計算機による有限代数の生成と系の数について

巽　久行*，荒木 智行*，向殿 政男**，徳増 眞司*

* 神奈川工科大学 工学部 情報工学科　　** 明治大学 理工学部 情報科学科

On Generation of Finite Algebras using Computer and their Count Number

Hisayuki TATSUMI*, Tomoyuki ARAKI*, Masao MUKAIDONO** and Shinji TOKUMASU*

Abstract

It is well known that Boolean algebra is one of the most important algebra for engineering, and the ordinary set theory and the two-valued logic are different models or interpretations of Boolean algebra. Kleene algebra, which is refered to also as fuzzy algebra, is obtained from Boolean algebra by replacing the complementary law (the law of the excluded middle) in the axioms of Boolean algebra with Kleene's law, where Kleene's law is a weeker condition than the complementary law. Removal of Kleene's law from Kleene algebra (or fuzzy algebra) gives De Morgan algebra, which is refered to also as quasi-Boolean algebra. In this paper, we generate lattice structures of the above related algebraic systems having finite elements. From the result, we could find out the fact that the structure excepting for each element name between Kleene algebra and De Morgan algebra is the same from the lattice standpoint.

Keywords: Boolean algebra, Kleene algebra, De Morgan algebra, finite lattice structure

1．まえがき

通常，論理系にはそれに対応する代数系が存在している。2値論理に対応する代数系がよく知られているブール代数（Boolean algebra）であり，2値論理や通常の集合論を代数系として眺めた場合，これらはブール代数の1つの表現となっている。計算機工学の分野においては，古くから用いられている2値論理の他に，2値よりも多い3値以上の真理値を持つ多値論理が利用されている。特にL.A.Zadehにより，あいまいさを数量的に取り扱う手段としてFuzzy集合の概念が提案されてから，この集合の論理的な応用も行われ，多値論理の分野の中でFuzzy論理という名称の下に研究されている。Fuzzy論理は，その命題が取り得る真理値が0と1との間の連続濃度[0, 1]からなる無限多値論理であるとされているが，今のところ，このFuzzy論理には共通に認識された論理体系は存在していない。その理由は，Fuzzy論理における中心課題が曖昧さを含むような命題を取り扱うことができる論理体系として研究されたことにある。これまでに，論理の公理体系として整備されているFuzzy論理としては，直感主義的Fuzzy論理，ルカシェヴィッツのFuzzy論理，クリーネのFuzzy論理等が提案されている[1,2]。ここに挙げた公理体系として整備されているFuzzy論理にもそれに対応する代数系が存在しているが，本報告では，特にクリーネのFuzzy論理に対応する代数系を考察する。
この代数は，ブール代数において満足される相補律をそれよりも弱い公理であるクリーネ律と呼ばれる公理で置き換えて得られる代数であり，工学の分野ではFuzzy代数（fuzzy algebra）[3]，もしくはソフト代数（soft algebra）[4]と呼ばれ，数学の分野ではクリーネ代数（Kleene algebra）[5]と呼ばれて研究されている。更にクリーネ代数（もしくは，クリーネのFuzzy論理に対応するFuzzy代数）から，クリーネ律を取り除いた代数をド・モルガン代数（De Morgan algebra）[6]もしくは準ブール代数（quasi-Boolean algebra）[7]と呼ばれて研究されている。

本報告は，著者らが以前から行っている有限Fuzzy代数の数え上げ[8,9]を拡張して，現在までに公理が定義されているブール代数，クリーネ代数，ド・モルガン代数等の比較的関連した代数系の，元の数が有限である束をすべて列挙することを目的とする。任意に与えられた有限半順序集合に対して，どのような集合が目的の代数になるかを求めることは，その代数の構造を明らかにする上で重要である。上に挙げたブール代数，クリーネ代数，ド・モルガン代数等は，最小元0および最大元1を持つ有限分配束の部分集合である特殊な束をなしており，その数え上げ問題とは各代数で成立するすべての公理を満たすような有限個の元からなる束は，同型なものを除いて何種類あるかを求める問題である。

著者らの興味の中心は，上に挙げた有限代数がどのような構造をしているかを知ることにある。元の数がnである有限ブール代数については，既にその束構造が集合束2^nに同型であることが知られているが，クリーネ代数またはFuzzy代数はブール代数で満たす公理との違いがクリーネ律のみであるにもかかわらず，その束構造は著者らの知る限りこれまであまり深く研究されていない。

ド・モルガン代数の束構造もまた，著者らの知る限り同様である。そこで，構成的な束構造を求める手がかりとして，計算機を用いてすべて導出してみることを試みた。元の数がnである有限代数の数については，$n=13$までのすべての有限クリーネ代数（有限fuzzy代数）の数え上げ結果が，著者らにより求められている。今回，有限クリーネ代数，有限ド・モルガン代数，0および1を持つ有限分配束，0および1を持つ有限モジュラー束，0および1を持つ有限束を求めてみたが，特に元の名前を除外した束順序集合からみると，$n=13$までは有限クリーネ代数と有限ド・モルガン代数は同型であるという興味深い結果が得られた。有限クリーネ代数と有限ド・モルガン代数の決定的な違いは，中心（もしくは不動核とも呼ばれる）が存在すれば唯1つか否かであったが，中心は元の名前に関してのみ意味を持ち，単純に束の順序集合を比較すればどちらも等しい，もしくは束順序として同型であるという予想が成り立つ。これについては証明が未解決であるが，この事実が成り立つならば，クリーネ代数とド・モルガン代数における束の表現定理はかなり密接な関係にある。

2．諸定義

最初に，本報告で扱う代数系について概説する。
空でない集合Lにおいて，Lの任意の元a, b, cに対して，次の3つの公理が成立する2項演算$\vee$と$\wedge$の定義された代数系$\langle L,\vee,\wedge\rangle$を，束（lattice）という。

(1) 交換律　(a)　$a\vee b=b\vee a$
　　　　　　(b)　$a\wedge b=b\wedge a$
(2) 結合律　(a)　$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$
　　　　　　(b)　$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$
(3) 吸収律　(a)　$a\vee(a\wedge b)=a$
　　　　　　(b)　$a\wedge(a\vee b)=a$

なお，上記の3つの公理より，

(ア) ベキ等律 (a)　$a\vee a=a$
　　　　　　　(b)　$a\wedge a=a$

が導かれる。束のうち，特に

(イ) モジュラー律
　　$a\geq c\ \rightarrow\ a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee c$

を満たすものをモジュラー束（modular lattice）といい，モジュラー律をそれよりも強い

(4) 分配律　(a)　$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
　　　　　　(b)　$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

で置き換えた代数系を，分配束（distributive lattice）という。分配束において，さらに単項演算Nが定義され，

(5) ド・モルガン律　(a)　$N(a\vee b)=Na\wedge Nb$
　　　　　　　　　　(b)　$N(a\wedge b)=Na\vee Nb$
(6) 復帰律　$N(Na)=a$

を満たす代数系$\langle L,\vee,\wedge,N\rangle$をド・モルガン束（De Morgan lattice）という。ド・モルガン束のうち，更に，

(7) 最小元の存在　(a)　$0\vee a=a$
　　　　　　　　　(b)　$0\wedge a=0$
(8) 最大元の存在　(a)　$1\vee a=1$
　　　　　　　　　(b)　$1\wedge a=a$

を満たす最小元(0)および最大元(1)を持つ代数系$\langle L,\vee,\wedge,N,0,1\rangle$はド・モルガン代数（De Morgan algebra）と呼ばれ[6]，また，これと同じ代数は準ブール代数（quasi-Boolean algebra）と呼ばれて研究されている[7]。
ド・モルガン代数のうち，更に，

(9) クリーネ律　(a)　$(a\wedge Na)\vee(b\vee Nb)=b\vee Nb$
　　　　　　　　(b)　$(a\wedge Na)\wedge(b\vee Nb)=a\wedge Na$

