

# ラジオシティによるCGにおけるフォームファクタの解析的算出法

井上 哲理<sup>1</sup>・小林正男<sup>2</sup>・関靖夫<sup>1</sup>

1 情報工学科

2 恒和情報技研(株) (情報工学専攻平成9年3月修了)

## Analytical Estimation of Form Factors in Radiosity Method

Tetsuri INOUE<sup>1)</sup>, Masao KOBAYASHI<sup>2)</sup>, Yasuo SEKI<sup>1)</sup>

### Abstract

This paper proposed an analytical approach to estimate form factors in the radiosity method. The radiosity method, which is one of the computer graphics techniques, can generate photo-realistic images by modeling light interreflections between surfaces. The most important and most computationally intensive process in the radiosity method is the estimation of form factors, the geometric quantity which is the rate of the radiant energy received by one surface element to that leaving another surface element. The proposed approach estimates form factors through virtual projection to hemisphere base, in which each boundary line segment of a trigonal patch consisting of the surfaces is projected analytically onto a hemisphere base and visible elements are sampled by using a scanline technique. This approach can perform at computation cost less than, and can estimate form factors more accurate than other approach such as the hemi-cube technique.

Key Words: computer graphics, radiosity, form factor, hemisphere base

### 1. はじめに

ラジオシティ法 (radiosity method) はコンピュータグラフィックスにおけるレンダリング手法の一つであり、リアルな画像の生成が可能なることから現在活発に研究されている。リアルな画像生成法としてレイトレーシング法が有名であるが、同方法は拡散反射面の輝度を基本的には光源から直接照射される光線のみにより決定するため、生成された画像には不自然な鮮明さが現れる傾向がある。我々の周囲の物体間では光の相互反射が存在し、その結果として輝度分布は緩やかなものとなるのが普通である。ラジオシティ法はこのような拡散反射面間の相互反射による効果を考慮して拡散面の輝度を決定する点が特徴であり、緩やかな輝度分布の表現が可能でリアルな画像生成に適した手法と言える。

ラジオシティ法では、フォームファクタ (form factor, 形態係数) と呼ばれる物体間の幾何学的な位置関係を表す量を算出する必要がある。算出したフォームファクタの精度はラジオシティ法による画像生成精度に大きく影響することが知られている。またラジオシティ法の処理全体でフォームファクタ計算が量的に占める割合が多く、高速な処理方法が求められている。

フォームファクタを求める手法はこれまでにさまざまな方法が提案されている。ヘミ・キューブ法は最も有名な方法のひとつであるが、この他にも四面体を用いる方法、一枚のスクリーンを用いる方法、半球を用いる方法、解析

的に求める方法、レイ・トレーシング法を応用する方法などが提案されている。しかし、これらの方法は近似的な解法のため対象物体の配置によっては誤差が大きくなる場合があり、あるいは膨大な計算量や記憶領域を必要とするなどの問題点を持っている。

本報告では、ラジオシティ法で使用するフォームファクタの算出法として半球底面を用いた解析的計算方法を提案する。本方法は解析的な手法であり、計算精度が均一であること、探索が必要ないなどアルゴリズム的に単純であるなどの特徴を有する。本報告では、まずラジオシティ法について概説し、次に提案方法を述べる。実験では提案方法による画像生成を行い、結果をヘミ・キューブ法と比較した。

### 2. ラジオシティ法

#### 2.1 ラジオシティ方程式

ラジオシティ法では対象とする物体および照明などの環境を微小面積の多面体 (パッチ) で近似し、閉じた系における平衡時の光のエネルギーバランスを求めることにより各パッチ面の輝度を決定する。ここで光のエネルギーの放射と反射の過程は全て理想的な拡散である、つまり入射光がすべての方向に同じ強度で反射する、という仮定がある。

一つのパッチから発する光は自己放射光および他のパッチから入射して拡散反射する光で構成されている。

一つのパッチから発する光の量を決定するためには、全てのパッチ相互間の幾何学的な関係および各パッチから発する光の量を記述することが必要となる。あるパッチ*i*と他のパッチ*j*の光エネルギーに関する関係式を次の式で表わす。

$$B_i = E_i + \rho_i B_j F_{ij} \quad (1)$$

ここで、

$B_i$ : パッチ*i*から発すエネルギーの総和

$E_i$ : パッチ*i*から自己放射されるエネルギー

$\rho_i$ : パッチ*i*の反射率

$F_{ij}$ : パッチ*j*から発したエネルギーがパッチ*i*に到達する割合 (フォームファクタ)

