]-(1/M)\{p+[M/(m+M)](e/c)A\}\\&=[1/(m+M)]P-(1/M)p\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}dx/dt&=[1/(m+M)][P+(e/c)A]+(1/m)\{p+[M/(m+M)](e/c)A\}\\&=[1/(m+M)]P+(1/m)p+(1/m)(e/c)A\end{aligned} \tag{9}$$

(7)では uの項と vの項とに変数分離されているので、最低状態の波動関数は $\Phi(u)\Psi(v)$
と積の形に書け、各々は

$$[1/2(m+M)][P+(e/c)A]^2\Phi(u)=E_1\Phi(u) \tag{10}$$

$$[(m+M)/2mM]\{p+[M/(m+M)](e/c)A\}^2\Psi(v)+U(v)\Psi(v)=E_2\Psi(v) \tag{11}$$

を満足し、それぞれについて最低状態を求めればよい。

まず（10)に関しては、Aが小のときは

$$P=0,\ \Phi(u)=\text{定数},\quad E_1=[1/2(m+M)]\,[(e/c)A]^2 \tag{12}$$

が最低状態となる。
それに対して（11)に関しては U(v)の形で結果が異なってくる。
U(v)が充分小のときは、(11) は(10)に似てきて

$$\langle p\rangle \fallingdotseq 0,\quad E_2 \fallingdotseq [M/2m(m+M)]\,[(e/c)A]^2$$

が最低状態に対応するであろう。
中性粒子がハードコアポテンシャルで表されるとき、即ち v=0 の近くで U(v)=∞ のときは全く異なった結果になる。この場合 Bloch-Bohm の定理を適用できる。

最低状態の波動関数 Ψ(v) とそれと無限小に異なる仮想的波動関数 $\Psi_1(v)=\exp(i\varepsilon v)\Psi(v)$ とを考え両者のエネルギー期待値を比較する。まず U(v) の期待値は一致する。従って運動エネルギーの変分が 0でなくてはならないので、

$$\langle[(m+M)/mM]\{p+[M/(m+M)](e/c)A\}\rangle=0 \tag{13}$$

となりすなわち、

$$\langle dv/dt\rangle=0 \tag{14}$$

という結論が得られるが、このとき v=0 の近くで U(v)=∞ という条件が重要である。このため v=0 の近くで波動関数は消えており、そのため $\Psi_1(L)=\Psi_1(0)$ が成立している。 もしも v=0 の近くで U(v)=∞ という条件が無ければ $\Psi_1(v)$ は一価でないので、$\Psi_1(v)$ と Ψ(v) とを比較することができない。そのときは ε は無限小ではなく $\varepsilon=2n\pi/L$ とおかなくてはならず無限小の変分を比較することはできない。
(12),(13) を (8),(9) に代入すると

$$\langle dX/dt\rangle=\langle dx/dt\rangle=[1/(m+M)](e/c)A \tag{15}$$

となり、中性粒子は反磁性電流に引きずられて永久運動を続けるという結論が得られる。またその反作用として反磁性は m/(m+M) の比率で減少する。

さて今までの議論では U=∞ のとき突然定性的に異なった結果が現れるかのようで説得性にやや欠ける。一価性の条件は U の大小にかかわらず課せられる制限である。そこで次のように説明される。

exp(iεv) をより一般化させた exp[iS(v)] を考え

$$\Psi_1(v)=\exp[iS(v)]\Psi(v) \tag{16}$$

但し

$$S(0)=0,\quad S(L)=2\pi \tag{17}$$

として再び Ψ(v) と $\Psi_1(v)$ とのエネルギー期待値を比較しよう。この場合も U(v) の期待値はやはり一致する。$\Psi_1(v)$ での運動エネルギーの期待値は、

$$[(m+M)/2mM]\int\Psi_1{}^*(v)\{p+[M/(m+M)](e/c)A\}^2\Psi_1(v)dv$$

$$=[(m+M)/2mM]\int\Psi^*(v)\{p+hdS/dv+[M/(m+M)](e/c)A\}^2\Psi(v)dv$$

$$=[(m+M)/2mM]\int|\{p+hdS/dv+[M/(m+M)](e/c)A\}\Psi(v)|^2dv \tag{18}$$

ここで S(v) を (17) の条件のもとに変化させて (18) が最小になるように定める。このときの S(v) の詳しい形は重要ではない。重要なことは

$|\Psi(v)|^2$ が大の領域では dS/dv が小, $|\Psi(v)|^2$ が小の領域では dS/dv が大

になるということである。すなわち、

いたるところで $U(v)=0$ のとき　　$dS/dv=2\pi/L$

$v=0$ の近くで$U(v)$ が大のとき，　$v=0$ の近くで　　$dS/dv \gg 2\pi/L$
　　　　　　　　　　　　　　　$v=0$ の近く以外で　$dS/dv \ll 2\pi/L$

