（研究ノート）

元の数13の有限クリーネ代数のハッセ図

巽　久行，　荒木智行，　徳増眞司

神奈川工科大学 工学部 情報工学科

Hasse Diagrams of Finite Kleene Algebra having 13 elements

Hisayuki TATSUMI, Tomoyuki ARAKI and Shinji TOKUMASU

Abstract

Kleene algebra, which is refered to also as fuzzy algebra, is an algebraic system of fuzzy set or fuzzy logic. It is well known that Boolean algebra is one of the most important algebra for engineering, and the ordinary set theory and the two-valued logic are different models or interpretations of Boolean algebra. A fundamental differrence between Boolean algebra and Kleene algebra is the fact that the complementary law (the law of the excluded middle) in the axioms of Boolean algebra is replaced by the Kleene's law, where Kleene's law is a weeker condition than the complementary law. Removal of Kleene's law from Kleene algebra gives De Morgan algebra, which is refered to also as quasi-Boolean algebra. We have been enumerated the finite Kleene algebra having 12 elements or less, and appeared Hasse diagrams of these. In this paper, we give Kleene algebra having 13 elements and its Hasse diagrams.

Keywords: Boolean algebra, Kleene algebra, De Morgan algebra, Hasse diagram

1．まえがき

近年，計算機工学の分野において，古くから用いられている２値論理の他に，３値以上の真理値を持つ多値論理が利用されている。特にL.A.Zadehにより，あいまいさを数量的に取り扱う手段としてFuzzy集合の概念が提案されてから，この集合の論理的な応用も行われ，多値論理の分野の中でFuzzy論理という名称の下に研究されている。Fuzzy論理は，その命題が取り得る真理値が連続濃度[0, 1]からなる無限多値論理であるとされており，これまで公理体系として整備されているFuzzy論理としては，直感主義的Fuzzy論理，ルカシェヴィッツのFuzzy論理，クリーネのFuzzy論理等が提案されている[1,2]。本報告では，クリーネのFuzzy論理に対応する代数系を考察する。この代数は，ブール代数において満足される相補律をそれよりも弱い公理であるクリーネ律と呼ばれる公理で置き換えて得られる代数であり，工学の分野ではFuzzy代数（fuzzy algebra）[3]と呼ばれ，数学の分野ではクリーネ代数（Kleene algebra）[4]と呼ばれて研究されている。更に，クリーネ代数からクリーネ律を取り除いた代数はド･モルガン代数（De Morgan algebra）[5]と呼ばれて研究されている。

本報告は，著者らが以前から行っている有限クリーネ代数（もしくは有限Fuzzy代数）の数え上げ[6,7]の続報である。有限クリーネ代数は，最小元０および最大元１を持つ特殊な有限分配束をなしており，ここでいう代数の数え上げとは，各代数で成立するすべての公理を満たすような有限個の元からなる束は，同型なものを除いて何種類あるかを求める問題である。著者らの興味の中心は，クリーネ代数がどのような構造をしているかを知ることにある。元の数がnである有限ブール代数は，その束構造が集合束2^nに同型であることが知られているが，クリーネ代数はブール代数で満たす公理との違いがクリーネ律のみであるにもかかわらず，その束構造は著者らの知る限りあまり深く研究されていない。そこで，構成的な束構造を求める手がかりとして，計算機を用いてすべて導出してみることを試みてきた。元の数がnである有限代数の数については，$n=12$までのすべての有限クリーネ代数（もしくは有限fuzzy代数）の数とハッセ図による束構造が求められており[6,7]，$n=13$については数のみが報告されている[8]。今回，$n=13$の有限クリーネ代数のハッセ図を求めたので，これについて報告する。また，有限クリーネ代数と有限ド･モルガン代数の決定的な違いは，特殊な元である不動点（もしくは中心とも呼ばれている）が存在すれば唯１つか否かであり，文献[8]では「不動点は元の名前に関してのみ意味を持ち，単純に束の順序集合を比較すればどちらも等しい」と予想したが，この予想が誤りであることを，あるハッセ図の例を用いて示す。

2．諸定義

最初に，本報告で扱う代数系について概説する。
空でない集合Lにおいて，Lの任意の元a, b, cに対して，次の３つの公理が成立する２項演算$\vee$と$\wedge$の定義された代数系$\langle L, \vee, \wedge \rangle$を束という。

