Fuzzy論理文を用いて近似表現を行うニューラルネットワーク

巽　久行[1]，荒木智行[1]，向殿政男[2]，徳増眞司[1]

[1] 神奈川工科大学 工学部 情報工学科
[2] 明治大学 理工学部 情報科学科

A Neural Network to Realize an Approximate Representation by Using Fuzzy Logic Sentences

Hisayuki TATSUMI[1)], Tomoyuki ARAKI[1)], Masao MUKAIDONO[2)] and Shinji TOKUMASU[1)]

Abstract

A problem, which is to approximate fuzzy concepts with words or sentences, has been studied by many researchers. For the problem, we consider simply that fuzzy concepts are representable fuzzy logic sentences each of which is constructed of logic atoms and logic connectives. And, a solution is given in the case of logic system called Kleene fuzzy logic. In this paper, the solution is realized on the neural network model from the point of view of learning. The fundamental logic operations are formed as some hierarchical subnets, and their learnings by error back propagation are performed. Finally, any fuzzy logic sentence can be constructed by using learned subnets, and the approximating problem is reduced as a learning problem of our neural network model.

Keywords: Approximate representation, Fuzzy logic sentence, Kleene fuzzy logic, Hierarchical neural network, Error back propergation,

1．まえがき

概念は，ある対象領域X上のFuzzy集合で表現できるという単純な仮定の下に，与えられた任意の概念を，有限個のFuzzy集合を論理結合子によって組み合わせたFuzzy論理文と呼ばれる文を用いて近似表現を行うことが既に提案されている[1]。これは，X上の概念は無限個あり得るが，我々が良く利用し共通になっている有限個の概念（これを基本単語と呼ぶ）で表現するという考え方に基づいている。このように曖昧な情報を既に定義されている有限個の組み合わせで近似表現することは，計算機上で曖昧な情報を取り扱う上で必要であり，曖昧な情報に対する統一的処理や意味付けも簡単になる。

本報告は，Fuzzy論理文の近似とその学習をニューラルネットワークを用いて考察しているが，言語に基づくFuzzy概念を多値で扱うという考え方から，信号量として多値を扱えるニューラルネットワークを構成している。Fuzzy論理文を扱うには，クリーネ論理と呼ばれる論理体系で定義された論理演算と，近似計算を行うための数値演算が必要になる。そこで最初に，算術演算・論理演算等の計算の基本機能を実現する部分ネットを，多値階層的なフィードフォワード型ニューラルネットで構成し，学習則に誤差逆伝搬法を用いて学習させる。次に，これらの基本演算機能を組み合わせてFuzzy論理文の近似を行うニューラルネットワークを構成する。本研究ではニューラルネットワークとして階層型ニューラルネットワークを採用したが，その理由はボルツマン型ニューラルネットワークに比べて求める機能を段階的に構成することが可能であり，その部分学習が容易な点にある。

2．ファジィ論理文

議論対象領域の任意の概念はFuzzy集合で表現されるという仮定の下に，与えられた概念を有限個のFuzzy集合で構成する問題を考える。

Xを通常の2値集合で表された議論対象領域とし，$A_1, A_2, \cdots, A_n$（nは正整数）をX上の有限個のFuzzy集合として，これらを基本単語と呼ぶ。Fuzzy集合A_iのメンバーシップ関数$\lambda_{A_i} : X \to [0,1]$は，基本単語$A_i$の形式的表現であり，以降，X上のFuzzy集合$A_i$とメンバーシップ関数$\lambda_{A_i}$を同一視する。このときFuzzy論理文は，基本単語から次のように再帰的に定義される。

【定義1】

(1) 基本単語$A_1, A_2, \cdots, A_n$および定数0,1は，Fuzzy論理文である。
(2) FがFuzzy論理文ならば，$\sim F$もFuzzy論理文である。
(3) F_i，F_jがFuzzy論理文ならば，$F_i \vee F_j$および$F_i \bullet F_j$もFuzzy論理文である。
(4) (1)～(3)で与えられるものだけがFuzzy論理文である。

（定義終）□

定義1において，論理結合子$\vee$(OR)，$\bullet$(AND)および

~(NOT)が,

$$F_i \vee F_j = \max\{F_i, F_j\},\quad F_i \bullet F_j = \min\{F_i, F_j\}$$
$$\sim F = 1 - F$$

で定義されるとき，Fuzzy論理文はクリーネのファジィ論理における論理式となる。本報告では，以下，Fuzzy論理文はクリーネのファジィ論理上で定義されているものとする。

【定義2】 基本単語からなる $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とその否定 $\sim A_1, \sim A_2, \cdots, \sim A_n$（基本単語およびその否定はリテラルと呼ばれる）および定数0,1が，大きさのある順番を保持している$[0,1]^n$上の部分集合

$$0 \le A_{i,1} \le \cdots \le A_{i,n} \le 1/2 \le \sim A_{i,n} \le \cdots \le \sim A_{i,1} \le 1$$

を（i番目の）セル空間という。ここで$A_{i,j}$は，A_jまたは$\sim A_j$（但し$j = 1, \cdots, n$）を表す。セル空間の数は，最大で$2^n \times n!$個存在する。 （定義終）□

定義2において，セル空間は1/2を境としてリテラルの真偽および順序が逆になっているので，セル空間は1/2より右半分（もしくは左半分）のみで一意に表現することができる。以下，セル空間の数をmとし，i番目のセル空間C_i（但し$i = 1, \cdots, m$， $m \le 2^n \times n!$）を便宜上,

$$C_i:\ [0, A_{i,1}, \cdots, A_{i,n}, 1/2, \sim A_{i,n}, \cdots, \sim A_{i,1}, 1]$$