$v=0$ の近くで $U(v)\to 0$ の極限では、$v=0$ の近く以外で $S(v)=\varepsilon v$（εは無限小）、$U(v)=\infty$ で波動関数が消えている領域で S の変化は 2πに近くなるのであるが、

$$\Psi_1(v)=\exp[iS(v)]\Psi(v)$$

の積では $v=0$ の近くで $\Psi(v)\to 0$ であるため結局、

$$\Psi_1(v)\to\exp(i\varepsilon v)\Psi(v)$$

ということになり、Bloch-Bohm の定理が適用できるのである。
結局（10),(11）を満足する最低状態は

$$\Phi(u)\Psi(v)=f(v)\exp\{-i[M/(m+M)](e/ch)Av\} \tag{19}$$

と書ける。ここで $f(v)$ は（11)で $A=0$ としたときの解である。$f(v)$ は実である。

座標 x, X に戻ると、

$$f(x-X)\exp\{-i[M/(m+M)](e/ch)A(x-X)\} \tag{20}$$

と表され、電子の位相は中性粒子の両側で

$$[M/(m+M)](e/ch)AL$$

だけずれている。

（20）の簡単な形に表されるのはポテンシャルが無限大の場合である。では有限なポテンシャルの場合はどうなるかを調べるための簡単な例として δ関数形ポテンシャルについて計算しよう。以下 変数 v を x に置き換える。

$\varepsilon<x<L$ で $U(x)=0$，　$0<x<\varepsilon$ で $U(x)=(h^2/2m)Q/\varepsilon$

ここで $\varepsilon\to 0$ としたもの即ち $U(x)=(h^2/2m)Q\delta(x)$ について境界条件を計算する。
まず $A=0$ のときは、

$x=0$ で　$\Psi(-0)=\Psi(L)=\Psi(+0)$,　$\Psi'(L)/\Psi(L)=\Psi'(+0)/\Psi(+0)-Q$

となる。$A\neq 0$ のときは（11）を次のように書き換える。

$$\{[(m+M)/2mM]p^2+U(v)\}f(x)=E_2 f(x) \tag{21}$$

但し　$f(x)\equiv\exp(i\beta x)\Psi(x)$,　$\beta\equiv[M/(m+M)](e/ch)A$　(22)

$f(x)$ は一価ではない。$f(x)$の形と境界条件は次のようになる。

$$f(x)=\exp[ik(x+L/2)]+R\exp[ik(x-L/2)] \tag{23}$$

$x=0$ で　$f(L)=\exp(i\beta L)f(+0)$,　$f'(L)/f(L)=f'(+0)/f(+0)-Q$　(24)

（23）を（24）に代入すると、

$$R\sin[(k+\beta)L/2]-\sin[(k-\beta)L/2]=0 \tag{25}$$

及び

$$Q[1+R^2+2R\cos(kL)]-4Rk\sin(kL)=0 \tag{26}$$

となる。（25）と（26）を組み合わせて、

$$[\sin(kL/2)]^2-[\sin(\beta L/2)]^2=(LQ/4)\sin(kL)/(kL) \tag{27}$$

（27）により k が β と Q の関数として定まる。そして（25）から R が定まる。

$$LQ\ll 1 \text{ のとき } k^2-\beta^2\fallingdotseq Q/L,\quad LQ\gg 1 \text{ のとき } kL\fallingdotseq\pi-(4\pi/LQ)[1-(\beta L)^2] \tag{28}$$

（28）から $Q=\infty$ のときには k が β に依らないことがわかり、（19）の結果が確認される。Q が有限のときは k は β による。$f(x)$ の位相 θ が x にどのように依るかを調べると、

$$(\tan\theta)/[\tan(\beta L/2)]=\tan[k(x-L/2)]/[\tan(kL/2)] \tag{29}$$

従って、　$LQ\ll 1$ のときは　$x=0$ で $\theta=-\beta L/2$,　$x=L/2$ で $\theta=0$,　$0<x<L/2$ で $\theta>\beta x$