式(1)は、パッチが発する光のエネルギーの総量が自己放射光と反射光の和に等しいことを示している。ラジオシティの解析を行うために、描画対象物体の各面を平面パッチ*i* ( $i=1, \dots, N$ ) に分割する。以下では簡単のために各パッチは単位面積に分割されたものとする。このとき式(1)はパッチ毎の総和によって表される。

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j F_{ij} \quad (2)$$

ここで、 $N$ は総パッチ数である。式(2)を行列の形にすると次式になる。

$$\begin{bmatrix} 1-\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \dots & -\rho_1 F_{1N} \\ -\rho_2 F_{21} & 1-\rho_2 F_{22} & \dots & -\rho_2 F_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\rho_N F_{N1} & -\rho_N F_{N2} & \dots & 1-\rho_N F_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_N \end{bmatrix} \quad (3)$$

描画対象物体を設定すると  $E_i$  および  $\rho_i$  が決まり、また各物体間の配置関係より  $F_{ij}$  が求まる。これより式(3)を解いて  $B_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) を求めることにより、各パッチが発する光エネルギー (ラジオシティ) が得られる。式(3)は対角優位行列であるので、例えば Gauss-Seidel の反復法により高速に解を計算することが可能である。

以上のようにして求めた各パッチのラジオシティにより、各パッチの輝度が決定され、それをもとにして適当な隠面消去及びレンダリングを行い、画像が生成される。

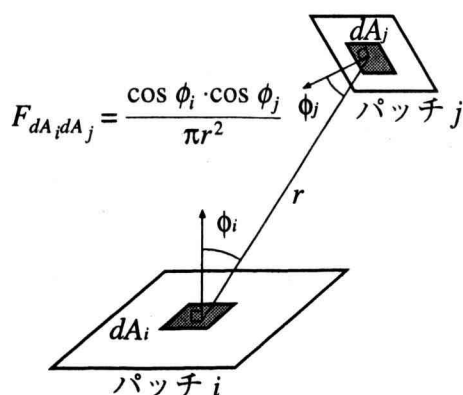


図1 パッチ間の幾何学関係とフォームファクタ

## 2.2 フォーム・ファクタ

式(1)での  $F_{ij}$  はフォーム・ファクタと呼ばれ、パッチ*j*の放射するエネルギーがパッチ*i*に到達する割合を示している。この値はパッチ間の幾何学的関係により決定される。

パッチ*i, j*の面積がそれぞれ  $A_i, A_j$  とすると、パッチ*j*に含まれる微小領域  $dA_j$  からパッチ*i*に含まれる微小領域  $dA_i$  へのフォームファクタ  $F_{dA_i dA_j}$  は次式で与えられる (図1)

$$F_{dA_i dA_j} = \frac{\cos \phi_i \cdot \cos \phi_j}{\pi r^2} \quad (4)$$

式(4)を領域  $dA_j$  について積分することによりパッチ*j*から微小領域  $dA_i$  へのフォームファクタ  $F_{dA_i}$  が求まる。

$$F_{dA_i} = \int_{A_j} \frac{\cos \phi_i \cdot \cos \phi_j}{\pi r^2} dA_j \quad (5)$$

さらに式(5)を領域  $A_i$  について積分することにより、パッチ*j*からパッチ*i*へのフォームファクタ  $F_{ij}$  は領域  $A_i$  における平均として次式で表される。

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \phi_i \cdot \cos \phi_j}{\pi r^2} H(dA_j, dA_i) dA_j dA_i \quad (6)$$

ただし、

$$H(dA_j, dA_i) = \begin{cases} 1 & (dA_i \text{ と } dA_j \text{ の間に遮蔽物体が存在しない場合}) \\ 0 & (dA_i \text{ と } dA_j \text{ の間に遮蔽物体が存在する場合}) \end{cases}$$

