

# ディジタル微分フィルタの設計

立花康夫

電気電子工学科

## On the Design of Differential Digital Filters

Yasuo TACHIBANA

Dept. of Electric and Electronic

### Abstract

This paper deals with a design method of digital differential filters which are constructed by the parallel composition of some finite impulse response type narrow band filters. By using the proposed method we can get the bank of the differential filters which have 0 to some appropriate ranks and same almost equal phase characteristics. And it is shown that the linear system identification is able to execute by this filter bank. The parameters estimated by this filter bank is used for the system order estimation by using the resultant of the polynomials which are numerator and denominator of the estimated transfer function. The filters in the filter bank are finite impulse response digital filters, thus they use only finite time observation signals extracted from the objective system. Therefore the estimation procedure would have the properties of adaptation. For showing this properties we give some numerical examples. Lastly, the proposed design method of the finite impulse response digital filter is able to be used for the design of the digital filters with any type frequency response. By the several examples we show this ability.

Key Words: Digital Filter, Finite Impulse Response Filter, Differential Filter, Transfer Function, Estimation

### 1. まえがき

この論文では、ディジタル微分フィルタを基礎となる有限パルス応答型狭帯域フィルタの並列合成により設計する一手法について論じる。提案する設計法によれば同じ次数で、同じでしかも殆ど線形の位相特性を持つ0階より所定階数の微分フィルタ群を構成することができることを示す。このようなフィルタ群を用いると、線形システムの同定、すなわち、伝達関数のパラメータ推定が可能であることを示す。また、このパラメータ推定の結果と終結式を用いた指標により伝達関数の次数の推定も可能であることを示す。さらに、このフィルタ群は有限応答型であるために、システムの同定のためには現在より有限時間過去までの同定対象システムの入出力の観測値のみを用いる。そのため、対象系がゆっくり変化してもその変化に応答するような適応同定の可能性を持つ。これ

については、簡単な例によりこの性質を示す。最後に、この論文で提案する基礎となる狭帯域フィルタの並列合成の手法によれば微分フィルタ以外の任意の特性のフィルタが容易に設計できることを設計例と共に示す。

ディジタルフィルタは通信システム、音声音響処理あるいはレーダの信号処理などに広く用いられ専用のLSIの発展でより高速の処理が可能となっている。一方、地質学上の観測においてもディジタルフィルタは種々の目的で用いられている<sup>(1)</sup>。特に地震活動に関わる地殻変動の観測ではサンプル周期が1分以上で1日あるいは1月、1年という長周期の変動の処理が必要である。例えば地殻岩盤の歪みや海水の潮位の観測値は一見周期的な変動をしている。実はこれは地球上の位置と絶対時刻を与えると天体力学的に明確に定まる起潮力により引き起こされている<sup>(2)</sup>。起潮力は月と太陽（主として月）の引力で生じ約400個の既知の周波数スペクトル成分持つ概周

期関数である<sup>(1)</sup>。上記の地殻変動は起潮力を地殻構造を表す線形の伝達関数への入力としたときの出力が観測されたものと考えられる。このスペクトル成分は実は5つ程の群落に分類されていてその群落毎に一定の伝達特性であるとして多重回帰により系を同定する石黒<sup>(1)</sup>により開発されたソフトウェアBAYTAP-Gが広く用いられている。これは構造上大型計算機上でのバッチ処理的計算法であり、リアルタイムで徐々に変動する特性の変化を推定するものではない。また、群落内のスペクトル毎の内部伝達構造は不明のままである。この群落内のスペクトルは近接しているものが多くそれらを分離して周波数特性を推定するには狭帯域のフィルタが必要になる。また、群落内の伝達特性を伝達関数で表現することによっても微細構造を知ることができる<sup>(4)</sup>。これらの用途に共するために狭帯域フィルタで以下の条件

- [1] 中心周波数が異なっても同じ線形位相特性を持つ。
- [2] 鋭いピーキング特性を持つ。
- [3] フィルタ次数に依存しな一定の演算時間で実行できる。

を満たすものが要求される。このような狭帯域フィルタは長時間にわたる微細な周波数特性を実時間で推定するのに都合がよい。また、微分フィルタ群で

- [4] 所定帯域成分に対して0から所定階までの微分信号を共通の線形位相特性で出力できる。

となるフィルタがあればその帯域成分に対する伝達関数が推定できる<sup>(5)</sup>。さらに、このような超低周波の系の場合には条件[3]が成り立つことが実際の運用上不可欠である。

この論文ではこれらの要求を背景にして条件[1]～[3]を満たす狭帯域フィルタの提案とそれを組み合わせることにより条件[3]と[4]を満たす微分フィルタ群の提案を行い、その特性の分析と伝達関数の推定への適用例を示す。このような狭帯域フィルタを考えるに際してIIRフィルタはその伝達特性に極を持たせることができるので、条件[2]を満たすことは容易である<sup>(5)</sup>。また、実行形式は必然的に巡回型であるので適当な特性を選べば条件[3]を満足することも可能である。条件[1]を満たすためにアナログBesselフィルタでのRakovick等<sup>(11)</sup>の試みがあり、これから適当な変換<sup>(1)</sup>によりデジタルフィルタが得られる。しかし、これは低域の振幅特性のばあいでは

あり全てが条件[1]を満たすような微分フィルタ群を与えるものではない。一般には条件[3]を満たすことは困難である。一方FIRフィルタでは条件[1]と[2]を満たすものは容易に構成できる<sup>(1)</sup>。しかし条件[3]は一般には並列プロセッサ等を使用しないと不可能である。我々はこれらの点を考慮し狭帯域特性のFIRフィルタで安定な巡回型の和の実行形式を持つフィルタを提案する<sup>(1)</sup>。これは有限Fourier変換を基にして構成され近似的に条件[1]を満たし同時に条件[2],[3]を満たすことを示す。一方、系の特性を伝達関数として直接そのパラメータを推定するためには条件[3]と[4]を満たすことが必要であるが、条件[4]を完全に満たす微分フィルタは既にRabiner等<sup>(11),(12)</sup>により得られている。しかし、これらは並列処理する以外条件[3]は成立せず従ってあまり高次のフィルタはできない。我々は提案する狭帯域フィルタを複数個中心周波数を分布して配置し、それらの実係数線形結合に1次の和分または差分フィルタを直列に接続する事により条件[3]と[4]を満たす任意階の微分フィルタが構成できることを示し、その最適設計法について述べる。

そして、この微分フィルタ群を用いた伝達関数推定とその推定値の終結式からその次数の推定の例を示す。また、推定過程の適応性を示す。更に、このフィルタの設計法は任意の振幅特性を有するフィルタの設計に用いることを示すためにいくつかの設計例を与える。

## 2. 基礎狭帯域フィルタ

この節では条件[1]～[3]を満足する狭帯域FIRフィルタを提案する。そのために基本的な事項の定義を与えておく。アナログ信号 $x(t)$ をサンプル周期 $T_s$ でサンプリングして時刻 $kT_s$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )でのサンプル値を $x_k = x(kT_s)$ と表す。角周波数 $\omega$ に対して規格化周波数 $\theta$ を

$$\theta = \omega T_s \quad (1)$$

とする。デジタル信号処理として有効な<sup>(1)</sup>

$$|\theta| \leq \pi \quad (2)$$

について考える。 $N$ を2以上の整数としてサンプル値 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ の有限Fourier変換

$$\eta_\ell = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n e^{-j\frac{2\pi n \ell}{N}} \quad (\ell = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

は周波数  $\theta = 2\pi\ell/N$  のスペクトルを表している。そこで、 $\ell$  を一つ固定して(3)式をフィルタと考えれば鋭い狭帯域フィルタとなる。すなわち  $k$  を現在時刻として  $\xi_1 = x_{k-N+1}, \xi_2 = x_{k-N+2}, \dots, \xi_N = x_k$  とおくと

$$\begin{aligned} \eta_\ell &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n e^{-j\frac{2\pi n \ell}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{k-n} e^{j\frac{2\pi n \ell}{N}} \quad (\ell = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。そこでFIRフィルタ

$$f_I(z, \frac{2\pi\ell}{N}) = \frac{1}{N} e^{-j(\frac{N-1}{2})\frac{2\pi\ell}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} e^{j\frac{2\pi n \ell}{N}} \quad (5)$$