を満たすものはクリーネ代数（Kleene algebra）と呼ばれ[5,8]，工学ではFuzzy代数（fuzzy algebra）と呼ばれて研究されている[3]。クリーネ律を，更に弱い公理である

(ウ) 相補律　(a)　$a\vee Na=1$
　　　　　　(b)　$a\wedge Na=0$

で置き換えた代数系がブール代数（Boolean algebra）である。即ち，本報告で考察するクリーネ代数は，ブール代数における相補律を，それよりも弱い公理であるクリーネ律で置き換えて得られる代数系であり，ブール代数を満足する束は当然ながらクリーネ代数を満足する束の一部分として含まれる。
なお，各等式において括弧を節約するために，演算の間に，$N>\wedge>\vee$の順で演算の強さの順序を設けている。

［注1］代数系$\langle L,\vee,\wedge,N,0,1\rangle$がクリーネ代数であるとは，次の2つの条件

(i)　$\langle L,\vee,\wedge,0,1\rangle$は最小元0，最大元1をもつ分配束である
(ii)　写像$N:L\rightarrow L$は次の条件を満たす；
　　任意の$x,y\in L$に対して，
　　(C0)　$N0=1$，$N1=0$
　　(C1)　$x\leq y$ ならば $Ny\leq Nx$
　　(C2)　$x=N(Nx)$
　　(C3)　$x\wedge Nx\leq y\vee Ny$

を満たすものとも定義されるが，本報告では公理系の集合の観点から有限クリーネ代数の数え上げを行ったので，クリーネ代数の定義として等式(1)～(9)を採用した。なお注1の条件(2)の中で，クリーネ律の公理(C3)を取り除いたものはド・モルガン代数の定義となる。
（注終）□

クリーネ代数の定義となっている上に挙げた等式(1)～(9)のうち，ある等式は他の幾つかの等式から導くことができる。よって，少なくともどのような等式を公理として採用したら，他のすべての等式を導くことができるかという問題が生ずる。このようにある代数系で成立するすべての等式を導くことができるような公理の集合を，その代数系に関する完全な公理系と呼ぶ。また公理系のうち，各公理は他の公理から決して導くことができないとき，即ち，公理として互いに独立であるとき，その公理系は独立であると呼ぶ。任意に与えられた有限集合がある代数系を満たすかどうかを調べるとき，代数系で成立するすべての等式を調べる代わりに，その代数系における完全で独立な公理系を調べるだけで十分である。等式(1)～(9)の中で，以下の定義1で述べる6つの等式の集合は，文献[3]で示されたクリーネ代数における完全で独立な公理系の1つである（この他にも完全で独立な公理系が存在する可能性はあるが，上記以外の完全で独立な公理系は著者らの知る限り報告されていない）。即ち，クリーネ代数で成立する等式(1)～(9)は，

定義1の6つの公理から導くことが可能であり，更に，この6つの各公理は互いに他からは決して導くことができない。よって，任意に与えられた有限集合がクリーネ代数であるかどうかを調べるには，この完全で独立な公理系だけを調べれば十分である。

［定義1］ 次の公理の集合は，クリーネ代数における完全で独立な公理系の1つである。

(K1) 交換律 (a) $a \vee b = b \vee a$
(K2) 分配律 (a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
(K3) ド・モルガン律 (a) $N(a \vee b) = Na \wedge Nb$
(K4) 復帰律 $N(Na) = a$
(K5) 最小元の存在 (a) $0 \vee a = a$
(K6) クリーネ律 (a) $(a \wedge Na) \vee (b \vee Nb) = b \vee Nb$
（定義終）□

完全で独立な公理系については，これまで各代数系に対して研究されており，例えばド・モルガン代数については向殿により[3]，ブール代数については E.V.Huntingtonにより[10]，それぞれ与えられている。定義2に，文献[3]で示されたド・モルガン代数における完全で独立な公理系の1つを示す（この他にもド・モルガン代数における完全で独立な公理系が存在する可能性はあるが，上記以外の完全で独立な公理系は著者らの知る限り報告されていない）。

［定義2］ 次の公理の集合は，ド・モルガン代数における完全で独立な公理系の1つである。

(D1) 交換律 (a) $a \vee b = b \vee a$
(D2) 分配律 (a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
(D3) ド・モルガン律 (a) $N(a \vee b) = Na \wedge Nb$
(D4) 復帰律 $N(Na) = a$
(D5) 最小元の存在 (a) $0 \vee a = a$
(D6) 最小元の存在 (b) $0 \wedge a = 0$ （定義終）□

本報告では，有限個の元からなるクリーネ代数およびド・モルガン代数の数を求める際に，定義1および定義2で示した完全で独立な公理系を用いて，より高速に計算を行っている。図1に，本報告で述べた各有限代数の関係概略図を示す。

3．有限代数の生成方法

有限代数の数え上げを行う前に，有限束の数え上げ方法について述べる。有限束の数え上げについてはこれまでに幾つか報告されているが，著者らの知る限り，田村，田中らにより元の数が$n \leq 11$まで求められたのが，計算機による初めての構成的な生成手法である[11]。本報告でも，有限代数を数え上げる際に，有限束の導出を最初に行わなければならないが，これについては，田村，田中らが行った方法を用いている。以下，その方法を述べる。

n個の元よりなる集合Pを，$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$とする。有限束には最大元および最小元が必ず存在するので，あらかじめp_1を最大元（即ち1）に，p_nを最小元（即ち0）に決めておく。

集合Pにおける包含関係を記述するために，任意の2つの元p_iおよびp_j（但し，$1 \leq i, j \leq n$）の間に，以下のような$n \times n$行列$R = (r_{ij})$を定義する。

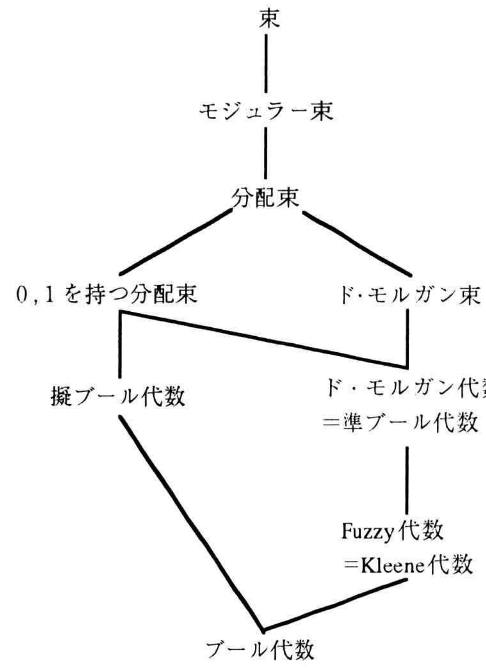

図1 各束の関係

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & (\ p_i \geq p_j \text{ で，} \ p_i \neq p_j \text{ のとき}) \\ -1 & (\ p_i \leq p_j \text{ で，} \ p_i \neq p_j \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上記以外のとき}) \end{cases}$$

