

並列処理を用いた二つのローレンツカオス水車間の高次線形結合による 共鳴運動の計算¹⁾

山崎 信孝¹・本田 数博²

1 平成 12 年度博士前期課程応用化学工学専攻 1 年

2 応用化学科

The Computer Simulation of the Resonant Motion between Two Lorenz Chaos Water Wheel by the higher order Linear Coupling using Parallel Computation¹⁾

Nobutaka YAMASAKI・Kazuhiro HONDA

Abstract

The first, famous chaos system discovered by Lorenz corresponds exactly to a water wheel mechanical device. This simple device proves of surprisingly complicated behavior. Calculations were performed for the linear coupling with first and secondary coupling coefficient between the two Lorenz chaos water wheel systems using the parallel computer. The individual water wheel is like a slice through the cylinder. The system is driven steadily by water dissipate energy, in which buckets lose water. In individual system, the long-time behavior depends on how hard the driving energy is. Water pours in from the top at a steady rate. If the flow of water in the water wheel is slow, the top bucket never fills up to overcome friction, and the wheel never starts turning. If the flow is faster, the weight of the top bucket sets the wheel in motion. The water wheel can set into a rotation that continues at a steady rate. But if the flow is faster still, the spin can become chaotic, because of nonlinear effects into the system. As buckets pass under the flowing water, how many they fill depends on the speed of spin. If the wheel is spinning rapidly, the buckets have little time to fill up. Also, if the wheel is spinning rapidly, buckets can start up the other side before they have time to empty. As a result, heavy buckets on the side moving. Upward can cause the spin to slow down and then reverse. In individual system, the spin can reverse itself many time, never settling down to a steady rate and never repeating itself in any predictable pattern. The parallel computer simulation for combination of the only first coupling coefficient between the two chaos water wheel was suggested that the rotational motions were instantly synchronized with increasing the value of the first coupling coefficient. It was confirmed that the chaotic motion of the two water wheel generated the turbulence, when it is considered to the secondary combination between the two water wheel, and it changed to the other chaotic phase.

Key Words : High order Linear coupling, Lorenzian Water Wheel, Chaos,

Non-linear synchronization, Parallel computer simulation

1. 緒言

1990 年代初頭より「複雑系の科学」は、自然科学におけるトピックス中においてもキーワード的存在となっている。「複雑系の科学」が扱う研究領域は、酸性雨や気候温暖化に象徴される環境問題や生化学などで扱われてきた脳、生命進化、生命システムなど多岐にわたる。「複雑系の科学」の取り扱う研究領域は自然科学に止まるのではなく人文科学や経済学などで扱われてきた人類の社会活動、政治活動や経済活動などあらゆる研究領域を取り込み 21 世紀における人類の知の体系の変革を期待させる。「複雑系の科学」の研究の最大の目的は、多種多様なシステムとシステム、システムと物(エネルギー)、物質と物質、あるいは物質と情報(エネルギー)との複雑な相互作用から産み出される共通な法則の解明にある。現在、自然科学の領域において「複雑系の科学」の研究対象は、非線形・非平衡熱力学系と位置付けられる。比較的独立性の高い物理的あるいは化学的複数の要素間の局所的な物質およびエネルギーを介しての相互作用のみから自己組織的に系全体の秩序構造を産み出されるようなシステムである。「カオス」は重要なキーワードの一つであり、特に非線形・非平衡状態を記述する微分方程式は厳密解を得られないことからカオス現象の研究においてコンピュータ数値科学の貢献は非常に大きい。カオス現象は単純な決定論的法則に支配されているにもかかわらず長期予測が不可能な現象と位置付けられる。

非線形・非平衡系科学の興味深い象徴的な現象の一つに「非線形引き込み同調現象」がある。我々は、これまであまり報告が為されていないカオス的な状態にある二つの状態間を 1 次及び 2 次の線形結合^{2) 3)}し、その結合強さを変化させることにより非線形現象に特有な干渉現象が出現するの計算機実験等により詳細な検討を行っている。今回、ローレンツカオス水車と呼ばれる古典的非線形力学モデル系を用いて検討した。ローレンツカオス水車は、気象学者ローレンツにより見出された「カオスアトラクター」⁴⁾を厳密に力学モデルにより再現したものであり⁴⁾、モデルを記述する微分方程式およびカオス解を得るためのパラメータ値および初期条件は明らかとされている^{4b)}。古典力学モデルは、実験と計算の比較が容易であり、「カオス制御」の研究に代表されるようにその有用性は実証されている⁵⁾。今回、二つのプロセッサ中において異なる初期条件での独立なカオス水車の運動に関する計算を行い、二つのプロセッサ間を 1 次および 2 次の線形結合を行うことによる非線形な水車の同調運動について位相情報に注目して検討した。