また、パッチ間の相互作用の関係は次式で表現される。

$$F_{ji} = F_{ij} A_i / A_j \quad (7)$$

## 2.3 フォームファクタの算出とヘミ・キューブ法

フォームファクタを正確に求めるには式(6)を用いて解析的に算出する必要がある。しかしこれは積分を含む計算であり、膨大な計算時間を要するために実用的には計算しにくい。そこで比較的簡単に求める近似算出法が幾つか提案されている。ここでは、これら近似算出法のもととなる Nusselt's Analog の関係と代表的な近似算出法のヘミ・キューブ法について簡単に述べる。

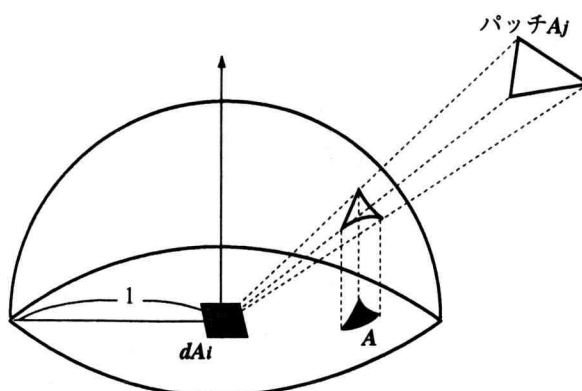


図2 Nusselt's Analog

面積が $A_j$ のパッチ $j$ から微小領域 $dA_i$ へのフォームファクタは、領域 $dA_i$ を中心として半径1の半球の底面に投影されたパッチ $j$ の面積 $A$ に等しいことが証明されている(図2)。この関係はNusselt's Analogと呼ばれている。この関係を利用して半球底面あるいは半球上の面積を求めることでフォームファクタの算出が可能となり、多くの方法で利用されている。

フォームファクタの近似算出法として最も利用されているひとつがヘミ・キューブ法である。同方法は半球を用いる代わりにパッチ $i$ 上に仮想的な半立方体(ヘミ・キューブ)を置き、パッチ毎に上面1回、側面4回の合計5回の投影変換および隠れ面消去を行う(図3)。

ヘミ・キューブ上のセル $q$ からパッチ $i$ へのフォームファクタを $F_q$ とする。パッチ $j$ からパッチ $i$ の投影はヘミ・キューブ上の複数のセルを含み、それらの総和として

$$F_{ij} = \sum_q F_q \quad (8)$$

によりフォームファクタ $F_{ij}$ が計算できる。

ヘミ・キューブ法の特長として、ヘミ・キューブという計算しやすい形状を用いていること、ヘミ・キューブ上の各セルのフォームファクタ $F_q$ をあらかじめ求めておくことで計算の効率化が可能なこと、既存のレンダリング手法を応用できることなどが挙げられる。問題点としては、投影面の探索が必要で、5回の投影変換を行うためアルゴリズムが複雑になる、上面と底面近傍とで計算精度が均一でない、各セルのフォームファクタを記憶するための大量な記憶領域が必要であることなどが挙げられる。

### 3. 半球底面投影によるフォームファクタの解析的算出法

今回提案するフォームファクタの算出法は、半球底面投影を用いてフォームファクタを解析的に求める方法である。Nusselt's Analogとしてすでに述べたようにフォームファクタはパッチの半球底面に投影された面積に等しいが、これを空間直線の半球底面への解析的投影に基づいて計算していくことが本方法の考え方である。

本方法の特徴としては、半球底面を利用し解析的にフォームファクタを求めることで、計算精度が方向によらず空間全体で均一になることが挙げられる。また、5回の投影変換を必要とするヘミ・キューブ法と比べて1回の投影変換で光の放射に必要なフォームファクタを求

めることができるので、アルゴリズム的に単純になり、処理の高速化も期待できる。

本方法における処理手順を以下に述べる。なお、すべてのパッチをあらかじめ三角形パッチにしておく。

#### ①座標点の半球および半球底面への投影

三角形パッチの頂点の半球底面への投影点を求める。ここで半球底面の中心を原点とし、底面をXY面、上軸をZ軸とする座標系を考える。この時、空間点 $(X, Y, Z)$ の半球への投影点の座標は、

$$(x, y, z) = (X/L, Y/L, Z/L) \quad (9)$$

ここで、

$$L = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

となり、さらに半球底面への投影点は $(x, y)$ となる。

#### ②三角形パッチの辺の半球底面への投影

次にパッチの各辺の投影を考える。半球へ投影された2点と原点を通る平面で半球を切る(図4)。そしてその切り口を半球底面に投影する。このとき投影線は楕円の一部となる。この半球底面への投影線の方程式(楕円)とその範囲を求める。