この行列を，集合Pにおける関係行列と呼ぶ。この行列$R = (r_{ij})$において，集合Pの元$p_1, p_2, \cdots, p_n$の適当な置換により，行列Rの対角成分より右上の三角部分（即ち，要素r_{ij}のなかで$i \leq j$の部分）には-1が現われないようにすることができる。逆に，左下の三角部分（即ち，要素r_{ij}のなかで$i \geq j$の部分）には1が現われないようにすることができる。更に，p_1はあらかじめ最大元と決めているので，$2 \leq j \leq n$に対して常に$r_{1j} = 1$（当然，$2 \leq i \leq n$に対して$r_{i1} = -1$）である。同様に，p_nは最小元と決めているので，$1 \leq i \leq n-1$に対して常に$r_{in} = 1$（当然，$1 \leq j \leq n-1$に対して$r_{nj} = -1$）である。よって，関係行列Rは，次の様になる。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & \vdots \\ \vdots & \beta & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで，α部分の要素は0か1，β部分の要素は0か-1である。ところで交換律(a)が成立する場合，$r_{ij} = 1$ならば$r_{ji} = -1$，$r_{ij} = 0$ならば$r_{ji} = 0$となる（即ち，α部分のr_{ij}が0，1ならば，β部分のr_{ji}はそれぞれ0，-1となる）ので，β部分はなくても関係行列は一意に定まる。よって，α部分の要素を

$$r_{23},\ r_{24}r_{34},\ \cdots,\ r_{2k}r_{3k}\cdots r_{(k-1)k},\ \cdots,\ r_{2(n-1)}r_{3(n-1)}\cdots r_{(n-2)(n-1)}$$

と並べて，関係行列Rを2進数表示で一意に表すことができる。与えられた集合が束であるためには，集合Pが半順序集合でなければならない。集合Pが半順序集合で

あることを調べるには，この２進数表示が

反射律 $(p_i \le p_i)$

反対称律 ($p_i \le p_j$ かつ $p_j \le p_i$ ならば $p_i = p_j$)

推移律 ($p_i \le p_j$ かつ $p_j \le p_k$ ならば $p_i \le p_k$)

を満たすかどうかを判定すればよいが，この２進数表示は反射律および反対称律は成立するように作られているので，推移律のみを調べればよい。これは，$i<j<k$ のとき，

$r_{ij}=1$ かつ $r_{jk}=1$ ならば $r_{ik}=1$

($r_{ij}=1$ かつ $r_{ik}\ne 1$ ならば $r_{jk}\ne 1$)

として判定される。更に，集合 P が束であることを判定するためには，各元 p_i，p_j（但し，$i \ne j$）について，$p_i \vee p_j$ と $p_i \wedge p_j$ が集合 P の元として一意的に存在するかを調べればよい。ここで $p_i \vee p_j$ がいえれば $p_i \wedge p_j$ の存在はいえる。なぜなら，

$$P_L = \{\, l \mid l \le p_i \text{ かつ } l \le p_j \}$$

とすると，最小元は P_L に属するので空ではなく，

$$\bigvee_{l \in P_L} l = p_i \wedge p_j$$

となる。$p_i \vee p_j$ が一意的に存在する判定は次のように行える。$i<j$ かつ $r_{ij}=0$ なる任意の i，j に対して，$\{p_i, p_j\}$ の上界が $p_{u_1}, p_{u_2}, \cdots, p_{u_k}$ であるとき，$u_1, u_2, \cdots, u_k$ の中で最大のものを m とすると，$1 \le t \le k$ なる t に対して，$p_{u_t} \ge p_m$ を調べればよい。

以上が有限代数の判定に際しての前処理段階となる有限束の判定方法であり，これにより２進数表示の中で，最大元および最小元を持つ有限束であるものは（同型であるものも重複されるが）すべて導出することができる。文献[11]では，$p_2, \cdots, p_{n-1}$ の置換によって得られる最小の２進数表示を表現と呼んで，同型である束が重複しないように工夫されている。この田村，田中らの方法をもとに，第２節で述べた公理を付け加えながら，有限モジュラー束，有限分配束，有限ド・モルガン代数，有限ブール代数を生成した。以下に，元の数が $n \le 10$ までの有限モジュラー束の生成結果を示す。

Number of elements = 3
No. 1 D, M, K
count = 1

Number of elements = 4
No. 1 0 D, M, K, B
No. 2 1 D, M, K
count = 2

Number of elements = 5
No. 1 0, 00
No. 2 0, 11 D
No. 3 1, 10 D
No. 4 1, 11 D, M, K
count = 4

Number of elements = 6
No. 1 0, 00, 000
No. 2 0, 00, 111
No. 3 0, 01, 110 D, M, K
No. 4 0, 11, 111 D,
No. 5 1, 10, 100
No. 6 1, 10, 111 D, M, K
No. 7 1, 11, 110 D
No. 8 1, 11, 111 D, M, K
count = 8

Number of elements = 7
No. 1 0, 00, 000, 0000
No. 2 0, 00, 000, 1111
No. 3 0, 00, 001, 1110
No. 4 0, 00, 111, 1111
No. 5 0, 01, 010, 1100
No. 6 0, 01, 110, 1111 D
No. 7 0, 11, 111, 1110 D, M, K
No. 8 0, 11, 111, 1111 D
No. 9 1, 10, 100, 1000
No. 10 1, 10, 100, 1111
No. 11 1, 10, 101, 1110 D
No. 12 1, 10, 111, 1111 D
No. 13 1, 11, 110, 1100
No. 14 1, 11, 110, 1111 D
No. 15 1, 11, 111, 1110 D
No. 16 1, 11, 111, 1111 D, M, K
count = 16

Number of elements = 8
No. 1 0, 00, 000, 0000, 00000
No. 2 0, 00, 000, 0000, 11111
No. 3 0, 00, 000, 0001, 11110
No. 4 0, 00, 000, 1111, 11111
No. 5 0, 00, 001, 0010, 11100
No. 6 0, 00, 001, 1110, 11111
No. 7 0, 00, 011, 1010, 11000 D, M, K, B
No. 8 0, 00, 111, 1111, 11110
No. 9 0, 00, 111, 1111, 11111
No. 10 0, 01, 010, 0100, 11000
No. 11 0, 01, 010, 1100, 11111
No. 12 0, 01, 011, 1100, 11101 D, M, K
No. 13 0, 01, 110, 1101, 11110 D
No. 14 0, 01, 110, 1111, 11111 D
No. 15 0, 11, 111, 1110, 11100
No. 16 0, 11, 111, 1110, 11111 D
No. 17 0, 11, 111, 1111, 11110 D, M, K
No. 18 0, 11, 111, 1111, 11111 D
No. 19 1, 10, 100, 1000, 10000
No. 20 1, 10, 100, 1000, 11111
No. 21 1, 10, 100, 1001, 11110
No. 22 1, 10, 100, 1111, 11111
No. 23 1, 10, 101, 1010, 11100
No. 24 1, 10, 101, 1110, 11111 D, M, K
No. 25 1, 10, 111, 1111, 11110 D
No. 26 1, 10, 111, 1111, 11111 D
No. 27 1, 11, 110, 1100, 11000
No. 28 1, 11, 110, 1100, 11111
No. 29 1, 11, 110, 1101, 11110 D
No. 30 1, 11, 110, 1111, 11111 D, M, K
No. 31 1, 11, 111, 1110, 11100
No. 32 1, 11, 111, 1110, 11111 D
No. 33 1, 11, 111, 1111, 11110 D
No. 34 1, 11, 111, 1111, 11111 D, M, K
count = 34

Number of elements = 9
No. 1 0, 00, 000, 0000, 00000, 000000
No. 2 0, 00, 000, 0000, 00000, 111111
No. 3 0, 00, 000, 0000, 00001, 111110