で記述することにする。

クリーネのファジィ論理上では，X上のあるFuzzy集合FがFuzzy論理文で表現できるための必要十分条件は，次のように与えられる[2]。

【定理1】

(1) Fuzzy集合Fの値は，各セル空間C_iで$A_j, \sim A_j, 0, 1$の，いずれかに等しい（但し，$j = 1, \cdots, n$）。

(2) Fの値は，各セル空間の境界において1価である。

（証明略）□

定理1の条件(2)より，基本単語A_jが連続関数ならば，各セル空間C_iの境界でFは連続でなければならないことが簡単に導かれる。

定理1の2条件を満たすFuzzy集合Fが与えられたとき，Fを表現するFuzzy論理文は次のように構成できることが知られている[3]。

【定理2】 各セル空間C_i（但し$i = 1, \cdots, m$）において，Fのとる値を$A_{i,j}$（但し$A_{i,j}$は肯定または否定のすべてのリテラルを表すものとするので，$j = 1, \cdots, 2n$）とする。定義2に示されたセル空間の定義式において，リテラル$A_{i,j}$を含めて，これより右に配列されているリテラルのすべての論理積•(AND)からなる積項をα_iとすると，Fを表現するFuzzy論理文は,

$$F = \bigvee_i \alpha_i$$

で表現できる。 （証明略）□

【例1】 図1に，X上のある基本単語A_1, A_2, A_3がなすセル空間の例を示す。例えば，議論対象領域Xとして年齢をとった場合，A_1は**young**(若い)，A_2は**middle**(中年)，A_3は**old**(年寄り)という基本単語に対応している。図1では，以下に示す11個のセル空間

$$
\begin{array}{ll}
C_1: & [0, A_3, \sim A_1, A_2, 1/2, \sim A_2, A_1, \sim A_3, 1] \\
C_2: & [0, A_3, \sim A_1, \sim A_2, 1/2, A_2, A_1, \sim A_3, 1] \\
C_3: & [0, A_3, \sim A_2, \sim A_1, 1/2, A_1, A_2, \sim A_3, 1] \\
C_4: & [0, A_3, \sim A_2, A_1, 1/2, \sim A_1, A_2, \sim A_3, 1] \\
C_5: & [0, \sim A_2, A_3, A_1, 1/2, \sim A_1, \sim A_3, A_2, 1] \quad \cdots(1) \\
C_6: & [0, \sim A_2, A_1, A_3, 1/2, \sim A_3, \sim A_1, A_2, 1] \\
C_7: & [0, A_1, \sim A_2, A_3, 1/2, \sim A_3, A_2, \sim A_1, 1] \\
C_8: & [0, A_1, \sim A_2, \sim A_3, 1/2, A_3, A_2, \sim A_1, 1] \\
C_9: & [0, A_1, \sim A_3, \sim A_2, 1/2, A_2, A_3, \sim A_1, 1] \\
C_{10}: & [0, A_1, \sim A_3, A_2, 1/2, \sim A_2, A_3, \sim A_1, 1] \\
C_{11}: & [0, A_1, A_2, \sim A_3, 1/2, A_3, \sim A_2, \sim A_1, 1]
\end{array}
$$

が存在している。定理1を満たす連続関数となるFuzzy集合Fとして，セル空間C_iにおいてFがとる値$A_{i,j}$（但し$i = 1, \cdots, 11$）を順に列挙した表記

$$F(\sim A_1, \sim A_1, \sim A_1, \sim A_1, \sim A_1, \sim A_1, A_2, A_2, A_2, A_2, \sim A_3) \quad \cdots(2)$$

で求めるFuzzy論理文を記すことにすると，各セル空間における積項は,

$$\alpha_1 = \sim A_1 \cdot A_2 \cdot \sim A_2 \cdot A_1 \cdot \sim A_3,$$
$$\alpha_2 = \sim A_1 \cdot \sim A_2 \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot \sim A_3,$$
$$\alpha_3 = \sim A_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \sim A_3,\quad \alpha_4 = \sim A_1 \cdot A_2 \cdot \sim A_3,$$
$$\alpha_5 = \sim A_1 \cdot \sim A_3 \cdot A_2,\quad \alpha_6 = \sim A_1 \cdot A_2,$$
$$\alpha_7 = A_2 \cdot \sim A_1,\quad \alpha_8 = A_2 \cdot \sim A_1,$$

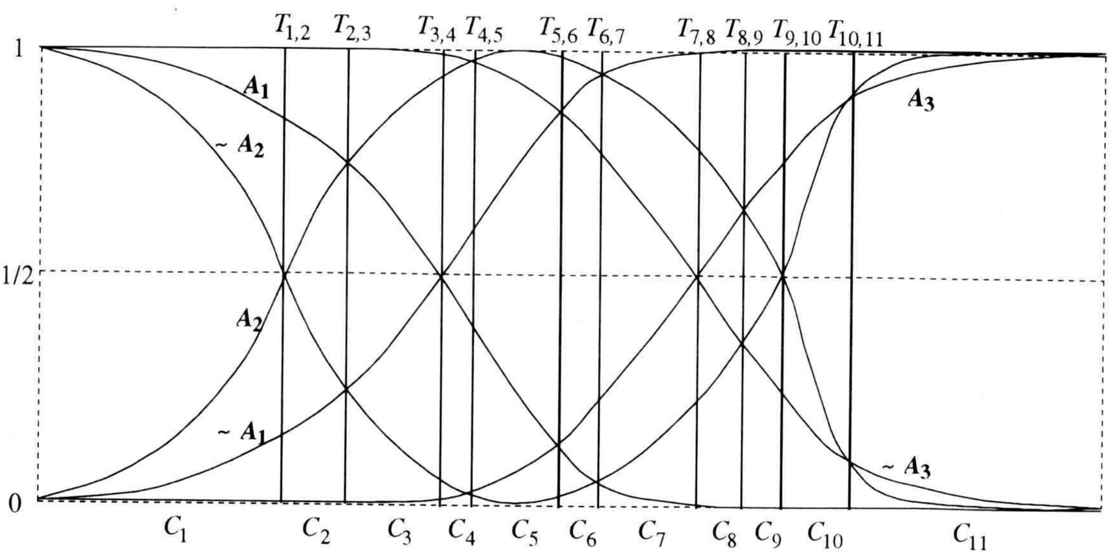


図1 セル空間の例

$\alpha_9 = A_2 \cdot A_3 \cdot \sim A_1$，$\alpha_{10} = A_2 \cdot \sim A_2 \cdot A_3 \cdot \sim A_1$，
$\alpha_{11} = \sim A_3 \cdot A_3 \cdot \sim A_2 \cdot \sim A_1$，
となり，Fuzzy論理文$F = \vee_i \alpha_i$を簡単化すると，