2. 計算

2-1 並列計算機的环境

計算は、各々のカオスシステムのカップリングを実現するために、計算毎に同期を取る必要がある。故に各々のカオスシステムを単一プロセッサに計算させ、同期し

さらに同時に処理する並列処理を用いた。

ハードウェアは、並列ボードの管理コンピュータを PC-9801 β X 3、並列ボードは mp98⁷⁾を用いた。mp98 内のプロセッサは V50(8MHz)を 4 個、共有メモリーは 250KB、ローカルメモリーは個々のプロセッサに対し 250KB である。

ソフトウェアは、MS-DOS 環境で開発した。開発言語は C 言語で行った。またコンパイラは、LSIC-86 に mp98 用に開発された並列ライブラリをインクルードしたものを用いた。

表 2-1-1 並列コンピュータ(mp98)の仕様

プロセッサ	V50(8MHz)
プロセッサ数	4
接続形態	バス接続, 共有メモリー型
共有メモリー	250KB
ローカルメモリー	250KB/プロセッサ
本体	PC-9801シリーズ(VM以降), PC-9821シリーズ
本体側使用アドレス	DE000-DEFFF(固定)
OS	本体はMS-DOS, mp98はなし
プログラム言語	C言語(LSIC-86)+並列ライブラリ

2-2 水車計算のモデル⁵⁾

水車は図 2-2-1 のように 8 個の籠があり、その籠は水車のリングに等間隔に設置してある。水は、水車の真上から供給する。従って一番上の籠のみに水が入り、その重みで水車が回転する。但し籠の底面に円い穴があり、そこから水が漏れる。漏れた水は他の籠に注がれることはない。

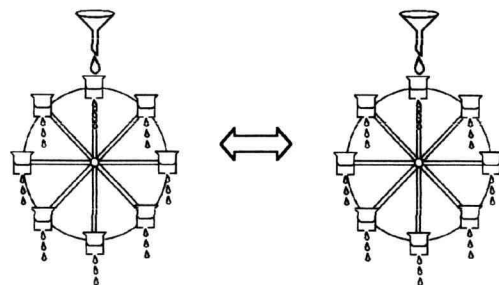


図 2-2-1 水車のモデル

籠穴からの水の流量 dm/dt は籠の底面積を S 、底面の穴の半径を d とすると

$$\frac{dm}{dt} = -\pi d^2 \sqrt{\frac{2gm}{S}} \quad 2-2-1$$

ただし t 時間, g 重力加速度, m 籠内の水の質量である。また、 $a = \pi d^2 \sqrt{2gS}$ とおくと 2-1-1 式は

$$\frac{dm}{dt} = -a\sqrt{m} \quad 2-2-2$$

となる。さらに水が供給されている時は、注水量を p とすると、

$$\frac{dm}{dt} = p - a\sqrt{m} \quad 2-2-3$$

となる。

他の水車のカップリングの条件として、互いの水車と

の角速度の差に比例及びその2乗に比例した抵抗が生じるものとする。

以上の条件から、ニュートンの運動方程式は次のようになる。(水車は2つあるものとし、それぞれの水車のカップリングを定義できるものとする)

$$\frac{dx_j}{dt} = \omega_j \quad 2-2-4$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{g \sum_{i=1}^8 m_i(j) \sin x_i(j) - k_1 \omega_1 + k_1 \Delta \omega - k_2 \Delta \omega^2}{I_1 + I_2 \sum_{i=1}^8 m_i(j)} \quad 2-2-5$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{g \sum_{i=1}^8 m_i(j) \sin x_i(j) - k_2 \omega_2 + k_1 \Delta \omega - k_2 \Delta \omega^2}{I_1 + I_2 \sum_{i=1}^8 m_i(j)} \quad 2-2-6$$