No. 4 0, 00, 000, 0000, 11111, 111111
No. 5 0, 00, 000, 0001, 00010, 111100
No. 6 0, 00, 000, 0001, 11110, 111111
No. 7 0, 00, 000, 1111, 11111, 111110
No. 8 0, 00, 000, 1111, 11111, 111111
No. 9 0, 00, 001, 0010, 00100, 111000
No. 10 0, 00, 001, 0010, 11100, 111111
No. 11 0, 00, 001, 0011, 11100, 111101
No. 12 0, 00, 001, 1110, 11101, 111110
No. 13 0, 00, 001, 1110, 11111, 111111
No. 14 0, 00, 011, 1010, 11000, 111111 D
No. 15 0, 00, 111, 1111, 11110, 111100
No. 16 0, 00, 111, 1111, 11110, 111111
No. 17 0, 00, 111, 1111, 11111, 111110
No. 18 0, 00, 111, 1111, 11111, 111111
No. 19 0, 01, 010, 0100, 01000, 110000
No. 20 0, 01, 010, 0100, 11000, 111111
No. 21 0, 01, 010, 0101, 11000, 111101
No. 22 0, 01, 010, 1100, 11001, 111110
No. 23 0, 01, 010, 1100, 11111, 111111
No. 24 0, 01, 011, 0110, 11000, 111001
No. 25 0, 01, 011, 1100, 11101, 111111 D
No. 26 0, 01, 100, 1100, 11011, 111010 D, M, K
No. 27 0, 01, 110, 1101, 11010, 111100
No. 28 0, 01, 110, 1101, 11110, 111111 D
No. 29 0, 01, 110, 1111, 11111, 111110 D
No. 30 0, 01, 110, 1111, 11111, 111111 D
No. 31 0, 11, 111, 1110, 11100, 111000
No. 32 0, 11, 111, 1110, 11100, 111111
No. 33 0, 11, 111, 1110, 11101, 111110 D
No. 34 0, 11, 111, 1110, 11111, 111111 D
No. 35 0, 11, 111, 1111, 11110, 111100
No. 36 0, 11, 111, 1111, 11110, 111111 D
No. 37 0, 11, 111, 1111, 11111, 111110 D, M, K
No. 38 0, 11, 111, 1111, 11111, 111111 D
No. 39 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000
No. 40 1, 10, 100, 1000, 10000, 111111
No. 41 1, 10, 100, 1000, 10001, 111110
No. 42 1, 10, 100, 1000, 11111, 111111
No. 43 1, 10, 100, 1001, 10010, 111100
No. 44 1, 10, 100, 1001, 11110, 111111
No. 45 1, 10, 100, 1011, 11010, 111000 D
No. 46 1, 10, 100, 1111, 11111, 111110
No. 47 1, 10, 100, 1111, 11111, 111111
No. 48 1, 10, 101, 1010, 10100, 111000
No. 49 1, 10, 101, 1010, 11100, 111111
No. 50 1, 10, 101, 1011, 11100, 111101 D
No. 51 1, 10, 101, 1110, 11101, 111110 D
No. 52 1, 10, 101, 1110, 11111, 111111 D
No. 53 1, 10, 111, 1111, 11110, 111100
No. 54 1, 10, 111, 1111, 11110, 111111 D, M, K
No. 55 1, 10, 111, 1111, 11111, 111110 D
No. 56 1, 10, 111, 1111, 11111, 111111 D
No. 57 1, 11, 110, 1100, 11000, 110000
No. 58 1, 11, 110, 1100, 11000, 111111
No. 59 1, 11, 110, 1100, 11001, 111110
No. 60 1, 11, 110, 1100, 11111, 111111
No. 61 1, 11, 110, 1101, 11010, 111100
No. 62 1, 11, 110, 1101, 11110, 111111 D
No. 63 1, 11, 110, 1111, 11111, 111110 D
No. 64 1, 11, 110, 1111, 11111, 111111 D
No. 65 1, 11, 111, 1110, 11100, 111000
No. 66 1, 11, 111, 1110, 11100, 111111
No. 67 1, 11, 111, 1110, 11101, 111110 D
No. 68 1, 11, 111, 1110, 11111, 111111 D
No. 69 1, 11, 111, 1111, 11110, 111100
No. 70 1, 11, 111, 1111, 11110, 111111 D
No. 71 1, 11, 111, 1111, 11111, 111110 D
No. 72 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 D, M, K
count = 72

Number of elements = 10
No. 1 0, 00, 000, 0000, 00000, 000000, 0000000
No. 2 0, 00, 000, 0000, 00000, 000000, 1111111
No. 3 0, 00, 000, 0000, 00000, 000001, 1111110
No. 4 0, 00, 000, 0000, 00000, 111111, 1111111
No. 5 0, 00, 000, 0000, 00001, 000010, 1111100
No. 6 0, 00, 000, 0000, 00001, 111110, 1111111
No. 7 0, 00, 000, 0000, 11111, 111111, 1111110
No. 8 0, 00, 000, 0000, 11111, 111111, 1111111
No. 9 0, 00, 000, 0001, 00010, 000100, 1111000
No. 10 0, 00, 000, 0001, 00010, 111100, 1111111
No. 11 0, 00, 000, 0001, 00011, 111100, 1111101
No. 12 0, 00, 000, 0001, 11110, 111101, 1111110
No. 13 0, 00, 000, 0001, 11110, 111111, 1111111
No. 14 0, 00, 000, 0011, 01010, 100100, 1110000
No. 15 0, 00, 000, 1111, 11111, 111110, 1111100
No. 16 0, 00, 000, 1111, 11111, 111110, 1111111
No. 17 0, 00, 000, 1111, 11111, 111111, 1111110
No. 18 0, 00, 000, 1111, 11111, 111111, 1111111
No. 19 0, 00, 001, 0010, 00100, 001000, 1110000
No. 20 0, 00, 001, 0010, 00100, 111000, 1111111
No. 21 0, 00, 001, 0010, 00101, 111000, 1111101
No. 22 0, 00, 001, 0010, 11100, 111001, 1111110
No. 23 0, 00, 001, 0010, 11100, 111111, 1111111
No. 24 0, 00, 001, 0011, 00110, 111000, 1111001
No. 25 0, 00, 001, 0011, 11100, 111101, 1111111
No. 26 0, 00, 001, 0100, 11100, 111011, 1111010
No. 27 0, 00, 001, 1110, 11101, 111010, 1111100
No. 28 0, 00, 001, 1110, 11101, 111110, 1111111
No. 29 0, 00, 001, 1110, 11111, 111111, 1111110
No. 30 0, 00, 001, 1110, 11111, 111111, 1111111
No. 31 0, 00, 011, 0111, 10100, 110000, 1111011 D
No. 32 0, 00, 011, 1010, 11000, 111111, 1111111 D
No. 33 0, 00, 111, 1111, 11110, 111100, 1111000
No. 34 0, 00, 111, 1111, 11110, 111100, 1111111
No. 35 0, 00, 111, 1111, 11110, 111101, 1111110
No. 36 0, 00, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111
No. 37 0, 00, 111, 1111, 11111, 111110, 1111100
No. 38 0, 00, 111, 1111, 11111, 111110, 1111111
No. 39 0, 00, 111, 1111, 11111, 111111, 1111110
No. 40 0, 00, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111
No. 41 0, 01, 010, 0100, 01000, 010000, 1100000
No. 42 0, 01, 010, 0100, 01000, 110000, 1111111
No. 43 0, 01, 010, 0100, 01001, 110000, 1111101
No. 44 0, 01, 010, 0100, 11000, 110001, 1111110
No. 45 0, 01, 010, 0100, 11000, 111111, 1111111
No. 46 0, 01, 010, 0101, 01010, 110000, 1111001
No. 47 0, 01, 010, 0101, 11000, 111101, 1111111
No. 48 0, 01, 010, 0111, 11000, 110101, 1110010 D
No. 49 0, 01, 010, 1000, 11000, 110011, 1111010
No. 50 0, 01, 010, 1100, 11001, 110010, 1111100
No. 51 0, 01, 010, 1100, 11001, 111110, 1111111
No. 52 0, 01, 010, 1100, 11111, 111111, 1111110
No. 53 0, 01, 010, 1100, 11111, 111111, 1111111
No. 54 0, 01, 011, 0110, 01100, 110000, 1110001
No. 55 0, 01, 011, 0110, 11000, 111001, 1111111
No. 56 0, 01, 011, 0111, 11000, 111001, 1111011 D, M, K
No. 57 0, 01, 011, 1100, 11101, 111011, 1111110 D
No. 58 0, 01, 011, 1100, 11101, 111111, 1111111 D
No. 59 0, 01, 100, 1100, 11001, 110110, 1110100
No. 60 0, 01, 100, 1100, 11011, 111010, 1111111 D