を考える。 $z$  は  $z$ -変換でのシフト演算子である。(5)式には(4)式に位相を調整する係数  $e^{-j(\frac{N-1}{2})\frac{2\pi\ell}{N}}$  が余分に掛けられている。フィルタ  $f_I(z, \frac{2\pi\ell}{N})$  の周波数特性は

$$f_I(e^{j\theta}, \frac{2\pi\ell}{N}) = \frac{\sin\{(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi\ell}{N})N\}}{N \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi\ell}{N})} e^{-j(\frac{N-1}{2})\theta} \quad (6)$$

となり条件[1]は満たされている。また  $N$  が大きくなれば[2]も満たされる。そこで我々はさらに条件[3]を満たすように巡回型実行形式を持つような次のFIRフィルタ

$$\begin{aligned} f(z, a) &= \frac{1}{d} e^{-j(\frac{N-1}{2})a} \\ &\cdot \sum_{n=0}^{N-1} \rho^n z^{-n} e^{jna} \cos^M \left\{ \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \frac{\pi}{N-1} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

を考える。このフィルタを基礎狭帯域フィルタと呼ぶ。ここで

$$0 \leq a \leq \pi \quad (8)$$

$$0 < \rho \leq 1 \quad (9)$$

$$0 \leq M \quad (\text{integer}) \quad (10)$$

$$d = \sum_{n=0}^{N-1} \rho^n \sin^M \left( \frac{n\pi}{N-1} \right) \quad (11)$$

である。 $\rho = 1, M = 0, a = 2\pi\ell/N$  とすれば  $f(z, a)$

は  $f_I(z, a)$  と一致する。(7)式の  $\cos^M \{ \cdot \}$  の項はWindowで  $M = 2$  ではHanningのWindow<sup>(13), (14)</sup>となる。ここで恒等式

$$\begin{aligned} \cos^M \gamma &= \left( \frac{e^{j\gamma} + e^{-j\gamma}}{2} \right)^M \\ &= \frac{1}{2^M} \sum_{m=0}^M C_m e^{j(2m-M)\gamma} \end{aligned} \quad (12)$$

を用いると

$$\begin{aligned} f(z, a) &= \frac{1}{2^M d} e^{j\{ \frac{M\pi}{2} - (\frac{N-1}{2})a \}} \\ &\cdot \sum_{m=0}^M C_m (-1)^m \sum_{n=0}^{N-1} \rho^n z^{-n} e^{j(a+c_m)n} \\ &= \frac{1}{2^M d} e^{j\{ \frac{M\pi}{2} - (\frac{N-1}{2})a \}} \\ &\cdot \sum_{m=0}^M C_m (-1)^m p_m(z, a) \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる。ここで

$$p_m(z, a) = \frac{1 - \rho^N z^{-N} e^{j(a+c_m)N}}{1 - \rho z^{-1} e^{j(a+c_m)}} \quad (14)$$

$$c_m = \left( \frac{2m-M}{N-1} \right) \pi \quad (m = 0, 1, \dots, M) \quad (15)$$

である。 $p_m(z, a)$  は巡回型フィルタとなり、

$$0 < \rho < 1 \quad (16)$$

であれば極が単位円の中に入り安定な巡回型フィルタとなる。従って(16)式の条件の下では  $f(z, a)$  を巡回型の和として実行することができる。すなわち  $x_k$  をフィルタ  $p_m(z, a)$  に通したときの出力信号を  $u_k^{(m)}$ 、 $f(z, a)$  に通したときの出力信号を  $y_k$  とすると

$$\begin{aligned} u_k^{(m)} &= \rho e^{j(a+c_m)} u_{k-1}^{(m)} + x_k - \rho^N e^{j(a+c_m)N} x_{k-N} \\ &\quad (m = 0, 1, \dots, M) \end{aligned} \quad (17)$$

$$y_k = \frac{1}{d} e^{j\{ \frac{M\pi}{2} - (\frac{N-1}{2})a \}} \sum_{m=0}^M C_m (-1)^m u_k^{(m)} \quad (18)$$

となる。すなわち、(16)式の条件下で  $f(z, a)$  を巡回型の和として実行するときにはその演算回数は  $M$  のみで定まり、 $N$  に依存しない一定値である。条件(16)の下でも  $f_I(z, a)$  が示したと同じような性質が継承されていると考えられる。しかし、この場合明らかに条件[1]は正

確には満たされない。それでも、 $\rho$ が1に近い値であれば条件[1]も近似的に満足される。そこで、具体的に条件[1]~[3]を数値的に検討してみる。 $f(z, a)$ の周波数特性は

$$f(e^{j\theta}, a) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\theta} \varphi(\theta - a) \quad (19)$$

となる。 $\varphi(\theta)$ は

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{d'} \sum_{m=0}^M M C_m \cdot \frac{(1 - \rho^N) \cos\left\{\left(\frac{\theta - c_m}{2}\right)N\right\} + j(1 + \rho^N) \sin\left\{\left(\frac{\theta - c_m}{2}\right)N\right\}}{(1 - \rho) \cos\left(\frac{\theta - c_m}{2}\right) + j(1 + \rho) \sin\left(\frac{\theta - c_m}{2}\right)} \quad (20)$$

である。ここで、

$$d' = 2^M d = \sum_{m=0}^M M C_m \cdot \frac{(1 - \rho^N) \cos\left(\frac{c_m N}{2}\right) - j(1 + \rho^N) \sin\left(\frac{c_m N}{2}\right)}{(1 - \rho) \cos\left(\frac{c_m}{2}\right) - j(1 + \rho) \sin\left(\frac{c_m}{2}\right)} \quad (21)$$

である。 $d'$ は見かけ上複素数であるが性質

$$c_{M-m} = -c_m \quad (m = 0, 1, \dots, M) \quad (22)$$

を考慮すると $d'$ が実数であることがわかる。 $\varphi(\theta)$ は $\rho = 1$ で実関数となり(19)式より条件[1]が満たされる。しかし(16)式の条件では一般には複素関数である。 $\varphi(\theta)$ は明らかに次の性質を満たしている。

$$\varphi(0) = 1 \quad (23)$$

$$\varphi(-\theta) = \overline{\varphi(\theta)} \quad (24)$$

$$\varphi(\theta + 2\pi k) = (-1)^{(N-1)k} \varphi(\theta) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (25)$$

記号頭部の-は複素共役を示す。具体的に幾つかのパラメータで $|\varphi(\theta)|$ 、 $\arg\{\varphi(\theta)\}$ を図示してみると図1と図2のようになる。これからフィルタ $f(z, a)$ は $\theta = a$ を中心周波数とする狭帯域特性で通過帯域の中では近似的に線形位相であることがわかる。すなわち $0 < \rho < 1$ で考えた巡回型フィルタ((13)式と(14)式を考える)は所定の条件[1]~[3]を満たすことがわかる。

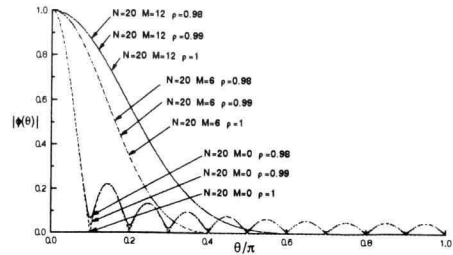


図1  $|\varphi(\theta)|$ の特性

Fig.1 The Characteristics of  $|\varphi(\theta)|$ .

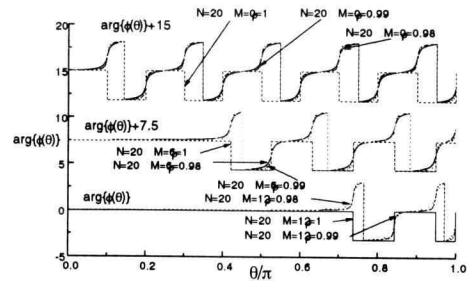


図2  $\arg\{\varphi(\theta)\}$ の特性

Fig.2 The Characteristics of  $\arg\{\varphi(\theta)\}$ .