$$\frac{dm_j(j)}{dt} = \begin{cases} p_j - \alpha_j \sqrt{m_j(j)} \\ -\alpha_j \sqrt{m_j(j)} \end{cases} \quad 2-2-7$$

$$m_j(j) = \begin{cases} m_j(j) & (0 \leq m_j(j) \leq M) \\ M & (m_j(j) \geq M) \end{cases} \quad 2-2-8$$

$$\Delta \omega = (\omega_2 - \omega_1) \quad 2-2-9$$

以上の式で用いられるパラメータは、表 2-2-2 に示してある。初期値は、水車2つとも一番上の籠に水が充填されている。変数の説明で右にある具体的な数値は本計算で用いた数値である。運動方程式 2-2-4~2-2-7 はルンゲ・クッタ法⁸⁾によって解いた。

表 2-2-2 水車の運動方程式に用いられるパラメータ

i :	水車内の籠の番号(1~8)
j :	水車の番号
x_j :	j 番目の水車の回転角(rad)
ω_j :	j 番目の水車の角速度(rad/s)
$m_j(j)$:	j 番目の水車の j 番目の籠の水の質量(0~6.75[g])
M :	水車の容量(6.75[g])
$x_i(j) = x_j + (\pi/4)(i-1)$:	j 番目の水車の i 番目の籠の角度
g :	重力加速度(980[cm/s ²])
I :	水車の半径(4[cm])
I_0 :	空の水車の慣性モーメント(640[g·cm ²])
k_1 :	1 番目の水車の回転の減衰率(4[rad ⁻¹ ·s ⁻¹])
k_2 :	2 番目の水車の回転の減衰率(4[rad ⁻¹ ·s ⁻¹])
k_3 :	カップリングした時、水車間で働く回転の減衰率(互いの角速度の差の比例定数)。カップリングしていないときは 0[rad ⁻¹ ·s ⁻¹])
k_4 :	カップリングした時、水車間で働く回転の減衰率(互いの角速度の差の2乗の比例定数)。カップリングしていないときは 0[rad ⁻¹ ·s ⁻¹])
p_j :	j 番目の水車の注水量(6[g/s])
α_j :	(2g/S) ^{1/2} π d ²
d :	j 番目の水車の籠の穴の半径(1.0[mm])

2-3 単一プロセッサでの処理

プロセッサ1個に対して、水車1台として割り当て、その運動方程式を数値的に解いた。図 2-3-1 が本計算アルゴリズムのフローチャートである。

初期値設定で水車の運動方程式の条件となる数値を変数に代入する。そのとき、水車に初角速度を与える。初角速度を与える理由は、コンピューターのメモリー上に格納されているデータは、厳密に真上から水を流していることになり完全に釣り合いが取れ、回らないためであ

る。

つぎに t に 0 を代入して、 t が終了時間になるまで運動方程式をルンゲ・クッタ法を用いて計算し、そして計算結果のデータを出力する。運動方程式計算ルーチンでは、まず式 2-2-4~2-2-7 の右辺に示してある計算を行い、それを使いルンゲ・クッタ法によって1ステップ先の値を求める。

2-4 並列プロセッサでの処理

並列処理は、図 2-4-1 に示してある。このフローチャート上にある2つの運動方程式を結ぶ結合は双方のデータの転送である。また右側にはデータ出力がないがデータ出力に関しては1つのプロセッサがまとめて行っておりそのデータは共有メモリーに記憶させ、データ出力した。

カップリングしていない場合この結合は、計算結果の転送だけである。

カップリングしている場合この結合は、計算結果の転送および式 2-2-5・2-2-6 の右辺の分子の右側にある角速度の差 $\Delta \omega$ を求めるために、お互いの角速度を転送される。式 2-2-4~2-2-7 の右辺に示してある計算を行い、それを使いルンゲ・クッタ法によって1ステップ先の値を求めた。