No. 61 0, 01, 110, 1101, 11010, 110100, 1111000
No. 62 0, 01, 110, 1101, 11010, 111100, 1111111
No. 63 0, 01, 110, 1101, 11011, 111100, 1111101 D
No. 64 0, 01, 110, 1101, 11110, 111101, 1111110 D, $\underline{\mathrm{M}}$, $\underline{\mathrm{K}}$
No. 65 0, 01, 110, 1101, 11110, 111111, 1111111 D
No. 66 0, 01, 110, 1111, 11111, 111110, 1111100
No. 67 0, 01, 110, 1111, 11111, 111110, 1111111 D
No. 68 0, 01, 110, 1111, 11111, 111111, 1111110 D
No. 69 0, 01, 110, 1111, 11111, 111111, 1111111 D
No. 70 0, 11, 111, 1110, 11100, 111000, 1110000
No. 71 0, 11, 111, 1110, 11100, 111000, 1111111
No. 72 0, 11, 111, 1110, 11100, 111001, 1111110
No. 73 0, 11, 111, 1110, 11100, 111111, 1111111
No. 74 0, 11, 111, 1110, 11101, 111010, 1111100
No. 75 0, 11, 111, 1110, 11101, 111110, 1111111 D
No. 76 0, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111110 D, M, K
No. 77 0, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111111 D
No. 78 0, 11, 111, 1111, 11110, 111100, 1111000
No. 79 0, 11, 111, 1111, 11110, 111100, 1111111
No. 80 0, 11, 111, 1111, 11110, 111101, 1111110 D
No. 81 0, 11, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111 D
No. 82 0, 11, 111, 1111, 11111, 111110, 1111100
No. 83 0, 11, 111, 1111, 11111, 111110, 1111111 D
No. 84 0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111110 D, M, K
No. 85 0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111 D
No. 86 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000
No. 87 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1111111
No. 88 1, 10, 100, 1000, 10000, 100001, 1111110
No. 89 1, 10, 100, 1000, 10000, 111111, 1111111
No. 90 1, 10, 100, 1000, 10001, 100010, 1111100
No. 91 1, 10, 100, 1000, 10001, 111110, 1111111
No. 92 1, 10, 100, 1000, 11111, 111111, 1111110
No. 93 1, 10, 100, 1000, 11111, 111111, 1111111
No. 94 1, 10, 100, 1001, 10010, 100100, 1111000
No. 95 1, 10, 100, 1001, 10010, 111100, 1111111
No. 96 1, 10, 100, 1001, 10011, 111100, 1111101
No. 97 1, 10, 100, 1001, 11110, 111101, 1111110
No. 98 1, 10, 100, 1001, 11110, 111111, 1111111
No. 99 1, 10, 100, 1011, 11010, 111000, 1111111 D, M, $\underline{\mathrm{K}}$
No. 100 1, 10, 100, 1111, 11111, 111110, 1111100
No. 101 1, 10, 100, 1111, 11111, 111110, 1111111
No. 102 1, 10, 100, 1111, 11111, 111111, 1111110
No. 103 1, 10, 100, 1111, 11111, 111111, 1111111
No. 104 1, 10, 101, 1010, 10100, 101000, 1110000
No. 105 1, 10, 101, 1010, 10100, 111000, 1111111
No. 106 1, 10, 101, 1010, 10101, 111000, 1111101
No. 107 1, 10, 101, 1010, 11100, 111001, 1111110
No. 108 1, 10, 101, 1010, 11100, 111111, 1111111
No. 109 1, 10, 101, 1011, 10110, 111000, 1111001
No. 110 1, 10, 101, 1011, 11100, 111101, 1111111 D, $\underline{\mathrm{M}}$, $\underline{\mathrm{K}}$
No. 111 1, 10, 101, 1100, 11100, 111011, 1111010 D
No. 112 1, 10, 101, 1110, 11101, 111010, 1111100
No. 113 1, 10, 101, 1110, 11101, 111110, 1111111 D
No. 114 1, 10, 101, 1110, 11111, 111111, 1111110 D
No. 115 1, 10, 101, 1110, 11111, 111111, 1111111 D
No. 116 1, 10, 111, 1111, 11110, 111100, 1111000
No. 117 1, 10, 111, 1111, 11110, 111100, 1111111
No. 118 1, 10, 111, 1111, 11110, 111101, 1111110 D
No. 119 1, 10, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111 D
No. 120 1, 10, 111, 1111, 11111, 111110, 1111100
No. 121 1, 10, 111, 1111, 11111, 111110, 1111111 D, M, K
No. 122 1, 10, 111, 1111, 11111, 111111, 1111110 D
No. 123 1, 10, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111 D
No. 124 1, 11, 110, 1100, 11000, 110000, 1100000
No. 125 1, 11, 110, 1100, 11000, 110000, 1111111
No. 126 1, 11, 110, 1100, 11000, 110001, 1111110
No. 127 1, 11, 110, 1100, 11000, 111111, 1111111
No. 128 1, 11, 110, 1100, 11001, 110010, 1111100
No. 129 1, 11, 110, 1100, 11001, 111110, 1111111
No. 130 1, 11, 110, 1100, 11011, 111010, 1111000 D
No. 131 1, 11, 110, 1100, 11111, 111111, 1111110
No. 132 1, 11, 110, 1100, 11111, 111111, 1111111
No. 133 1, 11, 110, 1101, 11010, 110100, 1111000
No. 134 1, 11, 110, 1101, 11010, 111100, 1111111
No. 135 1, 11, 110, 1101, 11011, 111100, 1111101 D
No. 136 1, 11, 110, 1101, 11110, 111101, 1111110 D
No. 137 1, 11, 110, 1101, 11110, 111111, 1111111 D, $\underline{\mathrm{M}}$, $\underline{\mathrm{K}}$
No. 138 1, 11, 110, 1111, 11111, 111110, 1111100
No. 139 1, 11, 110, 1111, 11111, 111110, 1111111 D
No. 140 1, 11, 110, 1111, 11111, 111111, 1111110 D
No. 141 1, 11, 110, 1111, 11111, 111111, 1111111 D
No. 142 1, 11, 111, 1110, 11100, 111000, 1110000
No. 143 1, 11, 111, 1110, 11100, 111000, 1111111
No. 144 1, 11, 111, 1110, 11100, 111001, 1111110
No. 145 1, 11, 111, 1110, 11100, 111111, 1111111
No. 146 1, 11, 111, 1110, 11101, 111010, 1111100
No. 147 1, 11, 111, 1110, 11101, 111110, 1111111 D
No. 148 1, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111110 D
No. 149 1, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111111 D, M, K
No. 150 1, 11, 111, 1111, 11110, 111100, 1111000
No. 151 1, 11, 111, 1111, 11110, 111100, 1111111
No. 152 1, 11, 111, 1111, 11110, 111101, 1111110 D
No. 153 1, 11, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111 D
No. 154 1, 11, 111, 1111, 11111, 111110, 1111100
No. 155 1, 11, 111, 1111, 11111, 111110, 1111111 D
No. 156 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111110 D
No. 157 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111 D, M, K
count = 157

上に示した有限モジュラー束のうち，Dは有限分配束を，Mは有限ド・モルガン代数を，Kは有限クリーネ代数を，Bは有限ブール代数をそれぞれ示している。また下線の意味は，該当する有限代数がその2進数表示に束順序集合として同型であることを示している。この結果より以下の予想が導かれる。

（1）元の名前付けを除外した束順序集合では，有限ド・モルガン代数と有限クリーネ代数は同型である。

（2）元の数 $n=8$ のNo.7や $n=10$ のNo.99のように，束順序集合として同型であるが，ある集合を内包する場合には元に名前付けをすることにより有限クリーネ代数ではないが有限ド・モルガン代数になるものが存在する。