### 3. $\varphi(\theta)$ の特性

フィルタ $f(z, a)$ の特性、すなわち $\varphi(\theta)$ の特性をもうすこし細かく調べてみる。 $\rho = 1$ のときはFIRフィルタ(7)式として考えると $0 < \rho \leq 1$ でその特性が議論できる。 $\theta$ を0から増加させたとき $|\varphi(\theta)|$ が初めて $\delta_c = 10^{-3}$  ( $\rho = 1$ のときは0となる)となる $\theta$ を $\theta_c$ とする。 $\theta_c$ はいわば帯域の巾(の半分)を特徴づけるパラメータである。 $\theta_c$ をいくつかのパラメータで図示すると図3のようになる。 $\rho = 1$ のときは

$$\theta_c \approx \frac{M+2}{N} \pi \quad (26)$$

となる。 $0 < \rho < 1$ の場合、 $M < 6$ では $|\varphi(\theta)|$ の形状がのつぺりしたものとなる。 $M \geq 6$ では $\rho = 1$ の場合と同じ傾向となる。 $\rho = 1$ のはあい $M$ が小さいとき $\theta_c$ は小さな値で都合が良く見えるが実は大きなサイドローブが存在している。 $\rho = 1$ の場合は

$$\delta_c \approx \frac{0.21}{2.36^M} \quad (27)$$

のようになり  $N$  に依存しない。  $0 < \rho < 1$  でも殆ど(25)式と同じ評価が成立する。すなわち  $M$  と共に  $|\theta| > \theta_c$  の値  $|\varphi(\theta)|$  は著しく小さくなり  $M=10$  では  $\delta_c \approx 4 \times 10^{-5}$  (-88dB)となる。

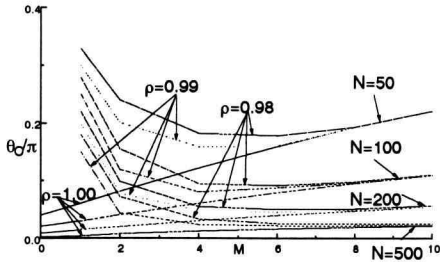


図3  $\theta_c$  の  $(N, M)$  との関係

Fig.3 The Relation between  $\theta_c$  and  $(N, M)$ .

次にフィルタ  $f(z, a)$  の実行上の特徴を調べておく。 $f(z, a)$  のような複素数係数のフィルタは実係数フィルタと幾分異なる点がある。すなわち、 $\varphi(\theta - a)$  は(23)式~(25)式からわかるように  $\theta = a$  にピークを持ち  $|\theta| \leq \pi$  の  $\theta = a$  の近傍以外では殆ど0である。そのために入力が実数であると振幅が半分になって出力される。すなわち、 $x_k$  の  $z$ -変換を  $Z\{x_k\}$  のように表すと

$$Z\left\{\frac{1}{2}e^{iak}\right\} = f(z, a)Z\{\cos(ka)\} \quad (28)$$

のようになることが特徴である。

#### 4. 理想微分フィルタ

我々の目的とする微分フィルタの理想特性を与える。 $a$  と  $b$  を

$$0 \leq a < b \leq \pi \quad (29)$$

となるような実数とする。理想微分フィルタは帯域成分

$$a \leq \theta \leq b \quad (30)$$

の信号を微分する。 $R$  を適当な0以上の整数として、理想  $r$  階微分フィルタの周波数特性は

$$I_r(\theta) = \chi_r \mu_r(\theta) e^{-j\frac{N\theta}{2}} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, R) \quad (31)$$

であるとする。ここで

$$\mu_r(\theta) = \begin{cases} \theta^r & a \leq \theta \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (r = 0, 1, \dots, R) \quad (32)$$

$$\chi_r = \begin{cases} 1 & r: \text{even} \\ j & r: \text{odd} \end{cases} \quad (r = 0, 1, \dots, R) \quad (33)$$

である。

#### 5. 合成微分フィルタの最適設計

基礎狭帯域フィルタの実係数線形結合により合成したフィルタで理想微分フィルタを近似することを考える。 $L$  を1以上の整数として実数列

$$a \leq a_1 < a_1 < \dots < a_L \leq b \quad (34)$$

を一組選ぶ。次に中心周波数  $a_\ell$  ( $\ell = 1, 2, \dots, L$ ) の基礎狭帯域フィルタ  $f(z, a_\ell)$  の実係数線形結合フィルタ

$$F_B(z) = \sum_{\ell=1}^L A_\ell \varphi(\theta - a_\ell) \quad (35)$$

を考える。いま、 $F_B(z)$  の周波数特性  $F_B(e^{j\theta})$  で  $I_r(e^{j\theta})$  を近似するとしてみる。(19)式と(31)式を比較すると  $\frac{1}{2}\theta$  だけ位相特性に差がある。また  $r$  が奇数の場合の90度位相の進む特性は  $F_B(e^{j\theta})$  では得られない。そこで1次のフィルタ

$$g_r(z) = \begin{cases} (1+z^{-1})/2 & r: \text{even} \\ (1-z^{-1})/2 & r: \text{odd} \end{cases} \quad (36)$$

を  $F_B(z)$  に直列に作用させる。 $g_r(z)$  の周波数特性は

$$g_r(e^{j\theta}) = \chi_r \psi_r(\theta) e^{-j\frac{\theta}{2}} \quad (37)$$

と表される。ここで

$$\psi_r(\theta) = \begin{cases} \cos(\frac{\theta}{2}) & r: \text{even} \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & r: \text{odd} \end{cases} \quad (38)$$

である。そこでフィルタ  $F_B(z)$  ではなく

$$F_r(z) = g_r(z) \sum_{\ell=1}^L A_\ell^{(r)} \varphi(\theta - a_\ell) \quad (r=0,1,\dots,R) \quad (39)$$

で  $I_r(e^{j\theta})$  を近似するものとする。  $F_r(z)$  でパラメータ  $A_\ell^{(r)}$  ( $\ell=1,2,\dots,L$   $r=0,1,\dots,R$ ) は実数とする。  
(19)式と(37)式を考慮すると

$$F_r(e^{j\theta}) = \chi_r \Phi_r(\theta) e^{-j\frac{N}{2}\theta} \quad (40)$$

と表される。ここで、

$$\Phi_r(\theta) = \psi_r(\theta) \sum_{\ell=1}^L A_\ell^{(r)} \varphi(\theta - a_\ell) \quad (41)$$

である。  $\Phi_r(\theta)$  は  $\rho=1$  のときに実関数となる。しかし  $0 < \rho < 1$  では  $\Phi_r(\theta)$  は複素関数である。従って我々は  $|\Phi_r(\theta)|^2$  で理想フィルタの振幅自乗特性  $|I_r(\theta)| = \mu_r^2(\theta)$  を近似する。  $\Phi_r(\theta)$  は  $\varphi(\theta)$  の性質から  $\theta = a_\ell$  ( $\ell=1,2,\dots,L$ ) にピークを持ち、その巾はほぼ一定である。そこで我々は  $\{a_\ell\}_{\ell=1}^L$  を(34)式の範囲で任意に選ぶのではなくて等間隔に

$$a_\ell = a + (b-a) \frac{(2\ell-1)}{2L} \quad (\ell=1,2,\dots,L) \quad (42)$$

とし、  $L$  を調整できるようにする。また  $L$  を適当に選ば

$$\varphi(a_\ell - a_s) \approx 0 \quad \ell \neq s \quad (43)$$

となるので、(23)式を考慮すると

$$\Phi_r(a_\ell) \approx \psi_r(a_\ell) A_\ell^{(r)} \quad (44)$$

となる。そこで

$$\psi(a_\ell) A_\ell^{(r)} \approx \mu_r(a_\ell) \quad (45)$$

従って

$$A_\ell^{(r)} \approx \frac{\mu_r(a_\ell)}{\psi(a_\ell)} \quad (\ell=1,2,\dots,L \quad r=0,\dots,R) \quad (46)$$

と選ぶ方法が考えられる。しかし、一般には(43)式とはならず(41)式の  $\varphi(\theta - a_\ell)$  がそれぞれ重なったものとなる。そこで、この論文では

$$A_\ell^{(r)} = \lambda_r \frac{\mu_r(a_\ell)}{\psi(a_\ell)} \quad (\ell=1,2,\dots,L \quad r=0,\dots,R) \quad (47)$$

$$\lambda_r > 0 \quad (r=0,1,\dots,R) \quad (48)$$

としてパラメータ  $\lambda_r$  を調整して  $\Phi_r(\theta)$  を決めることにする。すなわち  $\Phi_r(\theta)$  では二つのパラメータ  $L$  と  $\lambda_r$  を調整できるわけである。すなわち

$$\Phi_{Br}(\theta) = \psi_r(\theta) \sum_{\ell=1}^L \frac{\mu_r(a_\ell)}{\psi(a_\ell)} \varphi(\theta - a_\ell) \quad (49)$$