$$F = \sim A_1 \bullet (A_2 \vee \sim A_3)$$

が得られる。すなわちFを表すFuzzy論理文は，「中年だが若者ではない，または，老人ではないが若者でもない」というFuzzy集合を表現している。　(例終) □

3．ファジィ論理文の近似表現

Fuzzy論理文は，有限個の基本単語の組み合わせで，かつ各セル空間でどれかの基本単語の値と一致しなければならないが，任意の概念がこの基本単語の軌跡と必ずしも一致するとは限らないので，両者間で近似をとる必要がある。

与えられた近似すべき対象となるFuzzy集合をF'とし，あるセル空間$C_i\ (i = 1, \cdots, m)$において，F'のとる値をA'_iとする。セル空間C_iにおける各リテラル$A_{i,j}\ (j = 1, \cdots, 2n)$と$A'_i$との近似度の評価は幾通りか考えられるが，ここでは1から境界におけるメンバーシップ関数の値の差の平均値を減じた値，即ち

$$a_{i,j} = 1 - 1/2\{|\mu_{A_{i,j}}(d_i - 1) - \mu_{A'_i}(d_i - 1)| + |\mu_{A_{i,j}}(d_i) - \mu_{A'_i}(d_i)|\} \qquad \cdots(3)$$

で定義する（ここで，$d_i - 1$およびd_iは議論対象領域X上におけるセル空間C_iの境界であり，また，C_iにおける各リテラル$A_{i,j}\ (j = 1, \cdots, 2n)$の大きさの順は，以降

$$0 \le A_{i,2n} \le \cdots \le A_{i,n+1} \le 1/2 \le A_{i,n} \le \cdots \le A_{i,1} \le 1$$

とする）。このとき，A'_iに対するセル空間C_iの各リテラル$A_{i,j}$の近似度は，ベクトル

$$(a_{i,1}, \cdots, a_{i,n}, a_{i,n+1}, \cdots, a_{i,2n}) \qquad \cdots(4)$$

で与えられる。次にA'_iとセル空間C_iのリテラル$A_{i,j}$との間で，連続な基本単語によってできる定理1の条件(1)および(2)を満たすFuzzy論理文を

$$F(A_{1,j_1}, A_{2,j_2}, \cdots, A_{m,j_m})$$

とすると，Fの評価基準も幾通りか考えられるが，ここでは上に述べた各セル空間における近似度$a_{i,j}$の最小値

$$\min\left(a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \cdots, a_{m,j_m}\right)$$

を採用する。

以下に近似計算の都合上，近似度はベクトル表現ではなく，$2n \times 2n$ 行列$\mathbf{C_i}$（これを近似行列と呼ぶ）を用いて次のように表現する。

$$\mathbf{C_i} = |c_{pq}|$$

$$\text{但し，} c_{pq} = \begin{cases} a_{i,j} \mid j = 1, \cdots, 2n & (\text{where, } p = q) \\ 0 & (\text{where, } p \ne q) \end{cases}$$

とする。即ち，

$$\mathbf{C_i} = \begin{array}{c|cccccc|} & A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,2n} \\ A_{i,1} & a_{i,1} & & & & & \\ A_{i,2} & & a_{i,2} & & & \mathbf{0} & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ A_{i,j} & & & & a_{i,j} & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ A_{i,2n} & & & & & & a_{i,2n} \end{array}$$

である。

また，セル空間C_iとC_{i+1}との間におけるリテラル$A_{i,j}$の接続関係も，$2n \times 2n$ 行列$\mathbf{T_{i,i+1}}$（これを接続行列と呼ぶ）で表現する。この場合，次のように2通りに場合分けして考える。

(1) セル空間の境界で，あるリテラル$A_{i,j}$とその否定$\sim A_{i,j}$とが交差している場合。

(2) ある2つ以上のリテラル$A_{i,j}$，$A_{i,k}$（$A_{i,j}$，$A_{i,k}$はそれぞれ異なる基本単語）が交差している場合。

上の場合分けにおいて，(1)の場合，$A_{i,j}$がs，$\sim A_{i,j}$がt行（列）にあるとすると，

$$\mathbf{T_{i,i+1}} = \begin{array}{c|ccccccc|} & A_{i+1,1} & \cdots & A_{i+1,s} & A_{i+1,t} & \cdots & A_{i+1,2n} \\ A_{i,1} & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ A_{i,s} & & & 1 & 1 & & \\ A_{i,t} & & & 1 & 1 & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ A_{i,2n} & & & & & & 1 \end{array}$$

となる。また(2)の場合，$A_{i,j}$がs，$A_{i,k}$がt行（列）に，$\sim A_{i,j}$がu，$\sim A_{i,k}$がv行（列）にあるとすると，

$$\mathbf{T_{i,i+1}} = \begin{array}{c|ccccccccc|} & A_{i+1,1} & \cdots & A_{i+1,s} & A_{i+1,t} & \cdots & A_{i+1,u} & A_{i+1,v} & \cdots & A_{i+1,2n} \\ A_{i,1} & 1 & & & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & \\ A_{i,s} & & & 1 & 1 & & & \mathbf{0} & & \\ A_{i,t} & & & 1 & 1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \\ A_{i,u} & & & & & & 1 & 1 & & \\ A_{i,v} & & & \mathbf{0} & & & 1 & 1 & & \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \\ A_{i,2n} & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

となる。

以上より，$2n \times 2n$ 行列$\mathbf{A_i}\ (i = 1, \cdots, m)$を，セル空間$C_1$からセル空間$C_i$までの近似計算結果とすると，解行列$\mathbf{A_{i+1}}\ (i = 0, 1, \cdots, m-1)$は，近似行列$\mathbf{C_i}$と接続行列$\mathbf{T_{i,i+1}}$を用いて次のように求めることができる。