(1) 交換律 (a) $a \vee b = b \vee a$
　　　　　 (b) $a \wedge b = b \wedge a$
(2) 結合律 (a) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
　　　　　 (b) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
(3) 吸収律 (a) $a \vee (a \wedge b) = a$
　　　　　 (b) $a \wedge (a \vee b) = a$

束において，

(4) 分配律 (a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
　　　　　 (b) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

を満たすものを分配束という。分配束において，さらに単項演算Nが定義され，

(5) ド・モルガン律 (a) $N(a \vee b) = Na \wedge Nb$
　　　　　　　　 (b) $N(a \wedge b) = Na \vee Nb$
(6) 復帰律 $N(Na) = a$

を満たす代数系$\langle L, \vee, \wedge, N \rangle$をド・モルガン束という。ド・モルガン束のうち，更に，

(7) 最小元の存在 (a) $0 \vee a = a$
　　　　　　　　(b) $0 \wedge a = 0$
(8) 最大元の存在 (a) $1 \vee a = 1$
　　　　　　　　(b) $1 \wedge a = a$

を満たす最小元(0)および最大元(1)を持つ代数系$\langle L, \vee, \wedge, N, 0, 1 \rangle$はド・モルガン代数（De Morgan algebra）と呼ばれる[6]。ド・モルガン代数のうち，更に，

(9) クリーネ律 (a) $(a \wedge Na) \vee (b \vee Nb) = b \vee Nb$
　　　　　　　 (b) $(a \wedge Na) \wedge (b \vee Nb) = a \wedge Na$

を満たすものはクリーネ代数（Kleene algebra）と呼ばれ[4]，工学ではFuzzy代数（fuzzy algebra）と呼ばれて研究されている[3]。クリーネ律を，更に弱い公理である

(9*) 相補律 (a) $a \vee Na = 1$
　　　　　　(b) $a \wedge Na = 0$

で置き換えた代数系がブール代数である。即ち，本報告で考察するクリーネ代数は，ブール代数における相補律を，それよりも弱い公理であるクリーネ律で置き換えて得られる代数系である。

［注１］代数系$\langle L, \vee, \wedge, N, 0, 1 \rangle$がクリーネ代数であるとは，次の２つの条件

(i) $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$は最小元０，最大元１をもつ分配束である

(ii) 写像$N: L \to L$は次の条件を満たす；
任意の$x, y \in L$に対して，
(C0) $N0 = 1$，$N1 = 0$
(C1) $x \le y$ ならば $Ny \le Nx$
(C2) $x = N(Nx)$
(C3) $x \wedge Nx \le y \vee Ny$

を満たすものとも定義されるが，本報告では公理系の観点からクリーネ代数の定義として等式(1)～(9)を採用した。なお注１の条件(ii)の中で，クリーネ律の公理(C3)を取り除いたものはド・モルガン代数の定義となる。

（注終）□

ある代数系で成立するすべての等式を導くことができるような公理の集合を，その代数系における完全な公理系と呼ぶ。また公理系のうち，各公理は他の公理から決して導くことができないとき，その公理系は独立であると呼ぶ。任意に与えられた有限集合がある代数系を満たすかどうかを調べるとき，代数系で成立するすべての等式を調べる代わりに，その代数系における完全で独立な公理系を調べるだけで十分である。等式(1)～(9)の中で，以下の定義１で述べる６つの等式の集合は，文献[3]で示されたクリーネ代数における完全で独立な公理系の１つであり，任意に与えられた有限集合がクリーネ代数であるかどうかを調べるには，この完全で独立な公理系を調べれば十分である。

［定義１］次の公理の集合は，クリーネ代数における完全で独立な公理系の１つである。

(K1) 交換律 (a) $a \vee b = b \vee a$
(K2) 分配律 (a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
(K3) ド・モルガン律 (a) $N(a \vee b) = Na \wedge Nb$
(K4) 復帰律 $N(Na) = a$
(K5) 最小元の存在 (a) $0 \vee a = a$
(K6) クリーネ律 (a) $(a \wedge Na) \vee (b \vee Nb) = b \vee Nb$