として

$$\Phi_r(\theta) = \lambda_r \Phi_{Br}(\theta) \quad (50)$$

とする。そこで  $\lambda_r$  と  $L$  を変数とする評価関数

$$J_r = \frac{1}{2} \int_0^\pi \{ \lambda_r^2 |\Phi_{Br}(\theta)|^2 - \mu_r^2(\theta) \}^2 W(\theta) d\theta \quad (51)$$

を最小にするように  $\lambda_r$  と  $L$  を定める。  $W(\theta)$  は荷重関数で例えば

$$W(\theta) = \begin{cases} 1 & a \leq \theta \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (52)$$

等とする。  $\lambda_r$  は正規方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_r}{\partial \lambda_r^2} &= \lambda_r^2 \int_0^\pi |\Phi_{Br}(\theta)|^4 W(\theta) d\theta \\ &- \int_0^\pi |\Phi_{Br}(\theta)|^2 \mu_r^2(\theta) W(\theta) d\theta = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

より定まる。すなわち(53)式を満足する  $\lambda_r$  は

$$\hat{\lambda}_r = \sqrt{\frac{\int_0^\pi |\Phi_{Br}(\theta)|^2 \mu_r^2(\theta) W(\theta) d\theta}{\int_0^\pi |\Phi_{Br}(\theta)|^4 W(\theta) d\theta}} \quad (54)$$

である。(55)式は  $L$  によらず同じ形となる。  $J_r$  で

$\lambda_r = \hat{\lambda}_r$  としてもものを  $\hat{J}_r$  とすると  $\hat{J}_r$  は  $L$  の関数となるので、所定の  $L$  の範囲で  $\hat{J}_r$  を計算し、最小となる  $L$  を  $\hat{L}$  とする。  $L = \hat{L}$ ,  $\lambda_r = \hat{\lambda}_r$  としたときの  $\hat{J}_r$  を  $\tilde{J}_r$  とすると、

$$\tilde{J}_r \leq J_r \quad (r=0,1,\dots,R) \quad (55)$$

となる。ここで

$$\Phi_r(\theta) = |\Phi_r(\theta)| e^{j\Gamma_r(\theta)} \quad (56)$$

とし  $\hat{\Phi}_r(\theta)$  に対応して  $\hat{\Gamma}_r(\theta)$  とする。  $\Gamma_r(\theta)$  は位相特

性を示す。 $\rho = 1$ なら理想位相特性となり $\Gamma_r(\theta) = 0$ となる。任意の $L$ と $\hat{\lambda}_r$ で得られる微分フィルタを合成微分フィルタ、特に $L_r = \hat{L}_r$ とした場合を最適合成微分フィルタと呼ぶ。この節での議論からわかるように(39)式の形のフィルタにより微分フィルタに限らず位相特性が近似的に一定の線形位相特性である任意の振幅特性のフィルタを近似することができる。

## 6. 合成微分フィルタの特性と実行

(50)式で $L$ を任意に与えて最適パラメータ $\hat{\lambda}_r$ を設定したときの合成フィルタを $\hat{F}_r(z)$ 、周波数特性を $\hat{\Phi}_r(\theta)$ とする。図4は $\hat{J}_r$ が $L$ と共に変化する様子を示している。また、表1は $\hat{J}_r$ と $\hat{L}$ の値を示したものである。  
 $N = 250, M = 6, \rho = 0.99, a = 0.1\pi, b = 0.2\pi$   
 $L = 25$ での $|\hat{\Phi}_r(\theta)|$ と $\hat{\Gamma}_r(\theta)$ を $r = 0, 1, 2, 3$ に対して図示したものが図5と図6であり、理想特性を良く近似していることがわかる。5節で述べた合成フィルタの設計法は振幅自乗特性のみを近似するものであったが、位相特性に関してもほぼ理想に近い特性が得られている。これは $\varphi(\theta)$ が(23)式の性質を持つことと $a_\ell$ を等間隔に配置したことによると考えられる。また $b - a$ の値に対して $\hat{J}_r$ が最小となる $N$ の値があり、 $b - a$ が小さくなるに従い最適な $N$ は大きくなる。

合成微分フィルタの実行に際して位相特性が同じ $r(= 0, 1, 2, \dots, R)$ 階の微分フィルタ群を作るために $N$ を固定し、各 $r$ に対して最適な $L$ はに表1よりいくらか変化するが、例えばその平均値に近い $L$ を一つ選んで固定する。同じ $N$ と $L$ のフィルタ群 $F_r(\theta)$  ( $r = 0, 1, \dots, R$ )は、作り方から通過域(29)式で近似的に同じ線形位相特性を示す。また、フィルタの演算は基礎狭帯域フィルタ $f(z, a_\ell)$  ( $\ell = 1, 2, \dots, L$ )と1次フィルタ $g_0(\theta)$ と $g_1(\theta)$ 及びパラメータ $A_\ell^{(r)}$ との積和演算のみで実行できる。

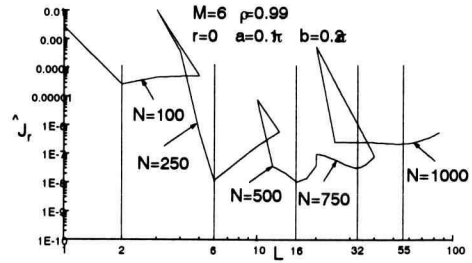


図4  $\hat{J}_r$ の $L$ に対する依存特性

Fig.4 The Dependence Characteristics of  $\hat{J}_r$  on  $L$ .

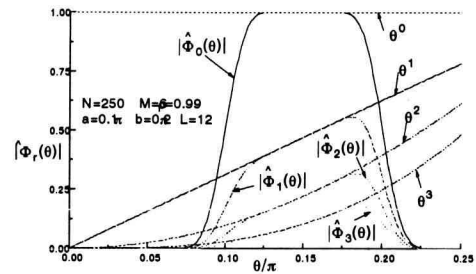


図5 合成微分フィルタの振幅特性  
Fig.5 The Amplitude Characteristics of the Differentiators.

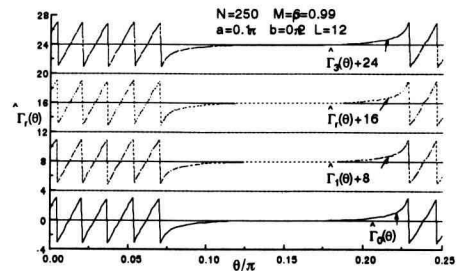


図6 合成微分フィルタの位相特性  
Fig.6 The Phase Characteristics of the Differentiators.

表1 合成微分フィルタパラメータ $\hat{\lambda}_r$ と $\hat{L}$

Table 1. The Parameters of The Differentiators.

$M = 6 \quad a = 0.1\pi \quad b = 0.2\pi$

$\rho$	$N$	$\hat{\lambda}_r$	$\hat{L}$
0.98	50	0.562678	2
	100	0.80507	2
	200	0.697214	5
0.99	50	0.791397	20
	100	0.562128	2
	100	0.791989	2

	200	0.639038	5
	500	0.548708	17
1	50	0.561947	2
	100	0.787746	2
	200	0.620912	5
	500	0.556887	14

## 7. 伝達関数の推定

ある線形系の伝達関数が

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_N s^N}{1 + a_1 s + \cdots + a_N s^N} \quad (57)$$

であり、この系への入力を  $x(t)$ 、出力を  $y(t)$  とする。  
もし信号が

$$x(t) = \sum_{m=0}^M \{A_m \cos(\omega_m t) + B_m \sin(\omega_m t)\} \quad (58)$$

であれば

$$x^{(q)}(t) = \sum_{m=0}^M \omega_m^q \left\{ A_m \cos\left(\omega_m t + \frac{\pi}{2} q\right) + B_m \sin\left(\omega_m t + \frac{\pi}{2} q\right) \right\} \quad (q = 0, 1, \dots, L) \quad (59)$$

$$y^{(p)}(t) = \sum_{m=0}^M \left[ G(j\omega_m) |A_m|^p \cos\left\{\omega_m t + \frac{\pi}{2} p - \varphi(\omega_m)\right\} + B_m \sin\left\{\omega_m t + \frac{\pi}{2} p - \varphi(\omega_m)\right\} \right] \quad (p = 0, 1, \dots, L) \quad (60)$$