頂点 $p_1, p_2$ の空間座標を $(X_p, Y_p, Z_p)$  ( $i=1,2$ )とすれば、半球を切る面の法線 $(X_0, Y_0, Z_0)$ は、

$$(X_0, Y_0, Z_0) = (X_1, Y_1, Z_1) \times (X_2, Y_2, Z_2) \quad (10)$$

であり、その上側法線の単位ベクトル $(l, m, n)$ は、

$$Z_0 \geq 0: l = X_0/L_0, m = Y_0/L_0, n = Z_0/L_0 \\ Z_0 < 0: l = -X_0/L_0, m = -Y_0/L_0, n = -Z_0/L_0 \\ \text{ただし、} \\ L_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (11)$$

このとき、半球底面への投影線は $n$ の値により分類でき、それらの方程式は次のようになる。

(a)  $0 < n < 1$ の場合—楕円

$$\frac{(l_x x + m_y y)^2}{n^2} + (-m_x x + l_y y)^2 = 1 \quad (12)$$

ただし、 $(l, m)$ は楕円の短軸方向単位ベクトルで

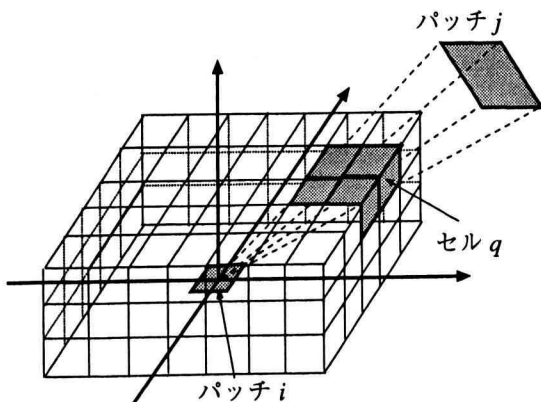


図3 ヘミ・キューブ法

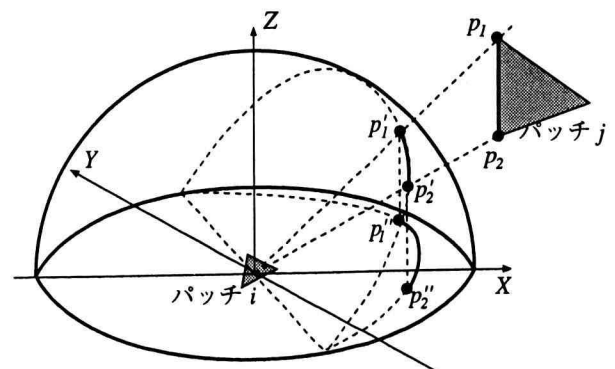


図4 空間直線の半球および半球底面への投影

$$l_s = -l / \sqrt{l^2 + m^2}, m_s = -m / \sqrt{l^2 + m^2}$$

(b)  $n = 0$  の場合—原点を通る直線

$$lx + my = 0 \quad (13)$$

(c)  $n = 1$  の場合—円 (半球底面)

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (14)$$

また、空間直線の半球底面投影された軌跡の範囲はそれぞれの場合について、頂点  $p_1, p_2$  の半球底面への投影点  $p''_1(x_p, y_p), p''_2(x_p, y_p)$  および  $(l, m, n)$  で決定される。

### ③三角形パッチの半球底面への投影領域のセル登録

以上の三角形パッチの各辺の投影に基づいて、三角形パッチの底面への投影領域を求める。半球底面はあらかじめセル分けをしておき、行方向 ( $x$  方向) のスキャンにより投影面の内側に当たるセルにパッチ番号と奥行き量を登録していく (図5)。

このとき、セルに対応した三角形パッチ上の点までの奥行き量  $Z$  は、セル中心の座標を  $(x, y)$ 、三角形パッチの外側法線を  $(l_p, m_p, n_p)$ 、原点から三角形パッチまでの距離を  $d_p$  とすると、

$$Z = \frac{-zd_p}{l_px + m_py + n_pz} \quad (15)$$

$$\text{ただし, } z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

で求まる。この値が、既にセルに登録されている奥行き量よりも大きい場合は、この部分が登録されている三角形パッチにより隠されていることを示すので登録を行わない。この処理により隠面消去が可能となる。