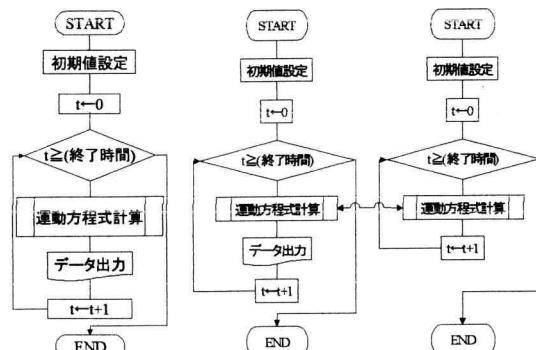


図 2-3-1 単一プロセッサ処理 図 2-4-1 並列処理におけるフローチャート

2-5 時系列解析

水車の計算で求められた時系列データに対する解析方法として、タケノスの理論を用いた。

タケノスの理論は、時系列データ $y(t)$ を離散化した $y(t_k)$ に対して3点の値を $y(t_k)$, $y_{t+1}(t_{k+1})$, $y_{t+2}(t_{k+2})$ (但し $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ で Δt は最小ステップ幅) から3次元位相空間に投影した点 $p\{y(t_k), y_{t+1}(t_{k+1}), y_{t+2}(t_{k+2})\}$ を全ての t に対し行うことによって軌道を得る(図 2-5-1 参照)。その軌道上の点 p は同じ軌道上の p_j と交わる時、

$$y(t_k) = y_j(t_k)$$

$$y_{t+1}(t_{k+1}) = y_{j+1}(t_{k+1})$$

$$y_{t+2}(t_{k+2}) = y_{j+2}(t_{k+2})$$

となり、 $t_k < t_{k+2}$ と $t_k < t_{k+2}$ の範囲では、時系列データは同じである。即ちルンゲ・クッタ法による計算においては、 $y(t_k)$ から $y_{t+1}(t_{k+1})$ を計算するので、それ以降同じ数列を得るので周期運動となる。しかし、カオス運動であればその時系列は特定の周期を持たないのでタケノスの理論による軌道の交わりは無い。よって、本シミュレ

ーションにおいて、カオスの判定に用いた。

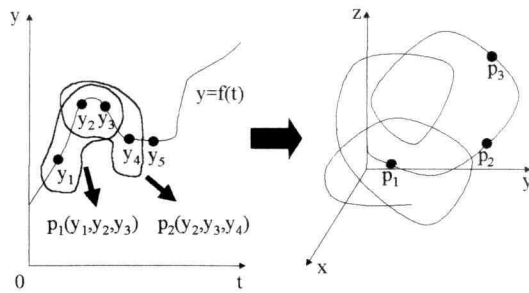


図 2-5-1 タケンスの理論

3. 結果および考察

図 3-1 は、プロセッサ-1 ((A)) およびプロセッサ-2 ((B)) で計算された独立に回転するカオス水車の角速度の時間変化を示す。縦軸は角速度 ($=2\pi\omega$)、横軸は 42000 回の計算試行回数を示す。

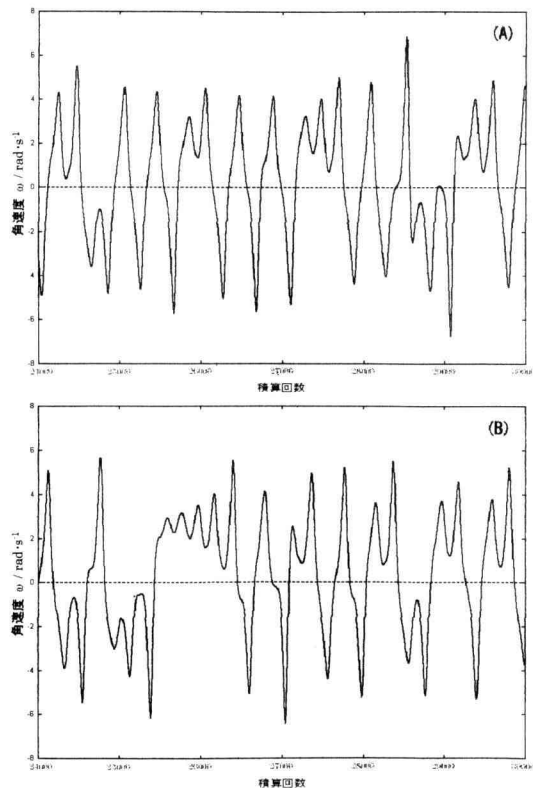
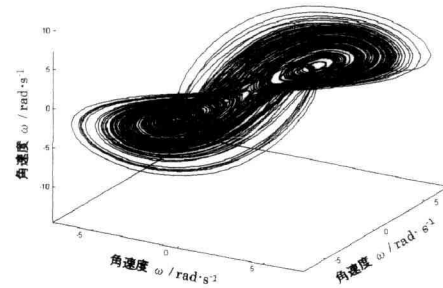