となる。ここで

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} \quad (61)$$

である。また、ここで

$$a \leq \frac{\omega_m}{h} \leq b \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (62)$$

ならば  $x^{(0)}(kh), \dots, x^{(L)}(kh)$ ,  $y^{(0)}(kh), \dots, y^{(L)}(kh)$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ ) の推定値

$$X^{(0)}(kh), \dots, X^{(L)}(kh) \quad Y^{(0)}(kh), \dots, Y^{(L)}(kh) \quad (k = 0, 1, \dots, K) \quad (63)$$

が微分フィルタにより必要程度に十分に正確に得られる。  
そこで推定する伝達関数を

$$G_{P,Q}(s) = \frac{B_Q(s)}{A_P(s)} \quad (64)$$

$$0 \leq Q \leq P \quad 1 \leq P \leq L \quad (65)$$

とする。ここで

$$A_P(s) = 1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_P s^P \quad (66)$$

$$B_Q(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \cdots + \beta_Q s^Q \quad (67)$$

とする。評価式

$$J = \sum_{k=0}^K \left[ Y^{(0)}(kh) - \left\{ -\sum_{p=1}^P \alpha_p Y^{(p)}(kh) + \sum_{q=0}^Q \beta_q X^{(q)}(kh) \right\} \right]^2 \rightarrow \text{Min} \quad (68)$$

を考える。 $J$  を最小とするときの  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_Q)$  を  $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_P, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_Q)$  とする。ここで

$$\mathbf{a}_K = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_P, \hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_Q)^T \quad (69)$$

$\mathbf{A}_K =$

$$\begin{bmatrix} -Y^{(0)}(0) & -Y^{(2)}(0) & \cdots & -Y^{(P)}(0) & X^{(0)}(0) & X^{(1)}(0) & \cdots & X^{(Q)}(0) \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ -Y^{(0)}(Kh) & -Y^{(2)}(Kh) & \cdots & -Y^{(P)}(Kh) & X^{(0)}(Kh) & X^{(1)}(Kh) & \cdots & X^{(Q)}(Kh) \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\mathbf{b}_K = [Y^{(0)}(0), \dots, Y^{(0)}(Kh)]^T \quad (71)$$

とすれば

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{A}_K^+ \mathbf{b}_K \quad (72)$$

となる。右肩の  $T$  は転置を、 $+$  は Penrose の一般化逆行列を示す。

## 8. 終結式による次数の推定

系(57)の次数は分母と分子が既約なら  $N$  であるが、可約なら  $N$  より小さくなる。見かけ上の次数  $N$  そのものも実際には不明である。そこで  $P$  次の系(64)としてパラメータ推定を行ったがどのような  $N$  が適当かという問題が生じる。ところで、 $\hat{a}_P \neq 0$ ,  $\hat{b}_Q \neq 0$  のとき2つの多項式

$$\hat{A}_P(s) = 1 + \hat{a}_1 s + \hat{a}_2 s^2 + \cdots + \hat{a}_P s^P \quad (\hat{a}_0 = 1) \quad (73)$$

$$\hat{B}_Q(s) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 s + \hat{b}_2 s^2 + \cdots + \hat{b}_Q s^Q \quad (74)$$

が既約である条件は、終結式

$$R_{P,Q} =$$

$$\left| \begin{array}{cccc} \hat{a}_P & \hat{a}_{P-1} & \cdots & \hat{a}_0 \\ & \hat{a}_P & \hat{a}_{P-1} & \cdots & \hat{a}_0 \\ & & & & \\ & & & & \hat{a}_P & \hat{a}_{P-1} & \cdots & \hat{a}_0 \\ \hat{b}_Q & \hat{b}_{Q-1} & \cdots & \hat{b}_0 & & & & \\ & \hat{b}_Q & \hat{b}_{Q-1} & \cdots & \hat{b}_0 & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \hat{b}_Q & \hat{b}_{Q-1} & \cdots & \hat{b}_0 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} Q \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} P \quad (75)$$

が  $R_{P,Q} \neq 0$  となることである<sup>(1)</sup>。もう少し小さい  $P, Q$



$P, Q$  の値でパラメータ推定をするべきである。そこで

$$\delta_{P,Q} = R_{P,Q} \cdot \hat{a}_P \cdot \hat{b}_Q \quad (76)$$

を次数決定の評価指標とすることを考える<sup>(7)</sup>。すなわち  $\delta_{P,Q}$  の範囲で最も大きくなる  $P, Q$  により伝達関数 (次数は  $P$ ) を定めようとする。ただし便宜上

$$R_{P,0} = 0.01 \quad (77)$$

としておく。

## 9. 伝達関数の推定例

図7は表2のような設定で信号  $x(t)$  を発生させる。対象系は3次で

$$G(s) = \frac{1+2s+s^2+3s^3}{1+3s+2s^2+5s^3} \quad (78)$$

である。 $G(s)$  の分母と分子は既約である。表1の出力結果には  $L=5$  として(65)の範囲で  $P, Q$  を動かしたときの  $R_{P,Q}, \delta_{P,Q}$  の変化が示されている。 $P=3, Q=3$  のとき  $\delta_{P,Q}$  が突出して大きな値となっているのがわかる。 $P>3, Q>3$  でも係数はほぼ正しく推定されている。 $R_{P,Q}$  は0ではないが  $\hat{a}_P \approx 0, \hat{b}_Q \approx 0$  のために  $\delta_{P,Q} \approx 0$  となっている。すなわち  $\delta_{P,Q}$  が次数決定の良い評価指標であることが示されている。

表3は見かけ上3次であるが実は1次の系の例である。すなわち

$$G(s) = \frac{1+6s+11s^2+6s^3}{1+4s+5s^2+2s^3} = \left( \frac{1+3s}{1+s} \right) \quad (79)$$

である。 $y^{(q)}(t)$  は3次の系として計算し  $L=5$  として(26)の範囲で  $P, Q$  を動かしたときの  $R_{P,Q}, \delta_{P,Q}$  の変化である。 $P=1, Q=1$  のとき  $\delta_{P,Q}$  が最大となり正しい次数を推定している。 $P>1, Q>1$  でも係数の推定値はほぼ正しいが  $\hat{a}_P \approx 0, \hat{b}_Q \approx 0$  のため  $\delta_{P,Q} \approx 0$  となり、やはり  $\delta_{P,Q}$  が次数決定の良い評価指標であることを示している。

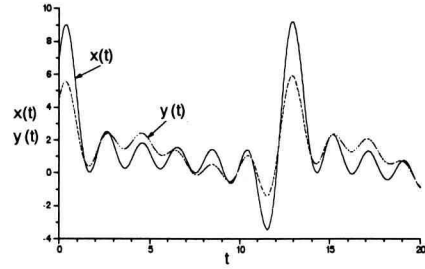


図7 例1の入出力信号

Fig7 Input Output Signal for Example 2

表2 例1の推定例

Table2 Estimation Result for No.1 Data

終結式を用いた1入力1出力系の次数の推定  
1995-9-7 16.30.22

### 検出試験のケース1

tstart = 0.00000  
totaltime= 20.00000  
h = 0.02000

入力信号 M= 6

m	$\omega_m$	$A_m$	$B_m$
m= 0	$\omega_m = 0.10000$	$A_m = 1.00000$	$B_m = 1.00000$
m= 1	$\omega_m = 0.50000$	$A_m = 1.00000$	$B_m = 1.00000$
m= 2	$\omega_m = 1.00000$	$A_m = 1.00000$	$B_m = 1.00000$
m= 3	$\omega_m = 1.50000$	$A_m = 1.00000$	$B_m = 1.00000$
m= 4	$\omega_m = 2.00000$	$A_m = 1.00000$	$B_m = 1.00000$
m= 5	$\omega_m = 2.50000$	$A_m = 1.00000$	$B_m = 1.00000$
m= 6	$\omega_m = 3.00000$	$A_m = 1.00000$	$B_m = 1.00000$