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{C_1}$$
$$\mathbf{A_{i+1}} = \mathbf{A_i} \circ \mathbf{T_{i,i+1}} \circ \mathbf{C_{i+1}} \qquad \cdots(5)$$

但し，行列の掛け算$\mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$は，

$$r_{ij} = \bigvee_{k=1}^{2n} (p_{ik} \bullet q_{kj}) \qquad \cdots(6)$$

で定義する（但し論理演算•はAND，∨はORである）。

解行列$\mathbf{A_i}$の要素a_{st}は，最初のセル空間C_1で上からs番目のリテラルを選択し，最後のセル空間C_iで上からt番目のリテラルを選択したときのFuzzy論理文の近似度を意味している。従って，最終的な解は$\mathbf{A_m}$の要素の最大値をとり，それが要素a_{st}ならば，C_1でs番目で始まり，C_mでt番目で終わるリテラルの軌跡を求めればよく，その近似度はa_{st}の値となる。求めるFuzzy論理文の解軌跡は，セル空間C_mでt番のリテラルを選択したとき，セル空間C_{m-1}から接続される連続なリテラルの中で，最も近似度の高いものを選べばよい。この操作を，順次セル空間C_1に向かって行えば，最終的にセル空間C_1のs番目のリテラルに接続されて，求めるFuzzy論理文を構成することができる。

【例2】 図1に示されたセル空間上に，任意のFuzzy集合F'が与えられた例を，図2に示す（太線がF'である）。セル空間C_i $(i=1,\cdots,11)$ における各リテラル$\mathrm{A}_{i,j}$ $(j=1,\cdots,6)$ とF'のとる値A'_iとの近似度の評価を式(3)で評価すると，セル空間C_iの各リテラル$\mathrm{A}_{i,j}$の近似度は，式(4)のベクトル表記を用いて，次のように得られる。

$$
\begin{array}{r}
C_1: \\ C_2: \\ C_3: \\ C_4: \\ C_5: \\ C_6: \\ C_7: \\ C_8: \\ C_9: \\ C_{10}: \\ C_{11}:
\end{array}
\begin{pmatrix}
0.00 & 0.07 & 0.25 & 0.75 & 0.93 & 1.00 \\
0.05 & 0.25 & 0.43 & 0.68 & 0.85 & 0.95 \\
0.16 & 0.30 & 0.52 & 0.77 & 0.85 & 0.86 \\
0.32 & 0.34 & 0.75 & 0.85 & 0.74 & 0.72 \\
0.58 & 0.64 & 0.82 & 0.73 & 0.54 & 0.48 \\
0.79 & 0.85 & 0.92 & 0.43 & 0.35 & 0.29 \\
0.93 & 0.83 & 0.75 & 0.45 & 0.22 & 0.12 \\
0.95 & 0.77 & 0.62 & 0.48 & 0.33 & 0.05 \\
0.85 & 0.85 & 0.73 & 0.58 & 0.45 & 0.15 \\
0.70 & 0.83 & 0.70 & 0.60 & 0.47 & 0.30 \\
0.30 & 0.35 & 0.35 & 0.75 & 0.75 & 0.70
\end{pmatrix}
$$

この結果より，直ちに近似行列$\mathbf{C}_i$が求まる。また接続行列$\mathbf{T}_{i,i+1}$の例として図1または図2より，セル空間C_9とC_{10}間の接続行列$\mathbf{T}_{9,10}$，およびセル空間C_{10}とC_{11}間の接続行列$\mathbf{T}_{10,11}$を求めると，

$$
\mathbf{T}_{9,10} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix},\quad
\mathbf{T}_{10,11} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}
$$

となる（$\mathbf{T}_{1,2}\sim\mathbf{T}_{8,9}$は省略する）。よって式(5)より，式(6)に示す行列の掛け算の演算定義に注意して解行列$\mathbf{A}_i$ $(i=1,\cdots,11)$を求めると，次のようになる。

$$
\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix}
0.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.07 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.93 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00
\end{vmatrix}
$$

（$\mathbf{A}_2\sim\mathbf{A}_8$は省略する）

$$
\mathbf{A}_9 = \begin{vmatrix}
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0 \\
0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.05 \\
0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.05 \\
0.68 & 0.68 & 0.68 & 0.48 & 0.45 & 0.05 \\
0.75 & 0.75 & 0.73 & 0.48 & 0.45 & 0.05 \\
0 & 0.43 & 0.43 & 0.43 & 0.43 & 0.05
\end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_{10} = \begin{vmatrix}
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0 \\
0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.05 \\
0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.05 \\
0.68 & 0.68 & 0.68 & 0.60 & 0.45 & 0.05 \\
0.70 & 0.75 & 0.70 & 0.60 & 0.45 & 0.05 \\
0 & 0.43 & 0.43 & 0.43 & 0.43 & 0.05
\end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix}
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0 \\
0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.05 \\
0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.05 \\
0.30 & 0.35 & 0.35 & 0.60 & 0.60 & 0.05 \\
0.30 & 0.35 & 0.35 & 0.60 & 0.60 & 0.05 \\
0 & 0.35 & 0.35 & 0.43 & 0.43 & 0.05
\end{vmatrix}
$$

最終的な解行列$\mathbf{A}_{11}$の要素の中で最大値を求めると，値が0.60の，4個の要素$a_{4,4}, a_{4,5}, a_{5,4}, a_{5,5}$となる。
よって解として$a_{5,4}$をとると，これはセル空間C_1で5番目のリテラルで始まり，セル空間C_{11}で4番目のリテラルで終わる軌跡が，最も近似されたFuzzy論理文であることを表す。これより求めるFuzzy論理文は，セル空間C_{11}