4．クリーネ代数とド・モルガン代数

前節の結果より，有限クリーネ代数と有限ド・モルガン代数とは密接な関係にあることが分かったので，本節ではこの点について検討する。

一般に有限代数では単項演算 N が定義されているので，有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数に対する次のような演算 N に関する簡単な性質を述べる。これらは有限クリーネ代数や有限ド・モルガン代数においてはほぼ自明ではあるが，後で述べる判定手順の簡単化のために必要となる。

次の性質1および性質2は，有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数で成り立つ。

［性質1］ $a \neq b$ ならば $Na \neq Nb$。

（証明）$Na=Nb$ とすると，$N(Na)=N(Nb)$。
よって $a=b$（∵復帰律）。これは矛盾する。
従って性質1は成立。（証明終）□

これより，各元の否定はすべて異なっている。

［性質2］　$Na=b$ ならば $Nb=a$。

（証明）$Na=b$ とすると，復帰律：$N(Na)=a$ より，
$Nb=a$。従って，性質2は成立。（証明終）□

次の性質3は，有限クリーネ代数のみで成り立つ。

［性質3］　$Na=a$ なる元は，存在すれば唯一である。

（証明）$Na=a$，$Nb=b$ とすると，

$$\begin{aligned} a\vee b &= (a\wedge a)\vee(b\vee b)\\ &= (a\wedge Na)\vee(b\vee Nb)=b\vee Nb\\ &= b \quad (\because \text{クリーネ律(a)})。\\ a\vee b &= (a\vee a)\vee(b\wedge b)\\ &= (a\vee Na)\vee(b\wedge Nb)=a\vee Na\\ &= a \quad (\because \text{交換律(a)，クリーネ律(a)})。\end{aligned}$$

従って，$a=b$ より性質3は成立。（証明終）□

このように有限クリーネ代数においては，$Na=a$ なる元が存在するとき，これを中心（center）または不動核と呼び[3,14,15]，もし存在すれば唯一に定まる。

以上の性質1から性質3より，$Na=a$ なる元（即ち，中心）を除くと有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数では，ある元とその否定の元は互いに対称な関係を保つ。これより，否定演算 N に関して，

$\forall p_i\in P$（但し，$1\leq i\leq n$）に対して $Np_i=p_{n-i+1}$

が成り立つ。

有限クリーネ代数の判定を行う場合，第2節の定義1に示された等式(K1)～(K6)の6つの完全で独立な公理系をすべて調べなければならないが，以下のように組み合わせることで判定手順の簡単化が可能となる。

［クリーネ代数の判定手順の簡単化］

（1）ド・モルガン律(a)，および，復帰律の簡単化

ド・モルガン律(a)：$N(a\vee b)=Na\wedge Nb$

において，a に Na，b に Nb を代入すると，

$N(Na\vee Nb)=N(Na)\wedge N(Nb)$。

ここで復帰律：$N(Na)=a$ を用いることにより，

$$a\wedge b=N(Na\vee Nb) \quad \cdots(1)$$

となる。これより演算 $\wedge$ は，演算 $\vee$ と演算 N により表すことができる。

よって，分配律(a)は式(1)を用いて，

$$\begin{aligned} &N(Na\vee N(b\vee c))\\ &\quad =N(Na\vee Nb)\vee N(Na\vee Nc) \end{aligned} \quad \cdots(\mathrm{I})$$

と変形される。

またクリーネ律(a)は式(1)を用いて，

$N(Na\vee N(Na))\vee(b\vee Nb)=b\vee Nb$，

よって，$N(Na\vee a)\vee(b\vee Nb)=b\vee Nb \quad \cdots(\mathrm{II})$

と変形される。これより，ド・モルガン律(a)と復帰律は調べる必要がない。

更に，他の完全で独立な公理についての判定は，以下のようになっている。

（2）交換律(a)の判定

関係行列 R においては交換律が成立しているので，調べる必要はない。

（3）最小元の存在(a)の判定

関係行列 R においては最小元をあらかじめ p_n に設定してあるので，最小元の存在を調べる必要がない。（簡単化終）□

以上により，有限クリーネ代数を数え上げるには，関係行列 R の2進数表示を用いると，判定手順の簡単化で示された式(I)の変形された分配律(a)と，式(II)の変形されたクリーネ律(a)を調べるだけでよい。

次に有限代数の同型判定であるが，導出された2つの有限代数を F_1,F_2 とする。もし F_1 と F_2 とが束順序同型であれば，関係行列の2進数表示は一意に定まるので，半順序集合 P の元 $p_2,\cdots,p_{n-1}$ を適当に置換することにより，F_1 と F_2 の2進数表示は必ず一致する。逆に，F_1 と F_2 の2進数表示が一致していれば，F_1 と F_2 は束順序同型であることは明らかである。これより，次のような有限クリーネ代数の判定手順が求まる。

［手順1］　有限クリーネ代数の判定法

(1) 有限集合の包含関係を記述する関係行列 R の2進数表示を作成する。
(2) 作成した2進数表示が束であるかを判定する。（田村，田中らによる方法）
(3) 式(I)の変形された分配律を調べる。
(4) 式(II)の変形されたクリーネ律を調べる。
(5) 導出した有限クリーネ代数の同型判定を行う。
（手順終）□

上の手順1の(1)～(5)により，与えられた2進数表示が有限クリーネ代数であるかどうかが判定できる。これをすべての可能な2進数表示を発生させて行った結果，元の数 $n\leq 13$ までの有限クリーネ代数が得られた。

同様に有限ド・モルガン代数は，有限クリーネ代数から最小元の存在(b)を付け加えてクリーネ律を取り除いた代数系である。有限ド・モルガン代数の判定では，関係行列 R は最小元をあらかじめ p_n に設定しているので最小元の存在(b)は調べる必要がなく，有限クリーネ代数の判定法である手順1から直ちに以下の手順を得る。

［手順2］　有限ド・モルガン代数の判定法

(1) 有限集合の包含関係を記述する関係行列 R の2進数表示を作成する。
(2) 作成した2進数表示が束であるかを判定する。（田村，田中らによる方法）。
(3) 式(I)の変形された分配律を調べる。
(4) 導出した有限ド・モルガン代数の同型判定を行う。これより，単項演算 N に関する中心の一意性さえ除外すればほとんど有限クリーネ代数の判定法と一致する。（手順終）□

手順1に従って $n\leq 13$ までの有限クリーネ代数を求めた結果を以下に示す。元の名前を除外した束順序集合からみると，有限クリーネ代数と有限ド・モルガン代数は同型であることが分かる。有限クリーネ代数と有限ド・モルガン代数の決定的な違いは，中心（または不動核）の存在条件にあり，有限クリーネ代数は束順序集合に対して元の名前の付け方が一意に定まるが，有限ド・モルガン代数は中心が一意に定まらないので，必ずしも元の名前の付け方が一意に定まるとは限らない。