このことは、（28）から $k>\beta$ であること、また関数 $\tan(ay)/\tan(y)$（$0<a<1$）は y の減少関数であることを考慮して導かれる。位相の変化は $x=0$ の近くでは離れたところよりも少し速くなっているという結論が得られる。
$LQ\gg 1$ のときは、（28）を（29）に代入して、

$$LQ\gg 1 \text{ のとき } \tan\theta\fallingdotseq(\pi\beta/Q)\tan[k(x-L/2)] \tag{30}$$

となり、$x=0$ の近くを調べるためこれに再び（28）を代入すると、

$$LQ\gg 1,\ x\fallingdotseq 0 \text{ のとき } \theta\fallingdotseq-(\beta L/2)/(1+Qx/2) \tag{31}$$

となり、$0<x<2/Q$ の狭い領域で $\beta L/4$ 程度の位相変化が集中しておこることが判る。
$f(x)$ の位相すなわち θ と $\Psi(x)$ の位相 ϕ とを $LQ\gg 1$ の場合について比較すると、

	$x=0$	$x=2/Q$	$x=2N/Q$	$x=L/2$
$f(x)$ の位相;θ	$-\beta L/2$	$-\beta L/4$	$-(\beta L/2)/(N+1)$	0
$\Psi(x)$ の位相;ϕ	0	$+\beta L/4$	$(\beta L/2)/(1+1/N)$	0

$\Psi(x)$ はもちろん一価連続である。それにもかかわらず（20）の解がポテンシャルの前後で上の表において、$x=2N/Q$ と $x=-2N/Q$ 即ち $x=L-2N/Q$ の2点を比較してその極限をとったと考えればよい。δ 関数を定義するための $\varepsilon\to 0$ とする極限と、$Q\to\infty$ とする極限との前者の操作を先に行うと一価連続な $\Psi(x)$ の $Q\to\infty$ に対応する極限が得られるのであるが、後者の操作を先にすると $\varepsilon\to 0$ に対応して位相のずれた0点近くの2点を接続させているようにみえるのである。

なお、粒子の流れは J は（7）または（21）から、

$$J=(d\theta/dx)[f(x)]^2=(d\phi/dx+\beta)[\Psi(x)]^2=\text{定数}$$

と表され、これから θ は単調関数であることが判る。それに対してと ϕ は単調でなく、$\phi+\beta x$ が単調である。

さてここまで円筒内に電子１個と中性粒子１個が存在する場合を論じてきた。電子 n個と中性粒子１個の場合はどうなるかを調べる。この場合も重心座標と重心に対する n個の相対座標を定義する。全ハミルトニアンの形はやや複雑であるが、その重心に関する項をとりだして書くと、（10）に対応して

$$[1/2(nm+M)][P+n(e/c)A]^2$$

これを見るとベクトルポテンシャルの項が大きいので P=0 ではなく、

$$[P+n(e/c)A]=0$$

最低状態に対応するかのようにみえるがそうではない。Bloch-Bohm の定理を適用するとき P の変化は $2\pi/L$ ではなく、$2\pi n/L$ だけ変化させなくては波動関数の反対称性が保たれないのである。従って電子を 1個から n個に増やしても以前の議論の本質的な点は有効である。

それに対して L を十分大きくするとどうであろうか。この極限では P は連続に近付き以前の議論はなりたたなくなるようにもみえるが、そうとは推断できない。電子系に関しては n/L を一定にして L をおおきくすると n に比例する項が残るという常識的な結果になる。中性粒子に関してはそれが静止するという結論が得られるわけではない。まず、小さな系では確かに永久運動を保持するのにそれと相互作用をしない系をつなげて運動が止まるというのは奇妙である。実際には $2\pi/L$ よりも運動量においてはるかに広がっている波束について論じなくてはならない。その場合 Bloch-Bohm の議論においては、波動方程式を満足する最低状態の波動関数 $\Psi(v)$ と波動方程式を満足しない仮想的波動関数 $\Psi_1(v)=\exp(i\varepsilon v)\Psi(v)$ とを比較しているので波動方程式を満足するという条件での近傍の様子は不明である。従って波束の運動量を変化させたときの電子系のエネルギーが減るということを調べるためには Bloch-Bohm の定理から結論は得られない。この論文での具体的な解はより詳しい議論への示唆となり得る。

References

[1] Tesanovic,Z.,Rasolt,M. and Xing,L.: Phys.Rev.B **43**,288(1991)
[2] Shishido,F.: Phys.Lett.A **152**,437(1991)
[3] Nedorezov,S.S.: JETP **33**,1045(1971)
[4] Shishido,F.: Phys.Lett.A **152**,443(1991)
[5] Bohm,D.: Phys.Rev.**75**,502(1949)