（定義終）□

［注２］定義１において，公理(K6)を以下の公理(D6)で置き換えた集合は，ド・モルガン代数における完全で独立な公理系の１つであることが知られている[3]。

(D6) 最小元の存在 (b) $0 \wedge a = 0$ （注終）□

本報告では，有限個の元からなるクリーネ代数の数を求める際に，定義１で示した完全で独立な公理系を用いて，より高速に計算を行っている。

3．有限束の生成方法

有限代数を数え上げる際には，最初に有限束の導出を行わなければならない。計算機による有限束の数え上げについては，田村・田中らにより元の数が$n \le 11$まで求められたのが，著者らの知る限り初めての構成的な生成手法である[9]。本報告でも，有限束の導出は田村・田中らが行った方法を用いているので，以下，その方法を述べる。

n個の元よりなる集合Pを，$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$とする。有限束には最大元および最小元が必ず存在するので，あらかじめp_1を最大元（即ち１）に，p_nを最小元（即ち０）に決めておく。

集合Pにおける包含関係を記述するために，任意の２つの元p_iおよびp_j（但し，$1 \le i, j \le n$）の間に，以下のような$n \times n$行列$R = (r_{ij})$を定義する。

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & (\, p_i \ge p_j \text{ で，} p_i \ne p_j \text{ のとき}) \\ -1 & (\, p_i \le p_j \text{ で，} p_i \ne p_j \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上記以外のとき}) \end{cases}$$

この行列において，集合Pの元$p_1, p_2, \cdots, p_n$の適当な置換により，行列Rの対角成分より右上の三角部分（即ち，要素r_{ij}のなかで$i \le j$の部分）には-1が現われないように，逆に，左下の三角部分（即ち，要素r_{ij}のなかで$i \ge j$の部分）には1が現われないようにすることができ

る。更に，p_1 はあらかじめ最大元と決めているので，$2 \le j \le n$ に対して常に $r_{1j} = 1$（当然，$2 \le i \le n$ に対して $r_{i1} = -1$）である。同様に，p_n は最小元と決めているので，$1 \le i \le n-1$ に対して常に $r_{in} = 1$（当然，$1 \le j \le n-1$ に対して $r_{nj} = -1$）である。よって，関係行列 R は，次のようになる。

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & \vdots \\ \vdots & \beta & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで，α 部分の要素は 0 か 1，β 部分の要素は 0 か -1 である。ところで交換律(a)が成立する場合，$r_{ij} = 1$ ならば $r_{ji} = -1$，$r_{ij} = 0$ ならば $r_{ji} = 0$ となる（即ち，α 部分の r_{ij} が 0，1 ならば，β 部分の r_{ji} はそれぞれ 0，-1 となる）ので，β 部分はなくても関係行列は一意に定まる。よって，α 部分の要素を

$$r_{23},\ r_{24}r_{34},\ \cdots,\ r_{2k}r_{3k}\cdots r_{(k-1)k},\ \cdots,\ r_{2(n-1)}r_{3(n-1)}\cdots r_{(n-2)(n-1)}$$

と並べて，関係行列 R を 2 進数表示で一意に表すことができる。与えられた集合が束であるためには，集合 P が半順序集合でなければならない。集合 P が半順序集合であることを調べるには，この 2 進数表示が

反射律　（$p_i \le p_i$），
反対称律（$p_i \le p_j$ かつ $p_j \le p_i$ ならば $p_i = p_j$）
推移律　（$p_i \le p_j$ かつ $p_j \le p_k$ ならば $p_i \le p_k$）

を満たすかどうかを判定すればよいが，この 2 進数表示は反射律および反対称律は成立するように作られているので，推移律のみを調べればよい。これは，$i < j < k$ のとき，

$r_{ij} = 1$ かつ $r_{jk} = 1$ ならば $r_{ik} = 1$
（$r_{ij} = 1$ かつ $r_{ik} \ne 1$ ならば $r_{jk} \ne 1$）

として判定される。更に，集合 P が束であることを判定するためには，各元 p_i，p_j（但し，$i \ne j$）について，$p_i \vee p_j$ と $p_i \wedge p_j$ が集合 P の元として一意的に存在するかを調べればよい。ここで $p_i \vee p_j$ がいえれば $p_i \wedge p_j$ の存在はいえる。なぜなら，

$$P_L = \{\, l \mid l \le p_i \text{ かつ } l \le p_j \}$$

とすると，最小元は P_L に属するので空ではなく，

$$\bigvee_{l \in P_L} l = p_i \wedge p_j$$

となる。$p_i \vee p_j$ が一意的に存在する判定は次のように行える。$i < j$ かつ $r_{ij} = 0$ なる任意の i，j に対して，$\{p_i, p_j\}$ の上界が $p_{u_1}, p_{u_2}, \cdots, p_{u_k}$ であるとき，$u_1, u_2, \cdots, u_k$ の中で最大のものを m とすると，$1 \le t \le k$ なる t に対して，$p_{u_t} \ge p_m$ を調べればよい。