対象系伝達関数分母、分子 N= 3 L= 5

i	$a_i$	$b_i$
i= 0	$a_i = 1.00000$	$b_i = 1.00000$
i= 1	$a_i = 3.00000$	$b_i = 2.00000$
i= 2	$a_i = 2.00000$	$b_i = 1.00000$
i= 3	$a_i = 5.00000$	$b_i = 3.00000$

### 評価関数表

P	Q	終結式の値 R<P,Q>	評価式の値 $\delta$ <P,Q>
1	0	0.01000000	0.00016039
1	1	-0.02780811	0.00030925
2	0	0.01000000	0.00034790
2	1	-0.02649665	0.00001247
2	2	0.34067440	1.02010733
3	0	0.01000000	0.00000577
3	1	0.00054439	0.00000000
3	2	0.61784082	0.01694485
3	3	11.00000000	165.00000002
4	0	0.01000000	0.00011262
4	1	-0.00813159	0.00001328
4	2	0.83085601	0.01271283
4	3	-32.99999999	0.00000000
4	4	0.00000000	0.00000000
5	0	0.01000000	0.00005475
5	1	0.00268781	0.00000085
5	2	1.41232779	0.01237503

5 3 98.99999994 0.00000000  
 5 4 0.00000000 0.00000000  
 5 5 0.00000000 0.00000000

ae(2)= 2.04104 be(3)= 3.06644  
 ae(3)= 5.10123 be(4)= 0.04104  
 ae(4)= 0.07895 be(5)= 0.09498  
 ae(5)= 0.15830

## 最適パラメータ

P= 3 Q= 3  $\delta < P, Q > = 165.00000002$   
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 1.00000  
 ae(1)= 3.00000 be(1)= 2.00000  
 ae(2)= 2.00000 be(2)= 1.00000  
 ae(3)= 5.00000 be(3)= 3.00000

## 推定係数

...

P= 4 Q= 3  
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 1.00000  
 ae(1)= 3.00000 be(1)= 2.00000  
 ae(2)= 2.00000 be(2)= 1.00000  
 ae(3)= 5.00000 be(3)= 3.00000  
 ae(4)= 0.00000

P= 4 Q= 4  
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 1.00000  
 ae(1)= 3.01231 be(1)= 2.01231  
 ae(2)= 2.03692 be(2)= 1.02462  
 ae(3)= 5.02462 be(3)= 3.01231  
 ae(4)= 0.06154 be(4)= 0.03692

P= 5 Q= 0  
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 0.81431  
 ae(1)= 0.10464  
 ae(2)= -0.15176  
 ae(3)= 0.07235  
 ae(4)= -0.01230  
 ae(5)= 0.00672

P= 5 Q= 1  
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 0.81802  
 ae(1)= 0.17244 be(1)= 0.05086  
 ae(2)= -0.16203  
 ae(3)= 0.06583  
 ae(4)= -0.01332  
 ae(5)= 0.00621  
 P= 5 Q= 2  
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 0.89279  
 ae(1)= 0.30670 be(1)= -0.09389  
 ae(2)= 2.20545 be(2)= 1.38626  
 ae(3)= 0.08726  
 ae(4)= -0.00862  
 ae(5)= 0.00632

P= 5 Q= 3  
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 1.00000  
 ae(1)= 3.00000 be(1)= 2.00000  
 ae(2)= 2.00000 be(2)= 1.00000  
 ae(3)= 5.00000 be(3)= 3.00000  
 ae(4)= 0.00000  
 ae(5)= 0.00000

P= 5 Q= 4  
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 1.00000  
 ae(1)= 3.01237 be(1)= 2.01237  
 ae(2)= 2.03712 be(2)= 1.02475  
 ae(3)= 5.02475 be(3)= 3.01237  
 ae(4)= 0.06187 be(4)= 0.03712  
 ae(5)= 0.00000

P= 5 Q= 5  
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 1.00000  
 ae(1)= 3.00313 be(1)= 2.00313  
 be(2)= 1.03791

表3 例2の推定例

Table3 Estimation Result for No.3 Data

終結式を用いた1入力1出力系の次数の推定

1995-9-7 16.31.41

## 検出試験のケース2

tstart = 0.00000  
 totaltime= 20.00000  
 h = 0.02000

## 入力信号 M= 6

m= 0  $\omega_m = 0.10000$  Am = 1.00000 Bm = 1.00000  
 m= 1  $\omega_m = 0.50000$  Am = 1.00000 Bm = 1.00000  
 m= 2  $\omega_m = 1.00000$  Am = 1.00000 Bm = 1.00000  
 m= 3  $\omega_m = 1.50000$  Am = 1.00000 Bm = 1.00000  
 m= 4  $\omega_m = 2.00000$  Am = 1.00000 Bm = 1.00000  
 m= 5  $\omega_m = 2.50000$  Am = 1.00000 Bm = 1.00000  
 m= 6  $\omega_m = 3.00000$  Am = 1.00000 Bm = 1.00000

## 対象系伝達関数分母、分子 N= 3 L= 5

i= 0 ai = 1.00000 bi = 1.00000  
 i= 1 ai = 4.00000 bi = 6.00000  
 i= 2 ai = 5.00000 bi = 11.00000  
 i= 3 ai = 2.00000 bi = 6.00000

## 評価関数表

P	Q	終結式の値 R<P,Q>	評価式の値 $\delta < P, Q >$
1	0	0.01000000	0.00213872
1	1	-2.00000000	6.00000000
2	0	0.01000000	0.00116659
2	1	6.00000000	0.00000000
2	2	0.00000000	0.00000000
3	0	0.01000000	0.00032570
3	1	-18.00000000	0.00000000
3	2	0.00000000	0.00000000
3	3	0.00000000	0.00000000
4	0	0.01000000	0.00025933
4	1	54.00000000	0.00000000
4	2	0.00000000	0.00000000
4	3	0.00000000	0.00000000
4	4	0.00000000	0.00000000
5	0	0.01000000	0.00008132
5	1	-162.00000000	0.00000000
5	2	0.00000000	0.00000000
5	3	0.00000000	0.00000000
5	4	0.00000000	0.00000000
5	5	0.00000000	0.00000000

## 最適パラメータ

P= 1 Q= 1  $\delta < P, Q > = 6.00000000$   
 ae(0)= 1.00000 be(0)= 1.00000  
 ae(1)= 1.00000 be(1)= 3.00000

## 推定係数

P= 1 Q= 0 be(0)= 2.15465  
 ae(0)= 1.00000  
 ae(1)= -0.09926

P= 1 Q= 1  
 ae(0)= 1.00000  
 ae(1)= 1.00000  
 be(0)= 1.00000  
 be(1)= 3.00000

P= 2 Q= 0  
 ae(0)= 1.00000  
 ae(1)= -0.04669  
 ae(2)= 0.07760  
 be(0)= 1.50332

P= 2 Q= 1  
 ae(0)= 1.00000  
 ae(1)= 1.00000  
 ae(2)= 0.00000  
 be(0)= 1.00000  
 be(1)= 3.00000

P= 2 Q= 2  
 ae(0)= 1.00000  
 ae(1)= 1.02656  
 ae(2)= 0.02656  
 be(0)= 1.00000  
 be(1)= 3.02656  
 be(2)= 0.07969

P= 3 Q= 0  
 ae(0)= 1.00000  
 ae(1)= -0.18819  
 ae(2)= 0.06844  
 ae(3)= -0.02026  
 be(0)= 1.60776

P= 3 Q= 1  
 ae(0)= 1.00000  
 ae(1)= 1.00000  
 ae(2)= 0.00000  
 ae(3)= 0.00000  
 be(0)= 1.00000  
 be(1)= 3.00000

## 10. 適応同定

既に述べたように、提案した微分フィルタ群はフィルタ入力として現在より有限過去の観測値しか用いない。また、同定にはその推定値の有限過去までの値しか用いないので、その区間の間は一定と見なせるようなゆっくりとした系の変化に対しては本論分で述べた同定手法は適用が出来ると考えられる。すなわち、適応同定の機能があると考えられる。

議論を明確にするために、特に1次の系

$$G(s) = \frac{A}{s+a} \quad (80)$$

を考える。ディジタルフィルタは前節のパラメータのものを使い信号入力は

$$x(t) = \sum_{m=0}^{M_s} \{a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t)\} \quad (81)$$