### ④フォームファクタの決定

全パッチに対して①～③の処理が終了したところで、パッチ番号の同じセルの個数により半球底面への投影面積を求め、半球底面に対する面積比率をフォームファクタとする。

## 4. 実験

今回提案のフォームファクタ算出アルゴリズムによるラジオシティ法をプログラム化し、画像生成実験を行った。またヘミ・キューブ法による画像生成も行い、本方法と比較した。条件として、半球底面のセル数は  $100 \times 100$  (セル) とした。

提案方法による計算結果の画像を図6に、ヘミキューブ法による結果画像を図7に示す。両画像とも緩やかな輝度変化を表現できていることがわかる。提案方法とヘミ・

キューブ法では輝度分布が必ずしも同じではないが、どちらが正しいかは今回の実験では評価できない。また、一部に輝度分布が不自然な部分も見られる。計算時間は、両手法とも約90秒であった。

## 5. まとめ

リアルな画像生成が可能なラジオシティ法におけるフォームファクタの算出方法として、半球底面への線分の投影の解析的な計算方法を提案した。本方法を用いることにより、フォームファクタ算出精度の対象空間全体にわたる均一性とアルゴリズムの単純さによる高速な処理が期待できる。本方法に基づいた画像生成実験の結果、多重反射に基づく緩やかな輝度分布を持った画像生成が確認された。しかし、画像に不完全な部分があり、また処理時間も予想される程には短くなっていない。これらの原因として、本方法の計算量としての最適化が十分にできていないことが挙げられる。今後、処理の最適化とより多くの実験による検証があげられる。

## 参考文献

- 1) I. Ashdown, "Radiosity: A Programmer's Perspective", John Wiley & Sons, 1995
- 2) M. F. Cohen and J. R. Wallace, "Radiosity and Realistic Image Synthesis", Ap Professional, 1993

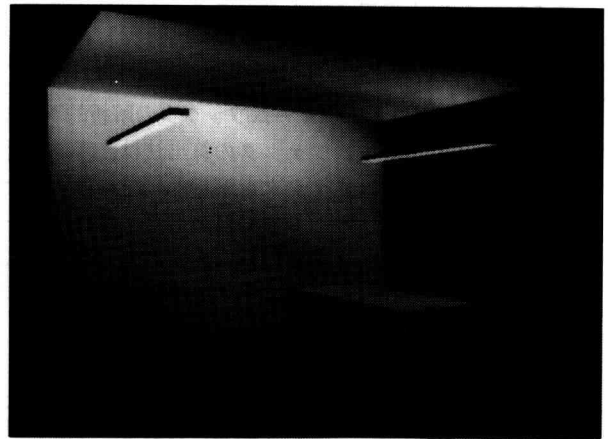


図6 提案方法による生成画像

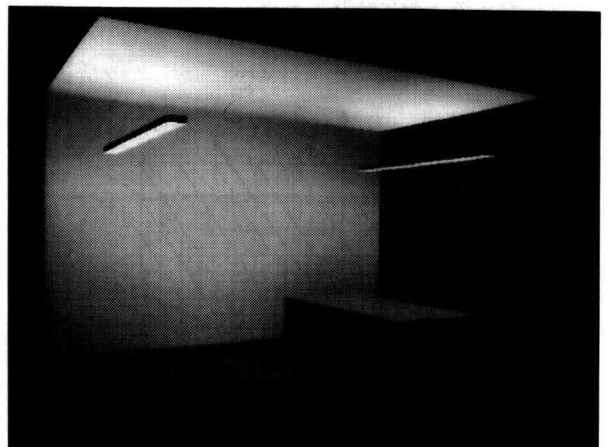


図7 ヘミキューブ法による生成画像

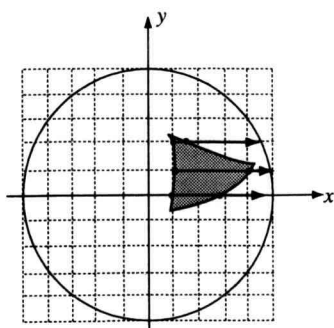


図5 底面セルの行スキャン