以上が有限代数の判定に際しての前処理段階となる有限束の判定方法であり，2 進数表示の中で最大元および最小元を持つ有限束は（同型であるものも重複されるが）すべて導出することができる。文献[9]では，$p_2, \cdots, p_{n-1}$ の置換によって得られる最小の 2 進数表示を表現と呼び，同型である束が重複しないように工夫されている。この田村・田中らの方法をもとに，第 2 節で述べた公理を判定しながら有限クリーネ代数を生成した。

4．元の数 $n = 13$ の有限クリーネ代数

有限代数では一般に単項演算 N が定義されているので，有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数に対して，次のような演算 N に関する簡単な性質を述べる。これらはほぼ自明ではあるが，後で述べる判定手順の簡単化のために必要となる。

次の性質 1 および性質 2 は，有限クリーネ代数および有限ド・モルガン代数で成り立つ。

[性質 1]　$a \ne b$ ならば $Na \ne Nb$。　（証明略）□

[性質 2]　$Na = b$ ならば $Nb = a$。　（証明略）□

次の性質 3 は，有限クリーネ代数のみで成り立つ。

[性質 3]　$Na = a$ なる元は，存在すれば唯一である。
（証明略）□

$Na = a$ なる元を不動点（fixed point）と呼び[11]（中心(center)とも呼ばれている[3,10]），有限クリーネ代数においては，もし存在すれば唯一に定まる。

以上の性質 1 から性質 3 より，$Na = a$ なる元を除けば有限クリーネ代数の数え上げと有限ド・モルガン代数の数え上げは同じ方法を採用できる。よって，否定演算 N に関して，

不動点以外の元に対しては，$Np_i = p_{n-i+1}$
不動点の元に対しては，　　$Np_i = p_i$

が成り立つ。

有限クリーネ代数の判定を行う場合，定義 1 で示された 6 つの完全で独立な公理系を調べなければならないが，以下のように組み合わせることで判定手順の簡単化が可能となる。

[クリーネ代数の判定手順の簡単化]

（1）ド・モルガン律(a)：$N(a \vee b) = Na \wedge Nb$ において，a に Na，b に Nb を代入すると，

$$N(Na \vee Nb) = N(Na) \wedge N(Nb)。$$

ここで復帰律：$N(Na) = a$ を用いることにより，

$$a \wedge b = N(Na \vee Nb) \qquad \cdots (*)$$

となる。これより演算 $\wedge$ は，演算 $\vee$ と演算 N により表すことができる。よって，分配律(a)は式(*)を用いて，

$$N(Na \vee N(b \vee c)) = N(Na \vee Nb) \vee N(Na \vee Nc) \qquad \cdots (1)$$

と変形される。また，クリーネ律(a)は式(*)を用いて，

$$N(Na \vee N(Na)) \vee (b \vee Nb) = b \vee Nb，よって，$$

$$N(Na \vee a) \vee (b \vee Nb) = b \vee Nb \qquad \cdots (2)$$

と変形される。これより，ド・モルガン律(a)と復帰律は調べる必要がない。

（2）関係行列 R においては交換律が成立しているので，調べる必要はない。

（3）関係行列 R においては最小元をあらかじめ p_n に設定してあるので，最小元の存在を調べる必要がない。

（簡単化終）□

以上により，有限クリーネ代数を数え上げるには，関係行列 R の 2 進数表示を用いると，判定手順の簡単化で示された式(1)の変形された分配律(a)と，式(2)の変形されたクリーネ律(a)を調べるだけでよい。

次に有限代数の同型判定であるが，導出された２つの有限代数をF_1, F_2とする。もしF_1とF_2とが束順序同型であれば，関係行列の２進数表示は一意に定まるので，半順序集合Pの元$p_2,\cdots,p_{n-1}$を適当に置換することにより，F_1とF_2の２進数表示は必ず一致する。逆に，F_1とF_2の２進数表示が一致していれば，F_1とF_2は束順序同型であることは明らかである。これより，次のような有限クリーネ代数の判定手順が求まる。