とした。また、

$$T_s = 0.1 \quad N_f = 10 \quad K_f = 10 \quad (82)$$

として同定を行った。図8と図9は $x_k, \xi_k^{(r)}$ と $y_k, \eta_k^{(r)}$  ( $r = 0, 1, 2$ )の変化の様子を示す。 $A, a$ の推定値を $A_e, a_e$ として、図10はパラメータ $A, a$ が変化しない場合、図11はパラメータ $A$ が変化する場合、図

12はパラメータ $a$ が変化する場合、そして図13はパラメータ $A$ と $a$ が共に変化する場合の同定例である。これを見ると同定が適応的に実施されている様子がわかる。

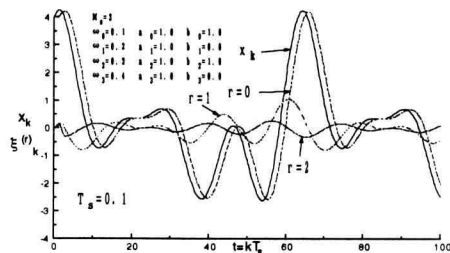


図8 対象系への入力と微分信号

Fig.8 Input for the System and its Derivatives

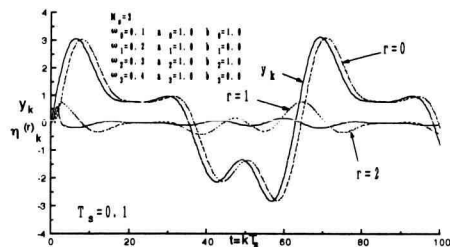


図9 対象系出力と微分信号

Fig.9 Output from the System and its Derivatives

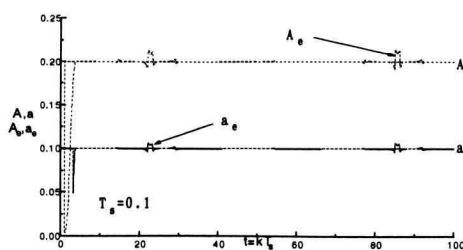


図10  $a, A$  が共に変化しない場合

Fig.10 The Case of  $a, A$  are constant

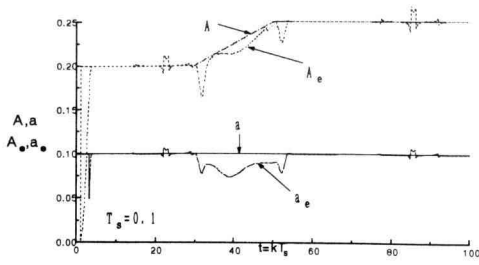


図 1 1 Aのみが変化する場合

Fig.11 The Case of only A varies

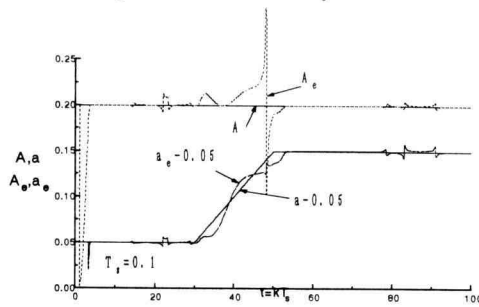


図 1 2 aのみが変化する場合

Fig.12 The Case of only a varies

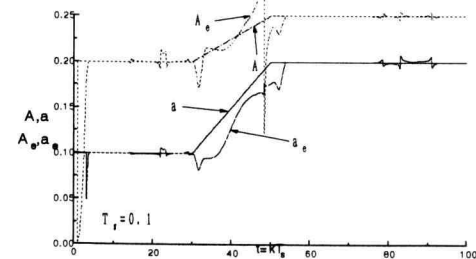


図 1 3 A, a が共に変化する場合

Fig.13 The Case of A, a vary

### 1 1. 任意特性フィルタの設計

本論文で提案した微分フィルタの設計法は実は任意の振幅特性のフィルタを設計することが出来る。これを帯域、伝達ゲインの異なる多重帯域フィルタの設計例について説明する。

始めに低域フィルタの設計例を与える。まず目的とする低域フィルタの理想特性を与える。 $\alpha$ を

$$0 \leq \alpha \leq \pi \quad (83)$$

となるような実数とする。理想帯域フィルタは帯域成分

$$0 \leq \theta \leq \alpha \quad (84)$$

の信号を一定時間遅らせる。理想帯域フィルタの周波数特性は

$$I_\alpha(\theta) = J_\alpha(\theta) e^{-j\frac{N}{2}\theta} \quad (85)$$

である。ここで

$$J_\alpha(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (86)$$

である(図14)。

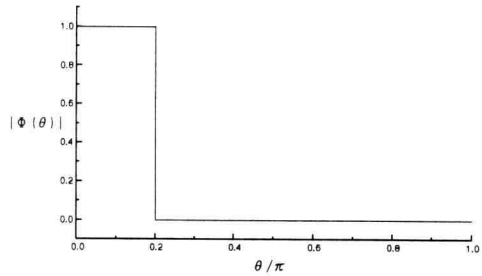


図 1 4 理想低域フィルタ

Fig.14 Ideal Low Pass Filter

次に伝達ゲインの異なる帯域フィルタの理想特性を与える。 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ を

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 \leq \pi \quad (87)$$

となるような実数とする。このような理想帯域フィルタの周波数特性は

$$I_{\{\alpha_l, \beta_l\}_{l=1}^2}(\theta) = \left\{ \sum_{l=1}^2 J_{\alpha_l, \beta_l}(\theta) \right\} e^{-j\frac{N}{2}\theta} \quad (88)$$

である。ここで、

$$J_{\alpha_l, \beta_l}(\theta) = \begin{cases} \sigma_l & \alpha_l \leq \theta \leq \beta_l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\ell = 1, 2) \quad (89)$$

である(図15)。

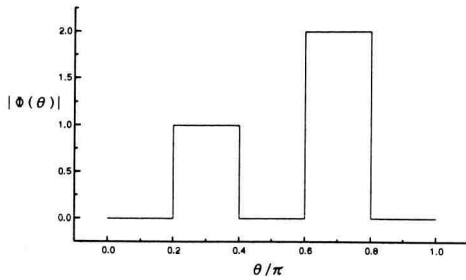


図 15 理想帯域フィルタ

Fig.15 Ideal Multi-Band Filter

## 12. 合成FIRフィルタによる設計

基礎狭帯域フィルタの実係数線形結合により合成したフィルタで理想低域及び伝達ゲインの異なる帯域フィルタを近似することを考える。まず低域フィルタの場合を考える。 $L$ を1以上の整数として実数列

$$0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_L \leq a \quad (90)$$

基礎狭帯域フィルタ  $f(z, a_\ell)$  の実係数線形結合フィルタ

$$F_B(z) = \sum_{\ell=1}^L A_\ell f(z, a_\ell) \quad (91)$$

を考える。いま  $F_B(z)$  の周波数特性  $F_B(e^{j\theta})$  で  $I_a(e^{j\theta})$  を近似するものとする。 $F_B(z)$  でパラメータ  $A_\ell$  ( $\ell = 1, 2, \dots, L$ ) は実数とする。(19)式を考慮すると

$$F_B(e^{j\theta}) = \Phi(\theta) e^{-j\frac{N}{2}\theta} \quad (92)$$

と表される。ここで、

$$\Phi(\theta) = \sum_{\ell=1}^L A_\ell \varphi(\theta - a_\ell) \quad (93)$$

である。 $\Phi(\theta)$  は  $\rho = 1$  のときに実関数となる。しかし  $0 < \rho < 1$  では  $\Phi(\theta)$  は複素関数である。そこで、 $|\Phi(\theta)|^2$  で理想フィルタの振幅自乗特性  $|I_{a,b}(\theta)|^2 = 1$  を近似する。 $\Phi(\theta)$  は  $\varphi(\theta)$  の性質から  $\theta = a_\ell$  ( $\ell = 1, 2, \dots, L$ ) にピークを持ち、その幅はほぼ一定である。この論文では  $\{a_\ell\}_{\ell=1}^L$  を(90)式の範囲で