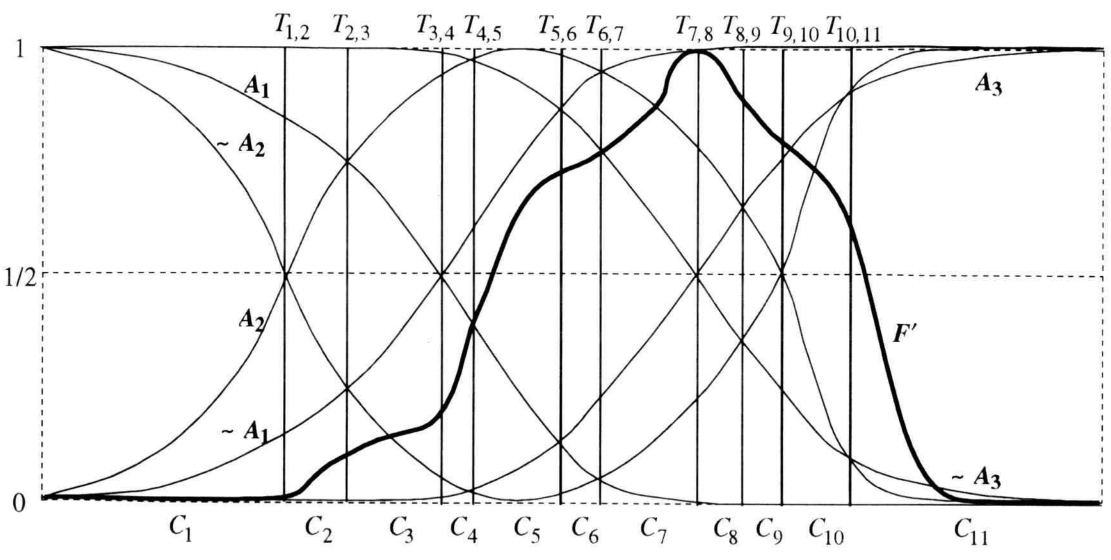


図2 任意の**Fuzzy**集合F'の例

からC_1に向かって連続なリテラルを順次決定していけばよい。即ち，セル空間C_{11}で4番目のリテラルを採ったとき，接続行列$\mathbf{T_{10,11}}$の4列上で1となる（即ち接続されている）のは4行と5行であることから，セル空間C_{10}の4番目および5番目のリテラルが連続している。よって，解行列$\mathbf{A_{10}}$の要素$a_{5,4}$と$a_{5,5}$の値を比べて大きい方，即ち値0.60となる要素$a_{5,4}$をとれば，セル空間C_1で5番目のリテラルで始まり，セル空間C_{10}で4番目のリテラルで終わる軌跡を得たことになり，求めるセル空間C_{10}のリテラルは4番目となる。更に，セル空間C_{10}の4番目のリテラルに連続なセル空間C_9のリテラルを求めると，接続行列$\mathbf{T_{9,10}}$の4列上で1となるのは3行と4行であることから，セル空間C_9の3番目および4番目のリテラルが連続している。よって，解行列$\mathbf{A_9}$の要素$a_{5,3}$と$a_{5,4}$の値を比べて大きい方，即ち値0.73となる$a_{5,3}$の要素をとれば，セル空間C_1で5番目のリテラルで始まり，セル空間C_9で3番目のリテラルで終わる軌跡を得たことになり，求めるセル空間C_9のリテラルは3番目となる。この作業をセル空間C_1に向かって行うと，定理1を満たす連続関数となるFuzzy論理文Fとして，各セル空間C_iにおいてFが上から何番目のリテラルを順にとるかを列挙した表記

$$F(5,5,4,3,3,2,2,2,3,4,4) \qquad \cdots(7)$$

を得る。この式(7)のFの中身をリテラルに書き換えたものが，式(2)である。

また，解行列$\mathbf{A_{11}}$の要素の中で最大となる他の3つの要素$a_{4,4}, a_{4,5}, a_{5,5}$のFuzzy論理文$F$は，それぞれ

$$F(4,4,4,3,3,2,2,2,3,4,4)$$
$$F(4,4,4,3,3,2,2,2,3,4,5)$$
$$F(5,5,4,3,3,2,2,2,3,4,5)$$

となる。　（例終）□

4．近似表現を実現するニューラルネット

本報告は，Fuzzy論理文の近似とその学習をニューラルネットワークを用いて考察しているが，言語に基づくFuzzy概念を多値で扱うという考え方から，信号量として多値を扱えるニューラルネットワークを構成している。第2節および第3節より，Fuzzy論理文を扱うにはクリーネ論理体系を実現する論理演算と，近似計算を行う数値演算が必要になる。そこで最初に，算術演算・論理演算等の計算の基本機能を実現する部分ネットを，多値階層的なフィードフォワード型ニューラルネットで構成し，学習則に誤差逆伝搬法を用いる。本研究で階層型ニューラルネットを採用した理由は，ボルツマン型のニューラルネットに比べて段階的に構成し学習することが容易な点にある。

図3に示すm層の階層型フィードフォワード型ニューラルネットワークにおいて，第k層の第jユニットへの入力の総和をi_j^k，出力をo_j^kとし，このユニットの入出力関数をf_j^kとする。また，第$k-1$層の第iユニットから第k層のjユニットへの結合の重みを$w_{i,j}^{k-1,k}$とすると，

$$o_j^k = f_j^k(i_j^k),\ i_j^k = \sum_i w_{i,j}^{k-1,k} \cdot o_i^{k-1} \qquad \cdots(8)$$

となる。式8において，第k層の第jユニットのしきい値θ_j^kは与えられていないが，これは常に1をとるユニットを第$k-1$層に用意して，そこから第k層の第jユニットに重み$-\theta_j^k$の結合を考えることと同じである。よって，しきい値の学習も結合の重みの学習として実現する。すべての結合の重みの学習は誤差逆伝搬法によるが，誤差逆伝搬法による結合の重みの修正量$\Delta w_{i,j}^{k-1,k}$として，次式を用いた。