下記に示した有限クリーネ代数のうち，Mは元の名前

付けも含めて一意に決定される有限ド・モルガン代数を，$\overline{M}$は元の名前付けを除外した同型なものが必ず複数存在する有限ド・モルガン代数を示す。

number of elements = 3

No. 1　　M

count = 1

number of elements = 4

No. 1　0　M

No. 2　1　M

count = 2

number of elements = 5

No. 1　1, 11　M

count = 1

number of elements = 6

No. 1　0, 10, 110　M

No. 2　1, 10, 111　M

No. 3　1, 11, 111　M

count = 3

number of elements = 7

No. 1　0, 11, 111, 1110　M

No. 2　1, 11, 111, 1111　M

count = 2

number of elements = 8

No. 1　0, 00; 110, 1010, 01100　M

No. 2　0, 01, 110, 1111, 01100　$\overline{M}$

No. 3　0, 11, 111, 1111, 11110　M

No. 4　1, 10, 110, 1110, 11111　M

No. 5　1, 11, 110, 1111, 11111　M

No. 6　1, 11, 111, 1111, 11111　M

count = 6

number of elements = 9

No. 1　0, 01, 110, 1000, 11011, 111100　M

No. 2　0, 11, 111, 1111, 11111, 111110　M

No. 3　1, 10, 111, 1111, 11110, 111111　M

No. 4　1, 11, 111, 1111, 11111, 111111　M

count = 4

number of elements = 10

No. 1　0, 01, 011, 1100, 11101, 111111, 0111000　M

No. 2　0, 01, 110, 1111, 11010, 111111, 1111100　M

No. 3　0, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111110　M

No. 4　0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111110　M

No. 5　1, 10, 100, 1110, 11010, 101100, 1111111　M

No. 6　1, 10, 101, 1110, 11111, 101100, 1111111　$\overline{M}$

No. 7　1, 10, 111, 1111, 11111, 111110, 1111111　M

No. 8　1, 11, 110, 1110, 11110, 111111, 1111111　M

No. 9　1, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111111　M

No. 10　1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111　M

count = 10

number of elements = 11

No. 1　0, 01, 110, 1111, 11111, 111110, 1111111, 11111100　M

No. 2　0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111110　M

No. 3　1, 10, 101, 1110, 11000, 111011, 1111100, 11111111　M

No. 4　1, 10, 111, 1111, 11111, 111111, 1111110, 11111111　M

No. 5　1, 11, 110, 1111, 11111, 111110, 1111111, 11111111　M

No. 6　1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111　M

count = 6

number of elements = 12

No. 1　0, 00, 001, 0110, 10100, 110000, 1110111, 10110100, 011110000　$\underline{M}$

No. 2　0, 01, 010, 0111, 11000, 111001, 1101010, 11111111, 011110000　$\underline{M}$

No. 3　0, 01, 011, 0111, 11000, 111001, 1111011, 11111111, 011110000　M

No. 4　0, 01, 011, 1100, 11101, 100000, 1100101, 11101111, 111111000　M

No. 5　0, 01, 110, 1101, 11110, 111111, 1101100, 11111111, 111111100　M

No. 6　0, 01, 110, 1111, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111100　M

No. 7　0, 11, 111, 1110, 11110, 111110, 1111111, 11111111, 111111110　M

No. 8　0, 11, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111, 11111111, 111111110　M

No. 9　0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111110　M

No. 10　1, 10, 101, 1011, 11100, 111101, 1111111, 10111000, 111111111　M

No. 11　1, 10, 101, 1110, 11111, 111010, 1111111, 11111100, 111111111　M

No. 12　1, 10, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111, 11111110, 111111111　M

No. 13　1, 10, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111110, 111111111　M

No. 14　1, 11, 110, 1100, 11110, 111010, 1101100, 11111111, 111111111　$\underline{M}$

No. 15　1, 11, 110, 1101, 11110, 111111, 1101100, 11111111, 111111111　M

No. 16　1, 11, 110, 1111, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111111　M

No. 17　1, 11, 111, 1110, 11110, 111110, 1111111, 11111111, 111111111　M

No. 18　1, 11, 111, 1111, 11110, 111111, 1111111, 11111111, 111111111　M

No. 19　1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111111　M

count = 19

number of elements = 13

No. 1　0, 01, 011, 1100, 11101, 111111, 1100100, 11101101, 111111111, 1111111000　M

No. 2　0, 01, 110, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111110, 111111111, 1111111100　M

No. 3　0, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111111, 1111111110　M

No. 4　0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111111, 1111111110　M

No. 5　1, 10, 101, 1110, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111100, 1111111111　M

No. 6　1, 10, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111110, 1111111111　M

No. 7　1, 11, 110, 1101, 11110, 111000, 1111011, 11111100, 111111111, 1111111111　M

No. 8　1, 11, 110, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111110, 111111111, 1111111111　M

No. 9　1, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111111, 1111111111　M

No. 10　1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111111, 1111111111　M

count = 10

ここで上記の出力結果の見方を元の数 $n=8$ のNo.1を

例にとって説明する。２進数表示：0,00,110,1010,01100はそれぞれ関係行列 R の成分である

r_{23}，$r_{24}r_{34}$，$r_{25}r_{35}r_{45}$，$r_{26}r_{36}r_{46}r_{56}$，$r_{27}r_{37}r_{47}r_{57}r_{67}$

を示しており，r_{25}，r_{35}，r_{26}，r_{46}，r_{37}，r_{47} が１，他は０である。よって元の間の半順序関係は，

$p_2 \geq p_5 \leq p_3$，　$p_2 \geq p_6 \leq p_4$，　$p_3 \geq p_7 \leq p_4$

となる。これに最大元 p_1 および最小元 p_8 も含めてハッセ図で描き表すと，図２のようになる。

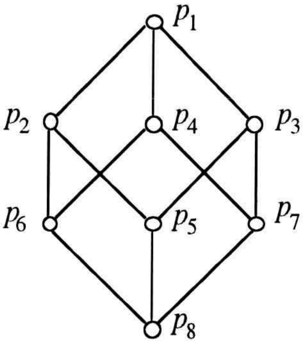

図２　有限クリーネ代数：$n=8$（No.1）

有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数では，否定演算 N に関して，

$\forall p_i \in P$（但し，$1 \leq i \leq n$）に対して $Np_i = p_{n-i+1}$

が成立しているので，元の名前付けをした図２に示したものは有限クリーネ代数の例となる。

本報告の計算結果として，これに束順序同型な有限ド・モルガン代数として２進数表示：0,00,011,1010,11000が一例として得られている。これを関係行列 R の成分で示すと，

$p_3 \geq p_5 \leq p_4$，　$p_2 \geq p_6 \leq p_4$，　$p_2 \geq p_7 \leq p_3$

となり，元の名前付けをした有限ド・モルガン代数は図３のようになり，否定演算 N に関して明らかにクリーネ代数ではない。

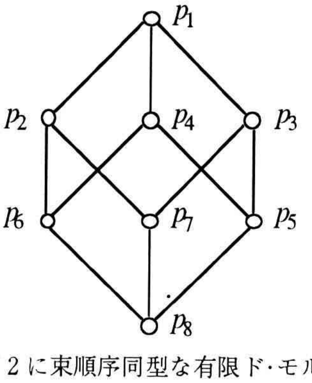

図３　図２に束順序同型な有限ド・モルガン代数

手順１に従って $n \leq 13$ まで生成した上述の有限クリーネ代数の結果から，元の名前付けも含めて一意に決定される有限ド・モルガン代数と，そうでないものとの違いとして

「同型なものが必ず存在する有限ド・モルガン代数は，
　束順序集合としてブール代数をその部分集合に含む」

と予想することができる。中心（不動核）については，それが作る束はブール代数になることが指摘されているが[12,13]，有限ド・モルガン代数の構造として最も困難なものはブール代数を部分集合として含むものであり，それ以外については有限クリーネ代数と同じであるという点が興味深い。これにより，著者らは有限ド・モルガン代数は有限クリーネ代数から構成できること，更には，有限クリーネ代数の表現定理から有限ド・モルガン代数の表現定理を構成することも可能であると考えている。

ここで簡単に本アルゴリズムの妥当性について説明する。第３節で述べた有限代数の判定手順のうち，２進数表示作成部分は，明らかに任意の包含関係を含むすべての有限集合を構成できることが示される。また，田村，田中らによる有限束判定方法は，これまで得られているすべての有限束を正しく導出することが確認されており，また彼らの方法は全幅判定を行っているので，すべての有限束が導出できることは比較的簡単に示すことができる。この田村，田中らの方法をもとに，第２節で述べた公理を付け加えながら，有限モジュラー束，有限分配束，有限ド・モルガン代数，有限ブール代数を生成した第３節の結果は，妥当な結果であると考えられる。更に第４節で田村，田中らの方法をもとに，有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数の完全で独立な公理系を用いて計算効率を高めたアルゴリズムの結果とも一致していることから，本報告で提示したアルゴリズムは妥当であると考えているが，第３者が異なるアルゴリズムで追試して頂ければ幸いである。