等間隔に選ぶものとする。また

$$\varphi(a_\ell - a_s) \approx 0 \quad \ell \neq s \quad (94)$$

となるので、 $\varphi(\theta)$  の性質を考慮すると

$$A_\ell \approx \Phi(a_\ell) \quad (95)$$

となる。従って

$$A_\ell \approx J_{a,b}(a_\ell) \quad (96)$$

と選ぶ方法が考えられる。しかし、一般には(94)式とはならず(93)式の  $\varphi(\theta - a_\ell)$  がそれぞれ重なったものとなる。そこで、この論文ではふたつの場合についての近似方法を考えてみる。まず(87)式の範囲内での値  $\{a_\ell\}_{\ell=1}^L$  が少ない場合はその範囲の  $\Phi(a_\ell)$  の平均値により全体を割るとし、 $\{a_\ell\}_{\ell=1}^L$  が多い場合は最大となる  $\Phi(a_\ell)$  で全体を割るとする。この方法により近似することができる。

次に多重帯域フィルタの場合であるが、帯域フィルタの場合とほとんど同じである。 $\{a_\ell\}_{\ell=1}^L$  が少ない場合は  $\Phi(a_\ell)$  が最大となる範囲内の平均値で割るとし、 $\{a_\ell\}_{\ell=1}^L$  が多い場合は最大となる  $\Phi(a_\ell)$  で全体を割り  $A_\ell$  をかけるとする。この方法により近似することができる。

## 13. 合成フィルタの特性と実行

前節で与えた方法により次のフィルタを設計してみる。設計例を2つ与える。何れの場合にもパラメータ  $N = 300, M = 5, L = 2, \rho = 0.99$  を用いている。

### 設計例1 (低域フィルタ)

この場合の振幅特性と位相特性を図16と図17に示す。

### 設計例2 (帯域フィルタ)

この場合の振幅特性と位相特性を図18と図19に示す。

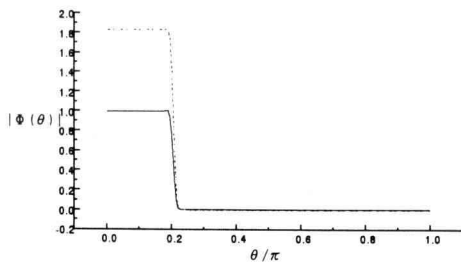


図 16 設計低域フィルタの振幅特性

Fig.16 Magnitude Characteristics of Low Pass Filter

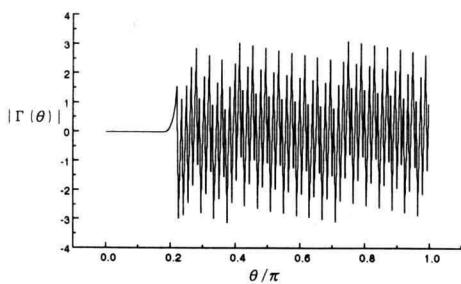


図 17 設計低域フィルタの位相特性

Fig.17 Phase Characteristics of Low Pass Filter

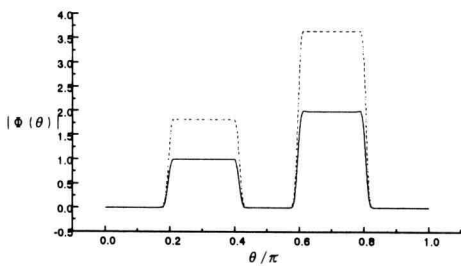


図 18 設計低域フィルタの振幅特性

Fig.18 Magnitude Characteristics of Band Pass Filter

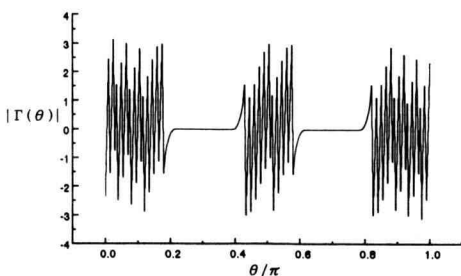


図 19 設計低域フィルタの位相特性

Fig.19 Phase Characteristics of Band Pass Filter

振幅特性は理想特性を良く近似している。また位相特性はほぼ線形位相特性を示していることがわかる。

#### 14. フィルタの実行

既に述べて来たように提案した基礎帯域フィルタは IIR フィルタ  $P_m(z)$  の和となる。IIR フィルタ  $P_m(z)$  は(17)式のようにして実行できるので、次数  $N$  に無関係な演算回数で計算できる。従って提案の基礎帯域フィルタの和として示される。提案の低域および伝達ゲインの異なる帯域フィルタも  $N$  に無関係な演算回数で計算できる。これは  $N$  が高次になると極めて有効である。サンプル周期を  $T_s = 0.01$  とし、

$$x_k = a + b \cdot \sin(2\pi f T_s k) \quad (k = 0, 1, \dots, L) \quad (97)$$

を入力信号とした場合の応答例を図 20 に示す。この図では振幅特性が 1 の周波 ( $f = 15\text{Hz}$ ) 数に対する応答で、出力は実部、虚部共に理論とおり 0.5 が出力されている。

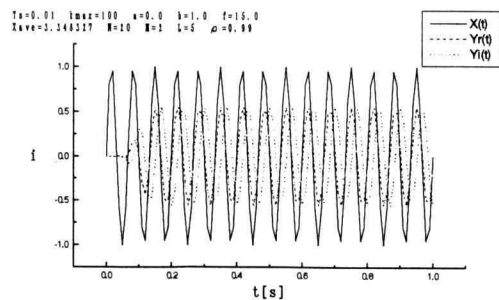


図 20 設計フィルタの応答例

Fig.20 The Response Curve for the Designed Filter

#### 15. まとめ

有限インパルス応答型帯域フィルタの並列合成によるデジタル微分フィルタの一設計法について与え、これにより同じ次数で、同じでしかも殆ど線形位相特性を持つ 0 階より所定階数の微分フィルタ群を構成することができることを示した。そして、このフィルタ群により伝達関数のパラメータ推定と終結式を用いた指標によ

る伝達関数の次数の推定ができることを示した。また、これにより対象系がゆっくり変化する系の適応同定の可能性を示した。更に、提案した基礎となる狭帯域フィルタの並列合成の手法は微分フィルタ以外の任意の特性のフィルタの設計に利用できることを設計例により示し、提案する設計手法の有効性を示した。

### 文献

- (1) 横田、立花「気象庁納め地震活動等総合監視システム」三菱電機技報、63,9,pp.54-57,1989.9
- (2) Makio Ishiguro "A Bayesian Approach to the Analysis of the Data of Crustal Movements" 測地学会誌、27,4,pp.256-262,1981
- (3) D.E.Cartwright and Anne C.Edden "Correct Tables of Tidal Harmonics", Geophysics, J.R.Astr. Soc,33, pp.253-264,1973
- (4) 「システム同定」自動制御ハンドブック、オーム社、1983
- (5) 立花「カスケード微分フィルタによる伝達関数の推定」信学論(D),58,9,pp.546-553,1975.9
- (6) 立花「ハニング窓の拡張と高速フィルタバンクへの応用」電子情報通信学会DSP研究会、DSP-89-5,1989.4
- (7) 立花、真庭「微分フィルタを用いた伝達関数次数の推定」第10回ディジタル信号処理シンポジウム、1995.11
- (8) 立花、真庭他「巡回型狭帯域フィルタによる微分フィルタの最適設計」信学論(A),J78-A,5,pp.554-561,1995.5
- (9) N.K.Bose "Digital Filters", North-Holland, 1985
- (10) B.D.Rakovick, et.al. "Minimum Phase Transfer Functions Processing a Compromise Between Phase and Amplitude Approximation", IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol.CAS-24, No.12, 1977.12
- (11) L.R.Rabiner and R.W.Schafer "On the Behavior of Minimax Relative Error FIR Digital Differentiators", Bell Syst. Tech.J., Vol.53, No.2, pp.393-361, 1974.2
- (12) L.R.Rabiner and R.W.Schafer "On the Behavior of Minimax Relative Error FIR Digital Hilbert Transforms", Bell Syst. Tech.J., Vol.53, No.2, pp.393-361, 1974.2
- (13) J.W.Adams "A New Optimal Window" IEEE Trans. of Signal Processing, Vol.39, No.8, pp.1753-1769, 1991.8
- (14) Albert H.Nuttall "Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior", IEEE Trans. Acou Speech & Signal Process., ASSP-29,1, pp.84-91, 1981.2
- (15) 高木「代数学講義」共立出版, 1930