図 3-1 カオス水車の角速度の時間変化(結合なし)

プロセッサ-1 およびプロセッサ-2 の初期角速度は、それぞれ $+0.5\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ および $+1.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ に設定した。ここで、+は最初に水車を回す方向が時計回りであることを示す。図より得られたそれぞれのカオス水車に対する角速度の時間変化は周期性を持たない一見法則性のない波形であることが理解され、カオス運動の典型的な特徴を表している。

図 3-2 ((A)) および ((B)) は、それぞれの波形デ

(A)



(B)

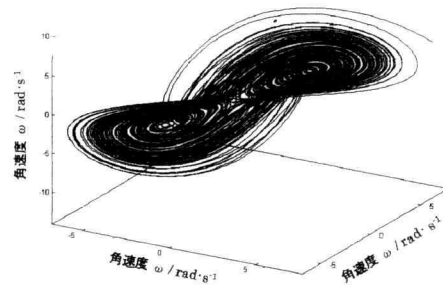


図 3-2 カオス水車のタケンスの理論によるアトラクター(結合なし)

ータをもとにタケンスの理論により 3 次元位相空間上に再構成したアトラクターである。二つのアトラクターの軌道は特異点を周回する「カオスアトラクター」であることが確認できる。特異点は二つ存在し、同じ軌道は 2 度と通らないカオス特有な軌道であることも確認できた。

これら二つのカオス水車の運動に対して 2-2-5 式 (あるいは 2-2-6 式) 中において定義される二つの結合定数 k_1 および k_s (1 次および 2 次の結合定数) に対して $k_1 \neq 0\text{rad}^{-1}\text{s}^{-1}$ および $k_s = 0\text{rad}^{-1}\text{s}^{-1}$ とした時、すなわち 2 つのカオス水車の運動を 1 次の線形関係によってのみ結合した場合のそれぞれのカオス水車の角速度の時間変化を図 3-3-1 から図 3-3-3 に示す。

図中の 3-3-1、図 3-3-2 および図 3-3-3 は、1 次の結合定数を $2.0, 5.0$ および $9.0\text{rad}^{-1}\text{s}^{-1}$ と変化させた際のそれぞれのカオス水車の角速度の時間変化を示している。1 次の結合定数が大きくなるに従い二つのカオス水車の運動は同期する度合いも大きくなることが確認できた。 $k_1 = 2.0\text{rad}^{-1}\text{s}^{-1}$ では回転運動の位相はときどき同調するのみに対し、 $k_1 = 5.0\text{rad}^{-1}\text{s}^{-1}$ では結合の開始から位相はほぼ同期した状態で回転した。ただし、波形の細部を検討すると振幅の大きさや僅かな位相のずれが観測され、完全な同一波形ではないことが確認された。 $k_1 = 9.0\text{rad}^{-1}\text{s}^{-1}$ では、位相および振幅のすべてにおいて完全に同期した運動であることが明らかとなった。二つの水車 (A) および (B) の初期回転速度は、1 次の結合定数の大きさに関係なくそれぞれ $+0.5\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ および

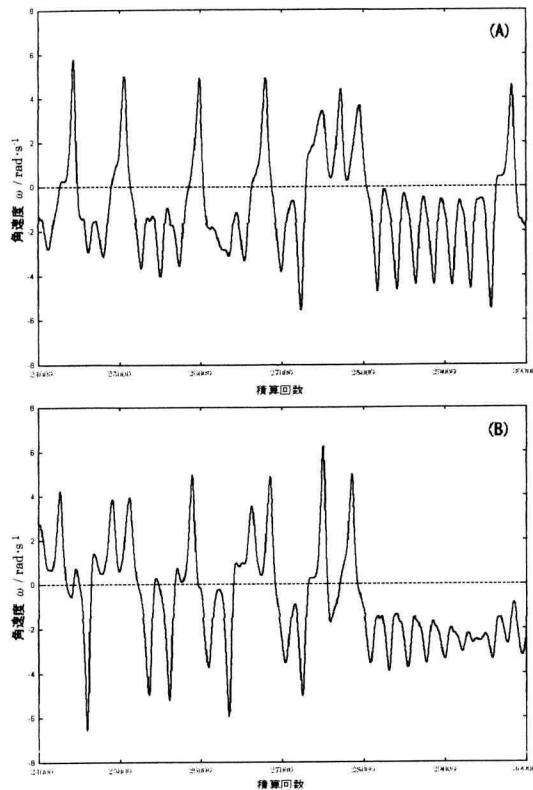


図 3-3-1 カオス水車の角速度の時間変化($k_c=2.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)