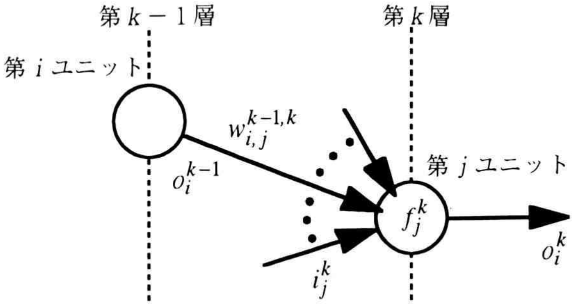


図3　階層型フィードフォワード型ニューラルネット

$$\Delta w_{i,j}^{k-1,k}(t+1) = -\varepsilon \cdot d_j^k \cdot o_i^{k-1} + \alpha \cdot \Delta w_{i,j}^{k-1,k}(t)$$

ここで，εは1回の修正の大きさを決めるパラメータ，d_j^kは結合$w_{i,j}^{k-1,k}$の修正に使う学習信号，αは正の定数，tは修正の回数を表す。本報告では，ユニットの入出力関数f_j^kは，6種類の入出力関数のうちのどれかを取り得るように設計されている。入出力関数が異なる6種類のユニットに対する各々の入出力関数$f_{(1)} \sim f_{(6)}$を，以下に示す。

$$f_{(1)}(x) = x,\ f_{(2)}(x) = x^2,\ f_{(3)}(x) = 1/x,$$
$$f_{(4)}(x) = \begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases},\ f_{(5)}(x) = \begin{cases} 0 & (x>0) \\ 1 & (x \le 0) \end{cases},$$
$$f_{(6)}(x) = \begin{cases} x & (x>0) \\ 1 & (x \le 0) \end{cases}$$

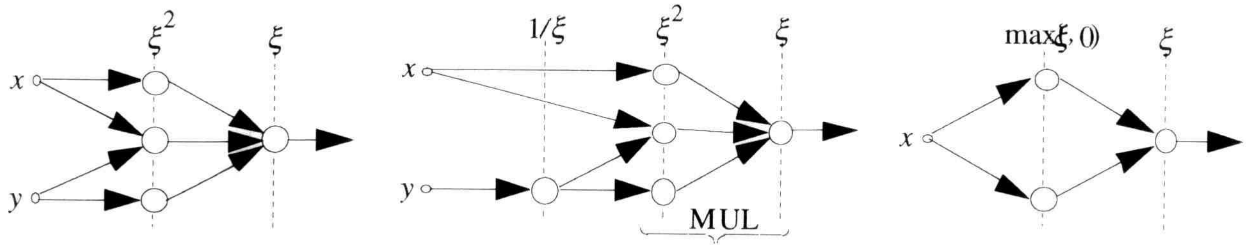
上式において，$f_{(1)}$は恒等関数（ξと略記），$f_{(2)}$は2乗関数（ξ^2と略記），$f_{(3)}$は逆関数（$1/\xi$と略記）を意味し，また，$f_{(4)}$はしきい関数（$u(\xi)$と略記），$f_{(5)}$は逆しきい関数（$1-u(\xi)$と略記），$f_{(6)}$は区分線形関数（$\max(\xi,0)$と略記）を，それぞれ意味する。

ユニットの入出力関数は，階層型フィードフォワード型ニューラルネットワークの計算能力を決定することができる。実際に，3層および4層のネットワークについて，次のような完全性が成立することが知られている。

［性質1］各ユニットの入出力関数がしきい関数である3層のネットワークでは，中間層のユニットを必要な数だけ使えば，任意の2値論理関数を実現できる。

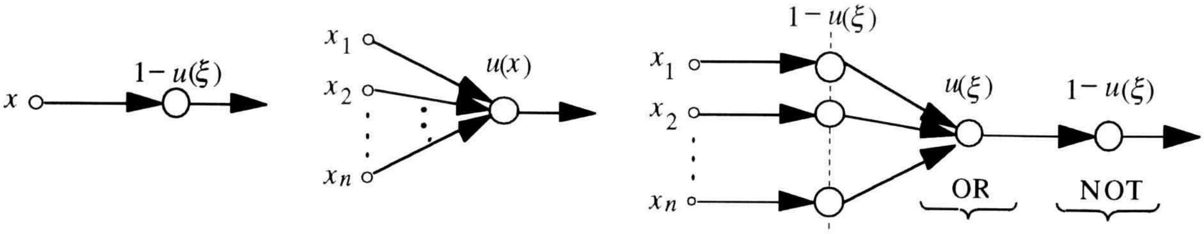
［性質2］各ユニットの入出力関数がシグモイド関数である4層のネットワークでは，中間層のユニットを必要な数だけ使えば，任意の連続関数$f:[0,1]^n \to [0,1]^m$を近似できる。

性質1は2値論理関数の計算に関する完全性，性質2は連続シュミレータとしての完全性を示す。上記の6種類の入出力関数を用いて，無限多値論理関数，任意の連続関数の近似，および一般の計算可能な算術演算等を実現できるが，これらの計算をすべて行う入出力関数の組み合わせについては検討していない。本報告では，必要と思われる計算機能として，算術演算3種類｛乗算(MUL)，除算(DIV)，絶対値(ABS)｝，2値論理演算3種類｛否定(NOT)，和(OR)，積(AND)｝，および大小比較



(a) MUL (multiplication)　　(b) DIV(division)　　(c) ABS(absolute value)

図４　算術演算の部分ネット



(a) NOT (negation)　　(b) OR(sum)　　(c) AND(product)