[手順１] 有限クリーネ代数の判定法

(1) 有限集合の包含関係を記述する関係行列Rの２進数表示を作成する。

(2) 作成した２進数表示が束であるかを判定する。（田村・田中らによる方法）

(3) 式(1)の変形された分配律を調べる。

(4) 式(2)の変形されたクリーネ律を調べる。

(5) 導出した有限クリーネ代数の同型判定を行う。

（手順終）□

上の手順１の(1)～(5)により，与えられた２進数表示が有限クリーネ代数であるかどうかが判定できる。

有限ド･モルガン代数の判定は，有限クリーネ代数の判定からクリーネ律を取り除いて，最小元の存在(b)を加えればよい。しかし，関係行列Rは最小元をあらかじめp_nに設定しているので最小元の存在(b)は調べる必要がない。よって，手順１から直ちに以下の手順を得る。

[手順２] 有限ド･モルガン代数の判定法

(1) 手順１の(1)～(3)まで同じ。

(2) 導出した有限ド･モルガン代数の同型判定を行う。但し，単項演算Nに関する不動点の一意性を除外する。（手順終）□

手順１に従って，$n=13$の有限クリーネ代数を求めた結果を表１に示す。

表１　元の数$n=13$の有限クリーネ代数

number of elements = 13

No. 1	0, 01, 011, 1100, 11101, 111111, 1100100, 11101101, 111111111, 1111111000
No. 2	0, 01, 110, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111110, 111111111, 111111100
No. 3	0, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111111, 111111110
No. 4	0, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111111, 111111110
No. 5	1, 10, 101, 1110, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111100, 111111111
No. 6	1, 10, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111110, 111111111
No. 7	1, 11, 110, 1101, 11110, 111000, 1111011, 11111100, 111111111, 111111111
No. 8	1, 11, 110, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111110, 111111111, 111111111
No. 9	1, 11, 111, 1110, 11111, 111111, 1111110, 11111111, 111111111, 111111111
No. 10	1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, 111111111, 111111111

count = 10

ここで上記の出力結果の見方を，No.1の２進数表示を例にとって説明する。この２進数表示は関係行列Rの成分である

$$r_{2,3},\ r_{2,4}r_{3,4},\ r_{2,5}r_{3,5}r_{4,5},\ r_{2,6}r_{3,6}r_{4,6}r_{5,6},$$
$$r_{2,7}r_{3,7}r_{4,7}r_{5,7}r_{6,7},\ r_{2,8}r_{3,8}r_{4,8}r_{5,8}r_{6,8}r_{7,8},$$
$$r_{2,9}r_{3,9}r_{4,9}r_{5,9}r_{6,9}r_{7,9}r_{8,9},$$
$$r_{2,10}r_{3,10}r_{4,10}r_{5,10}r_{6,10}r_{7,10}r_{8,10}r_{9,10},$$
$$r_{2,11}r_{3,11}r_{4,11}r_{5,11}r_{6,11}r_{7,11}r_{8,11}r_{9,11}r_{10,11},$$
$$r_{2,12}r_{3,12}r_{4,12}r_{5,12}r_{6,12}r_{7,12}r_{8,12}r_{9,12}r_{10,12}r_{11,12},$$

を示しており，

$r_{2,3}$，$r_{2,4}$，$r_{2,5}$，$r_{4,6}$，$r_{5,6}$，$r_{5,7}$，$r_{4,9}$，$r_{5,9}$，$r_{7,9}$，$r_{8,9}$，$r_{5,10}$，$r_{8,10}$，$r_{9,12}$，$r_{10,12}$，$r_{11,12}$が０，他は１である。よって元の間の半順序関係は，

$$p_2 \ge p_6 \ge p_7 \ge p_8 \ge p_{11}(\text{or } p_{12})$$
$$p_2 \ge p_6 \ge p_7(\text{or } p_9) \ge p_{10} \ge p_{11}$$
$$p_3 \ge p_4 \ge p_5(\text{or } p_7) \ge p_8 \ge p_{11}(\text{or } p_{12})$$
$$p_3 \ge p_4 \ge p_7 \ge p_{10} \ge p_{11}$$
$$p_3 \ge p_6 \ge p_7 \ge p_8 \ge p_{11}(\text{or } p_{12})$$
$$p_3 \ge p_6 \ge p_7(\text{or } p_9) \ge p_{10} \ge p_{11}$$