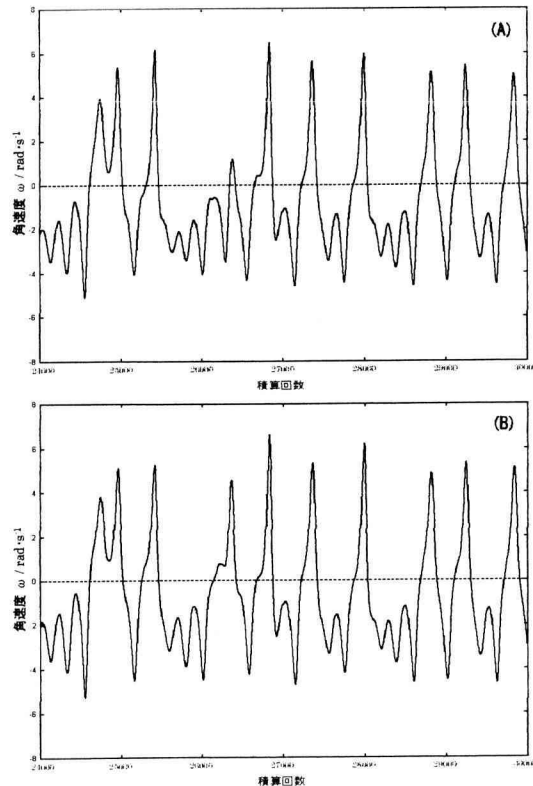


図 3-3-2 カオス水車の角速度の時間変化($k_c=5.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)

+ $1.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ とし、試行回数は 42000 回とした。

図 3-4 は、二つの水車の初期回転速度をそれぞれ+

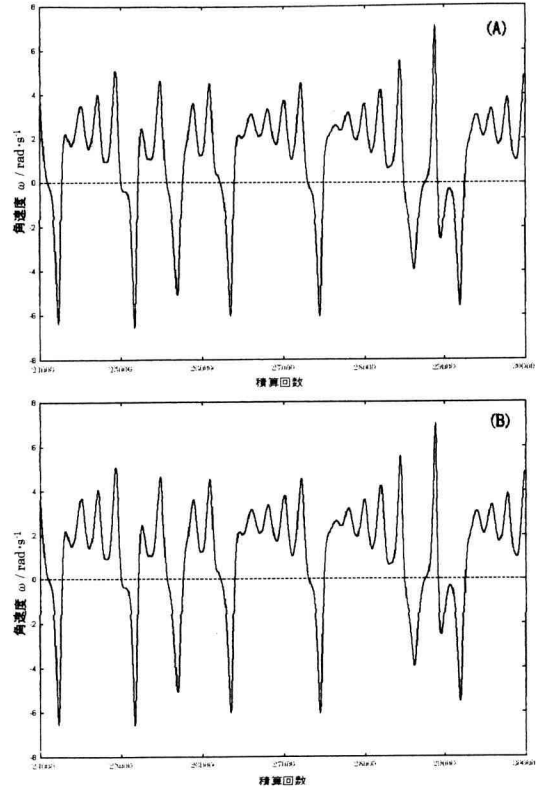


図 3-3-3 カオス水車の角速度の時間変化($k_c=9.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)