図５　論理演算の部分ネット

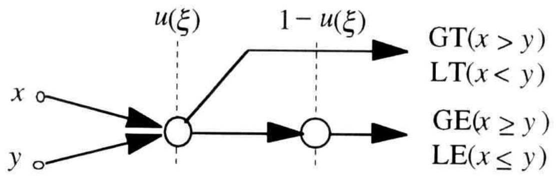


図６　大小比較の部分ネット

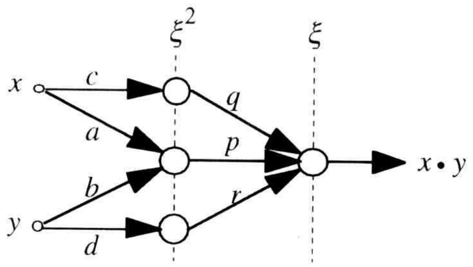


図７　MULの実現

４種類｛GT，LT，GE，LE｝を構成した。これらの基本機能をなす階層型部分ネットを，図４，図５および図６に示す。図５に示した２値論理演算ネットワークについては，入出力関数を変えれば，有限および無限多値論理も実現し得る。否定を$\sim x = 1-x$で定義したクリーネのファジィ論理とした場合，否定（NOT）ネットを，$f_{(5)}(x)$ではなく$f_{(6)}(1-x)$で構成すればよい。また，論理積（AND）ネットは，

ドモルガン律：$\sim(\sim x_1 \vee \cdots \vee \sim x_n) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$

より，否定（NOT）ネットおよび論理和（OR）ネットで構成される。図６に示した大小比較ネットワークにおいて，GT（$x>y$）とLT（$x<y$），およびGE（$x\geq y$）とLE（$x \leq y$）の区別は，学習された結合の重みにより決定される。更に，EQ（$x=y$）およびNE（$x \neq y$）は，大小比較と論理演算ネットワークを用いて，以下のように実現できる。

$\mathrm{EQ}(x=y) \Leftrightarrow \mathrm{GT} \wedge \mathrm{LT}$（または$\mathrm{GE} \wedge \mathrm{LE}$），

$\mathrm{NE}(x \neq y) \Leftrightarrow \sim\mathrm{EQ}$。

あいまいな情報処理を目的とするニューラルネットでは，雑音に強く，また，ユニット間の結合パラメータには多様性を持たせた方がよい。本報告で作成した計算の基本機能をなす部分ネットのユニット間における結合の重みは，特に一意に固定されるものではない点が特徴である。即ち，設定されたネットワークにおける結合の重み，言い換えれば扱える多値信号量には無限の組み合わせが可能である。例として，図７に示す乗算（MUL）部分ネットを用いて，結合の重みの学習を説明する。

同図において，伝達線上に記された(a,b,c,d,p,q,r)は与えられたネットワークに対する結合の重み$w_{i,j}^{k-1,k}$の組であり，点線は同一層のユニットで共通の入出力関数を表す。ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{MUL}(x,y) &= f_1(q\cdot f_2(cx) + p\cdot f_2(ax+by) + r\cdot f_2(dy)) \\ &= f_1(q\cdot(cx)^2 + p\cdot(ax+by)^2 + r\cdot(dy)^2) \\ &= (a^2p + c^2q)x^2 + 2abpxy + (b^2p+d^2r)y^2\end{aligned}$$

より，

$$a^2p + c^2q = b^2p + d^2r = 0,\ 2abp = 1 \quad \cdots(9)$$

であれば，このネットワークは目的の乗算（MUL）を実現できる。これより，どのような結合の重みの組み合わせでも式(9)を満たすようなものであれば乗算（MUL）としてよく，このことからネットワークには多様性があると考えられる。式(9)において，

$$(a,b,c,d,p,q,r) = (1,1,1,1,1/2,-1/2,-1/2)$$

は普通考える単純な値であるが，乗算（MUL）ネットのシミュレーション結果からは，多少の誤差はあるものの，学習は設定した初期値に依存して，式(9)を満たす適当な１つの解にうまく収束し，目的の基本機能が動作することが確認できた。さらに多くのシミュレーション実験の結果，他の基本機能を実現する部分ネットすべての学習に対して，ローカルミニマムの問題はほとんど生じなかった。シミュレーション実験は，誤差逆伝搬法による結合の重みの修正量$\Delta w_{i,j}^{k-1,k}$に関して，式中の定数を$\varepsilon = 1\times 10^{-5}$，$\alpha = 0.9$として学習回数を500回行った。

また，算術演算および論理演算ネットワークを用いて，図８に示すような最大（MAX）および最小（MIN）ネットワークが構成される。同図において，２重丸印は既に作成された基本機能部分ネットワークを表す。但し，最大（MAX）と最小（MIN）の区別は，学習された結合の重みの正負をすべて逆にすることで決定される。論理積（AND）および論理和（OR）を，クリーネのファジィ論理演算として，

$$x_1 \vee \cdots \vee x_n = \max(x_1, \cdots, x_n),$$

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = \min(x_1, \cdots, x_n)$$

で定義する場合，この最大（MAX）および最小（MIN）ネットを利用すればよい。

以上で作成された基本機能部分ネットから，第３節に説明したFuzzy論理文の近似を行うニューラルネットワークを構成することができる。近似計算が実現可能なことは，必要な基本機能部分ネットが構成可能なことより明らかであるが，近似を行う全ネットワークを本報告に挙げることは無理であるので，式(3)を実現するニューラルネットワークのみを図９に示す。第３節中のその他の部分，例えば式(5)および式(6)や，さらにはFuzzy論理文の解軌跡を求める再起的なセル空間の後退決定部分も，同様にニューラルネットワークで実現できる。