となり，これより最大元p_1および最小元p_{13}も含めて，この半順序関係をハッセ図で描くことができる。有限クリーネ代数においては，否定演算Nに関して，

$\forall p_i \in P$（但し，$1 \le i \le n$）に対して$Np_i = p_{n-i+1}$

が成り立つので，この関係を強調するために，p_1を１（p_{13}を$N1=0$）に，p_2をa（p_{12}をNa）に，p_3をb（p_{11}をNb）等々に対応させる。このとき，p_7をfに対応させると$f=Nf$となり，この元は不動点になることが分かる。一般に，元の数nが奇数の有限クリーネ代数は，不動点を必ず１つ持つことが簡単に証明できる。このようにして，付図１のNo.1で示したハッセ図が得られる。同様にして，表１の残りの２進数表示をハッセ図で描き表すと，付図１が得られる。

文献[8]において，「有限クリーネ代数と同型な有限ド･モルガン代数は，束順序集合としてブール代数をその部分集合に必ず含む」と予想した。不動点の集合である不動核（fixed core）については，それが作る束はブール代数になることが指摘されており[10,11]，この予想は成立すると考えている。更に文献[8]において，有限クリーネ代数と有限ド･モルガン代数の違いは，不動点の存在条件のみであり，「不動点は元の名前に関してのみ意味を持ち，単純に束の順序集合を比較すればどちらも等しい，即ち，元の名前を無視すれば互いに同型である」と予想したが，この予想が誤りであることを図１のハッセ図の例を用いて示す。図１は，元の数８の有限ド･モルガン代数であるが，元の数８においてこれに同型なクリーネ代数は存在しない。

最後に，簡単に本アルゴリズムの妥当性について説明する。第４節の手順１で述べた有限クリーネ代数の判定法のうち，ステップ(1)の２進数表示作成部分は，明らかに任意の包含関係を含むすべての有限集合を構成できることは明らかであり，更にステップ(2)の田村・田中らによる有限束判定方法は，これまで得られているすべての有限束を正しく導出することが証明されている。また彼らの方法は全幅判定を行っているので，そのアルゴリ

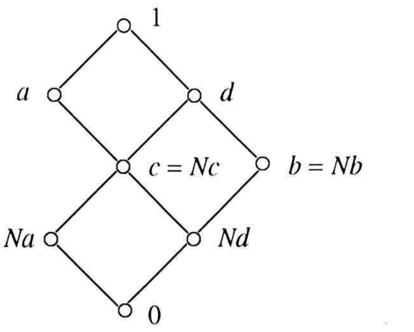


図1　元の数8の有限ド・モルガン代数の例

ズムに基づくプログラムで，すべての有限束が導出できることは確認している。本方法は，田村・田中らの方法をもとに，基本的には第2節で述べた公理を付け加えながら有限クリーネ代数を生成しているので，その結果は妥当であると考えているが，第3者が異なるアルゴリズムで追試して頂ければ幸いである。

5．あとがき

本報告は，元の数$n = 13$の有限クリーネ代数の数え上げ結果をもとに，そのすべてのハッセ図を記載している。付図に示した結果を見て頂くと分かるが，有限クリーネ代数のハッセ図は綺麗な形をしており，$n \leq 12$までの既存の結果[6,7]と併せて，束構造の構成的な生成方法が存在するような期待を抱かせてくれる。

今後の課題としては，本報告の有限クリーネ代数の数え上げ方法を拡張して，有限ド・モルガン代数の束構造を計算機で求めていくこと，有限クリーネ代数を生成する際に本アルゴリズムでは否定演算Nの対称性を考慮していないので，この改良を施すことなどが挙げられる。プログラムはC言語で記述し，サン・マイクロシステムズ社のワークステーションUltra-30を使って実行した。元の数$n = 13$の有限クリーネ代数の数え上げ時間は約100時間にもなり，現状では$n = 14$以上の実験は困難であるので，これを打開するために高速なアルゴリズムに修正する必要がある。

参考文献

(1) 千谷：ファジィの数学的基礎(講座ファジィ1)，日刊工業新聞社，(1992).

(2) 向殿：ファジィ論理(講座ファジィ4)，日刊工業新聞社，(1993).

(3) M. Mukaidono : A Set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra), IEEE Proc. 11th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp.27-34 (1981).

(4) R.Cignoli : Injective De Morgan and Kleene algebras, Proc. Amer. Math. Soc, 47, 2, pp.269-278 (1975).