最後に，有限代数の数学的構造を明らかにする上で，すべての有限代数を求めることができるような構成方法を見つけることは重要な問題である。元の数が n である有限ブール代数については，よく知られているように，その構造が集合束 2^n に同型である。クリーネ代数はブール代数における相補律を弱めた代数であるので，当然ながら，有限ブール代数は有限クリーネ代数の一部である。また有限クリーネ代数には，線形的な束構造および直積的な束構造が必ず存在する。これ以外の束構造については，今のところ，どのようなものが有限クリーネ代数に存在するかは分かっていない。しかしながら本報告の計算結果から，次のような構成法の問題：

「もし元の数が少ない有限クリーネ代数をもとに，その
　一部分を否定演算 N に関する対称性を考慮に入れなが
　ら既に得られているクリーネ代数の束構造に埋め込ん
　だものは，有限クリーネ代数であろうか？」

が考えれる。これについては，特に中心を持つ，元の数 n が奇数の有限クリーネ代数においては，その束構造の対称性が顕著なことから，埋め込みが可能であろう。最近，森岡による中心を持つクリーネ代数の数学的構造が明らかにされつつあり[12]，そこで用いられている方法は構成的な存在証明の形で与えられているので興味深い。また，中嶋，森岡らは，不動核を用いてド・モルガン代数の数学的構造を明らかにしつつある[13]。そこでは，本報告で用いられている中心を（束論においては別の意味で用いられている理由から）不動点と呼び，その不動点の拡張である不動核を定義して，中心を持たないクリーネ代数，言い換えれば，元の数 n が偶数の有限クリーネ代数も含めて，その代数の数学的構造を論じている。特に不動核の構造はブール代数であることが示されたので，不動核をもとにした有限クリーネ代数の構成方

法が求められる可能性が出てきた。なお，近藤により，クリーネ代数の極大フィルターが定義され，任意のクリーネ代数の適当な商代数は元の数$n=3$のクリーネ代数に埋め込み可能であることが示されているので，有限クリーネ代数を構成する場合には，元の数$n=3$をもとにして，逆にその束順序を構築することが，理論的には可能となっている[14,15,16]。

本報告より，元の名前付けをしない束順序集合のみからなる立場では，$n=13$までは有限クリーネ代数と有限ド・モルガン代数は同型であるという興味深い結果が計算機により得られた。有限クリーネ代数と有限ド・モルガン代数の決定的な違いは，中心（もしくは不動核とも呼ばれる）が存在すれば唯1つか否かであったが，中心は元の名前に関してのみ意味を持ち，単純に束の順序集合を比較すればどちらも等しい，もしくは束順序として同型であるという予想が成り立つ。これについては証明が未解決であるが，これが成り立つならばクリーネ代数における束の表現定理が求められればド・モルガン代数における束の表現定理が求められ，逆も可である。

本報告で得られた元の名前付けをしない束順序集合のうち，最大元および最小元を持つ有限束と，その部分集合である有限モジュラー束，有限分配束，有限ド・モルガン代数，有限クリーネ代数および有限ブール代数の数を，表1に示す。

表1　本報告で求められた有限代数の数

n	0,1を持つ束	0,1を持つモジュラ束	0,1を持つ分配束	ド・モルガンクリーネ代数	ブール代数
3	1	1	1	1	n.d.
4	2	2	2	2	1
5	5	4	3	1	n.d.
6	15	8	5	3	n.d.
7	53	16	8	2	n.d.
8	222	34	15	6	1
9	1078	72	26	4	n.d.
10	5994	157	47	10	n.d.
11	37622	343	82	6	n.d.
12				19	n.d.
13				10	n.d.

4．あとがき

本報告では，有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数の生成を中心に，元の数$n=13$までのすべての有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数を算出した。これらの数え上げについては，著者らの知る限り，本報告で示している$n=13$がこれまで得られている最も元の数が多いものである。特に，有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数の束構造が，ある条件下では$n=13$まで一致しているという，興味深い結果が得られた。また，計算機に依らないで有限代数を構成的に求める一般的方法，即ち，構成的な束構造の構築方法を見つけ出す必要がある。これについては，特定の代数系に対しては幾つかの予想を立てることができるが，一部のみの構成法であって，未だに完全な方法の決定およびその証明はされていない。また，著者らの今までの計算結果から，与えられた元の数からある程度以内では束順序の異なる，即ち本質的に違う構造を持つ有限クリーネ代数の数の上界および下界（これは有限ド・モルガン代数にも応用可能となる）を予測することができるので，数の限界式を理論的に求めることは可能と思われる。

今後の残された早急に解決すべき問題として，元に名前付けをした$n \leq 13$までのすべてのド・モルガン代数を計算機を用いて生成すること，ド・モルガン代数や有限クリーネ代数を生成するのに否定演算の対称性を考慮したアルゴリズムに改良することなどの課題が挙げられる。本報告のプログラムはC言語で記述し，サン・マイクロシステムズ社のワークステーションSS-20を使って実行した。元の数nが最も大きい$n=13$での有限クリーネ代数と有限ド・モルガン代数の数え上げ時間は約715時間にもなり，大幅な改良を加えなければ$n=14$以上の実験は困難である。

参考文献

(1)　千谷：ファジィの数学的基礎(講座ファジィ1)，日刊工業新聞社，(1992).

(2)　向殿：ファジィ論理(講座ファジィ4)，日刊工業新聞社，(1993).

(3)　M. Mukaidono : A Set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra), IEEE Proc. 11th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp.27-34 (1981).

(4)　F.P. Preparata and R.T. Yeh : Continuously valued logic, J. Computer and System Science, 6, 387, (1972).

(5)　R.Cignoli : Injective De Morgan and Kleene algebras, Proc. Amer. Math. Soc, 47, 2, pp.269-278 (1975).

(6)　R.Balbes and P.Dwinger : Distributive lattices, Univ. Missori Press, pp.211-227 (1974).

(7)　A.Bialynicki-Birula and H.Rasiowa : On the representation of quasi-Boolean algebras, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl-3, 5, pp.259-261 (1957).

(8)　巽、小林、向殿、木名瀬：有限fuzzy代数の数え上げ，神奈川工科大学研究報告，B-13，pp.173-187. (1989).

(9)　巽、小林、向殿、西岡：元の数$n=12$の有限fuzzy代数の数，神奈川工科大学研究報告，B-14, pp.200-209. (1990).

(10)　E.V.Huntington : Sets of independent postulates for the algebra of logic, Trans. Amer. Math. Soc, 5, pp.288-309 (1904).

(11)　田村，田中：コンピュータによる有限束の数え上げ，数理科学，No.247, pp.51-55 (1984).

(12)　森岡：中心を持つクリーネ代数とドモルガン代数の諸性質に関する研究，日本ファジィ学会誌，Vol. 7, No. 3, pp.572-584, (1995).

(13)　中島，森岡：不動核によるド・モルガン代数の特徴づけ，第12回ファジィシステムシンポジウム，TUE2-3, pp.127-130, (1996).

(14)　近藤：ファジィ論理関数は本質的に3値である，日本ファジィ学会誌，Vol. 6, No. 3, pp.542-548, (1994).

(15)　近藤：ファジィ論理とその代数，日本ファジィ学会誌，Vol. 6, No. 6, pp.1067-1074, (1994).

(16)　近藤：クリーネ代数の特徴付け，日本ファジィ学会誌，Vol. 7, No. 1, pp.595-102, (1995).