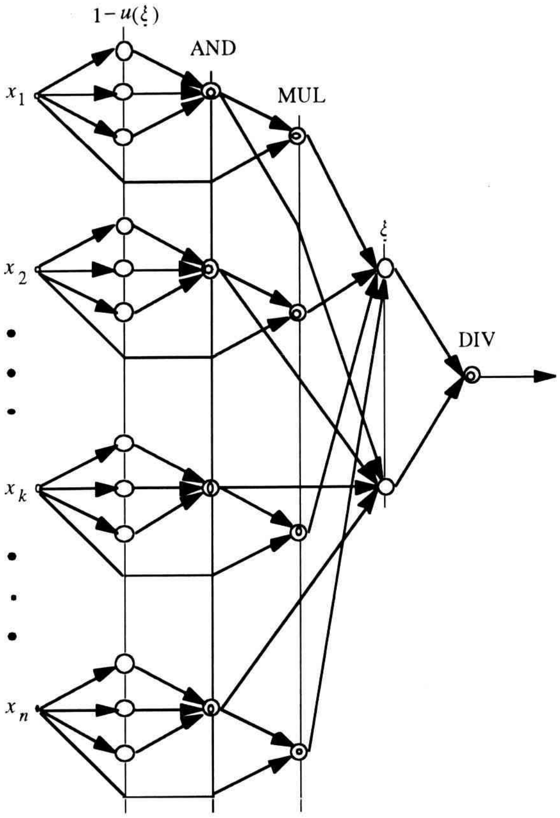


図８　MAX/MINの部分ネット

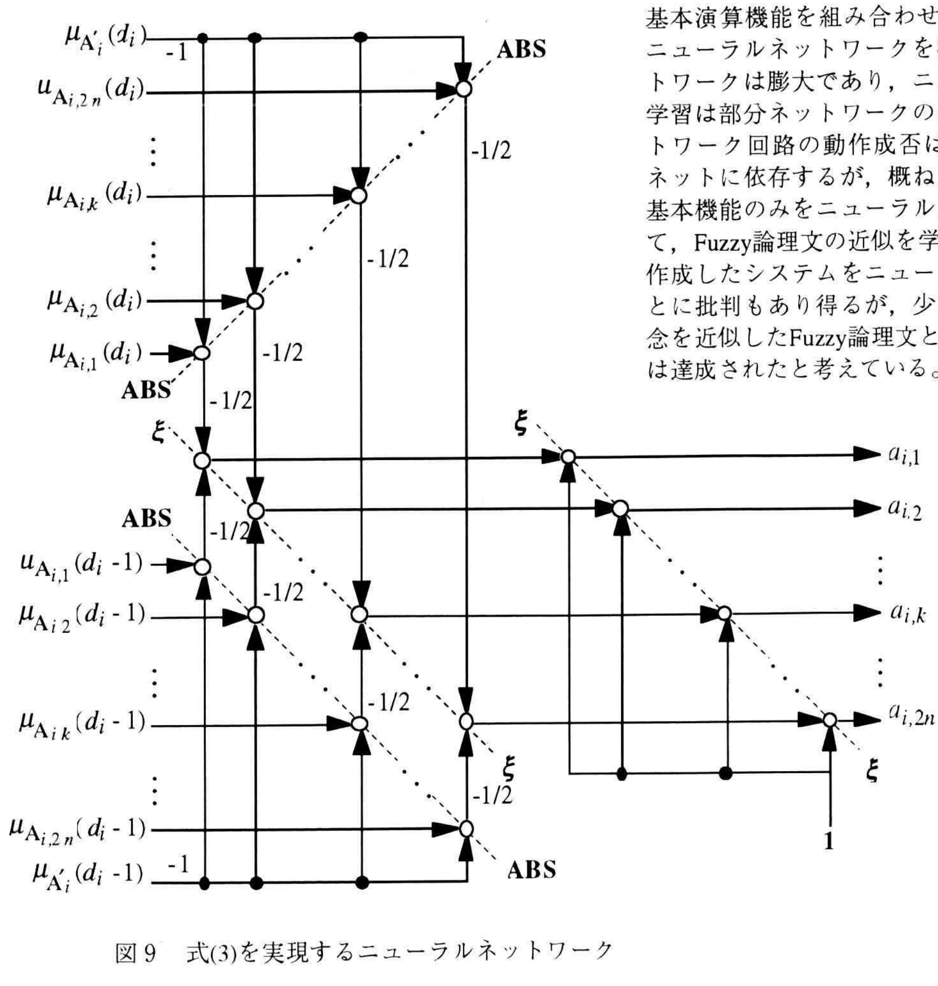


図９　式(3)を実現するニューラルネットワーク

5．あとがき

本報告は，Fuzzy論理文の近似とその学習をニューラルネットワークを用いて考察した。Fuzzy論理文を扱うにはクリーネ論理演算が，近似計算を行うためには数値演算が必要になるので，このための算術演算・論理演算等の計算の基本機能を実現する部分ネットを多値階層的なフィードフォワード型ニューラルネットで構成し，学習則に誤差逆伝搬法を用いて学習させた。次に，これらの基本演算機能を組み合わせてFuzzy論理文の近似を行うニューラルネットワークを構成した。全行程を行うネットワークは膨大であり，ニューラルネットワークによる学習は部分ネットワークのみに限定されており，全ネットワーク回路の動作成否は計算の基本機能をなす部分ネットに依存するが，概ね良好に動作している。計算の基本機能のみをニューラルネットワーク学習で実現させて，Fuzzy論理文の近似を学習に直接反映させないので，作成したシステムをニューラルネットワークと称することに批判もあり得るが，少なくとも与えられた任意の概念を近似したFuzzy論理文として出力してくれるので目的は達成されたと考えている。

参考文献

[1] Mukaidono, M., "A necessary and sufficient condition for fuzzy logic functions", IEEE Proc. 9th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp.159-166, 1979.
[2] Mukaidono, M., "Towards an Approximate Representation of Concepts with Fuzzy Logic Sentences", Int. Conf. on Policy Analysis and Information Systems, pp.229-235, 1981.
[3] 武田, 向殿, "Fuzzy論理文によるあいまい情報の近似表現", 情報処理学会, 知識工学と人工知能, Vol.81, No.41, pp.33-40, 1985.
[4] 菊池, 向殿, "ファジー論理関数の同定問題---部分関数がファジー論理関数で表されるための必要十分条件---", 電子情報通信学会論文誌 D-I, Vol. J77, No.7, pp.465-476, 1994.
[5] 菊池, 向殿, "ファジー論理関数の当てはめ問題---論理式による知識獲得---", 電子情報通信学会論文誌, D-I, Vol. J77, No.9, pp.595-604, 1994.
[6] Tatsumi, H., Araki, T., Mukaidono, M., and Tokumasu, S., "A Neural Network for Realization of an Approximate Representation by Using Fuzzy Logic Sentences", Proceedings of Vietnam-Japan Bilateral Symposium on Fuzzy Systems and Applications, VJFUZZY '98, pp. 390-397, 1998.