(5) R.Balbes and P.Dwinger : Distributive lattices, Univ. Missori Press, pp.211-227 (1974).

(6) 巽,小林,向殿,木名瀬：有限fuzzy代数の数え上げ，神奈川工科大学研究報告，B-13，pp.173-187, (1989).

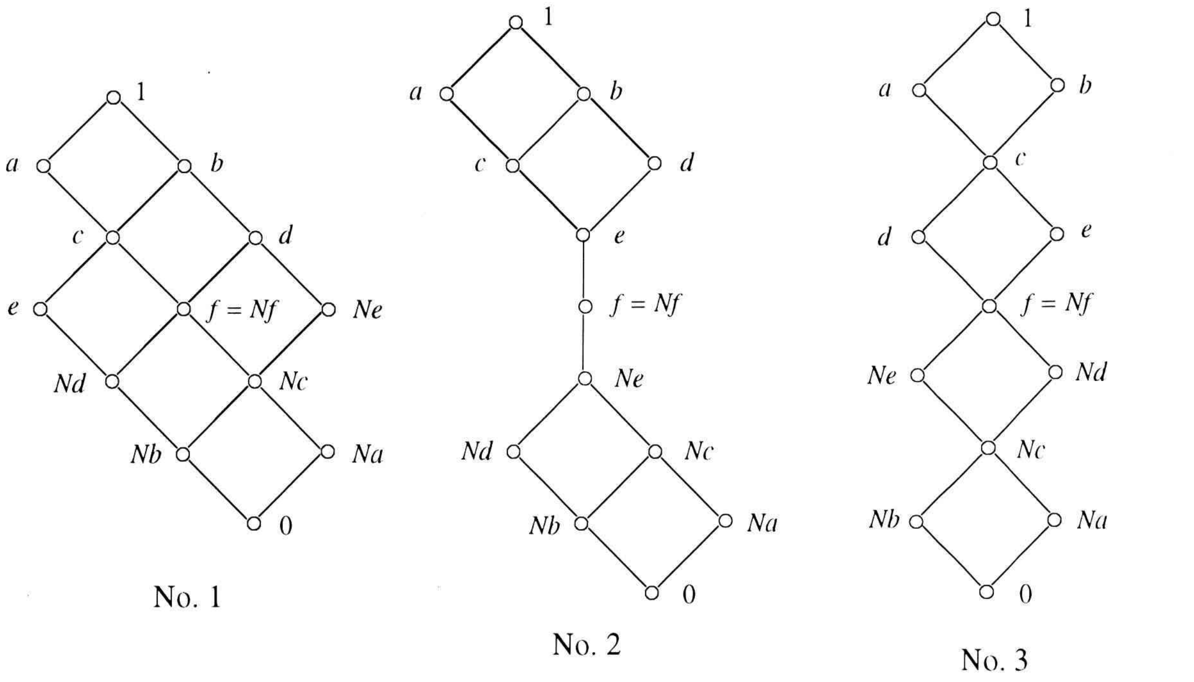
(7) 巽,小林,向殿,西岡：元の数$n = 12$の有限fuzzy代数の数，神奈川工科大学研究報告，B-14, pp.200-209, (1990).

(8) 巽,荒木,向殿,徳増：計算機による有限代数の生成と系の数について，神奈川工科大学研究報告，B-22, pp.117-126, (1998).

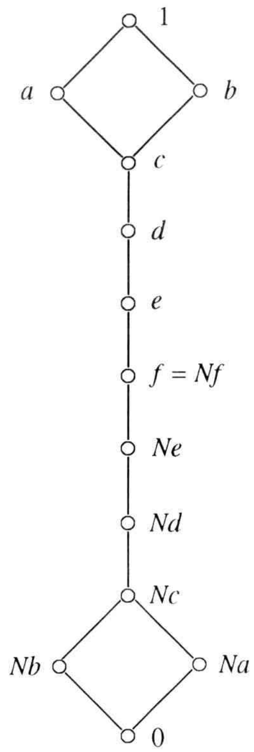
(9) 田村，田中：コンピュータによる有限束の数え上げ，数理科学，No.247, pp.51-55, (1984).

(10) 森岡：中心を持つクリーネ代数とドモルガン代数の諸性質に関する研究，日本ファジィ学会誌，Vol. 7, No. 3, pp.572-584, (1995).

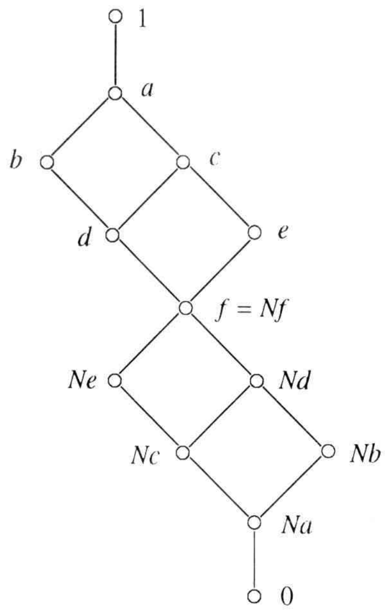
(11) 中島，森岡：不動核によるド・モルガン代数の特徴づけ，第12回ファジィシステムシンポジウム，TUE2-3, pp.127-130, (1996).



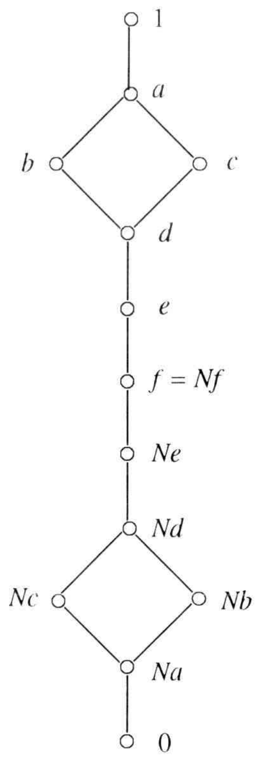
付図1　元の数ｎ＝１３の有限クリーネ代数のハッセ図（その１）



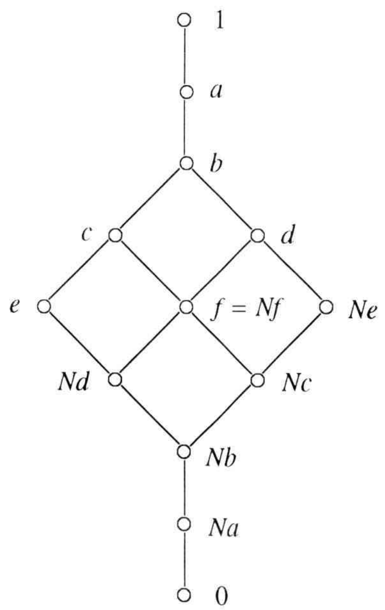
No. 4



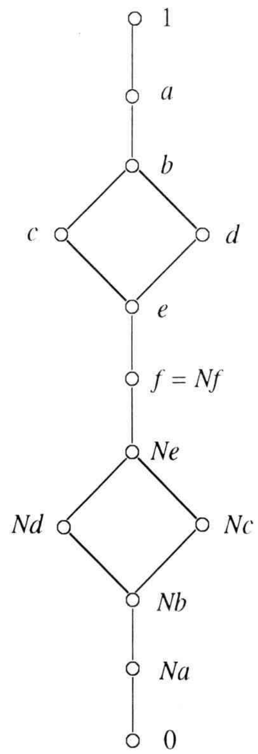
No. 5



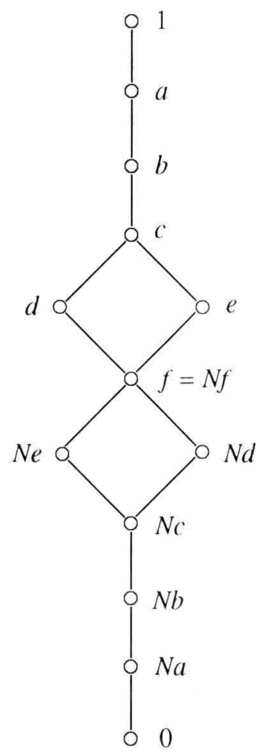
No. 6



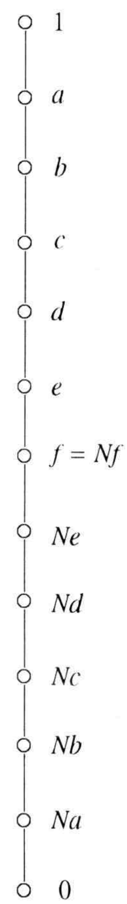
No. 7



No. 8



No. 9



No. 10

付図１ 元の数ｎ＝１３の有限クリーネ代数のハッセ図（その２）