$0.5\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ および $+1.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ とし、1 次の結合定数 $k_1 = 4.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ とし二次の結合定数 $k_2 = 0.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ とした時の 42000 回の試行に対する二つの水車の角速度の時間変化を示している。ただし、図中に示すように計算開始から 3000 回までは二つの水車は結合せず 3000 回目から 21000 回までを結合させた。21000 回以降は再び二つの水車の結合は切ってそれぞれの回転運動は独立させた。図中の (A) および (B) はそれぞれ二つの水車の角速度の時間変化を示している。図より結合前には独立したカオス回転運動をしていたそれぞれの水車は結合開始から約 1000 回の試行回数後にほぼ同期した運動を行っていることが観測された。結合を切ると二つの水車の運動はまったく異なった運動に瞬間的に変化することも観測された。これは、カオスシステムの特徴である初期値敏感性のためと考えられる。結合を切った瞬間の僅かな誤差範囲内の角運動量の差がそれぞれのカオス水車のシステム中において引き伸ばされた結果と考えられる。結合前、中および後のそれぞれの試行区間における角速度の時間変化に対するタケノスの理論から描いたアトラクターは図 3-2 に描かれたカオスと同じであり、軌道の違いは特に認められなかった。図 3-5 は、二つの水車の初期回転速度をそれぞれ $+0.5\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ および $-1.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ とし、1 次の結合定数 $k_1 = 3.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ とし二次の結合定数 $k_2 = 1.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ とした時の 102000 回の試行に対する二つの水車の角速度の時間変化を示している。ただし、図中に示すように計算開始から 30000 回までは二つの水車は結合せず 30000 回目から 60000 回ま

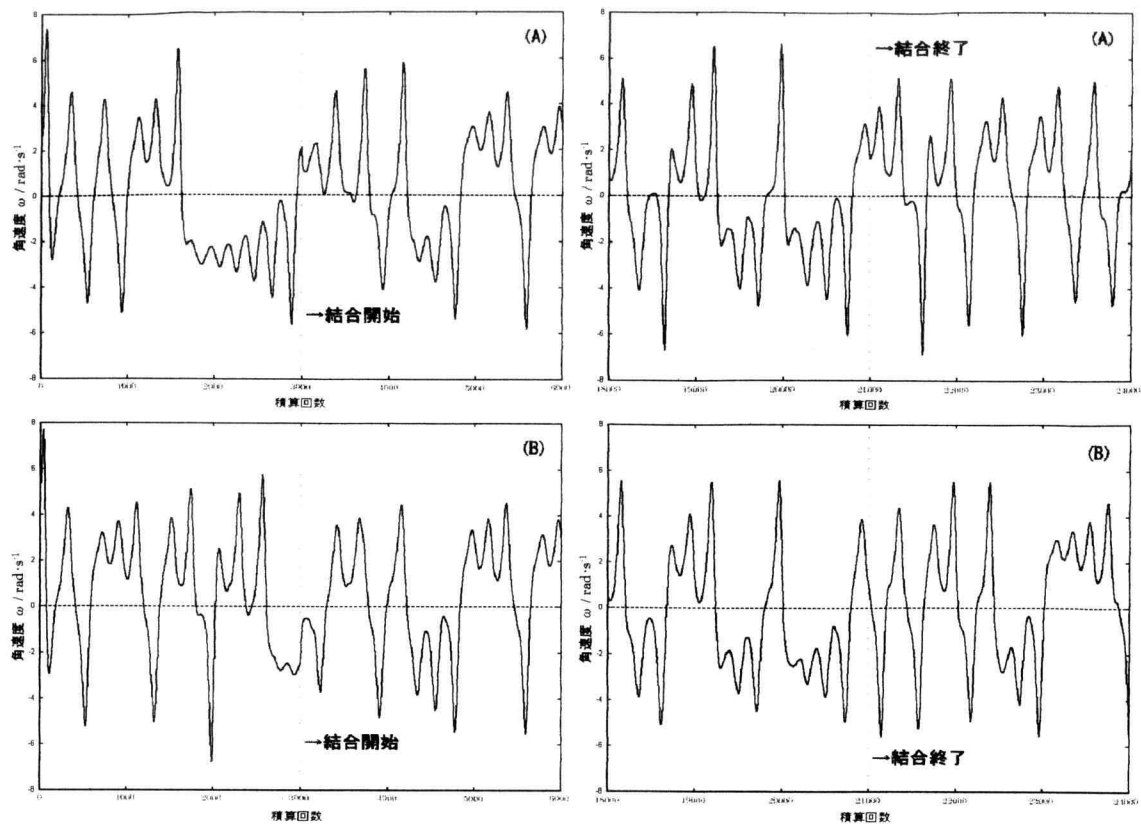


図 3-4 カオス水車の角速度の時間変化 ($\lambda=10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\kappa=0.0 \text{ rad}^{-1}$) (左側上下は、結合開始付近(積算 0-6000) 右側上下は、結合終了付近(積算 18000-24000))

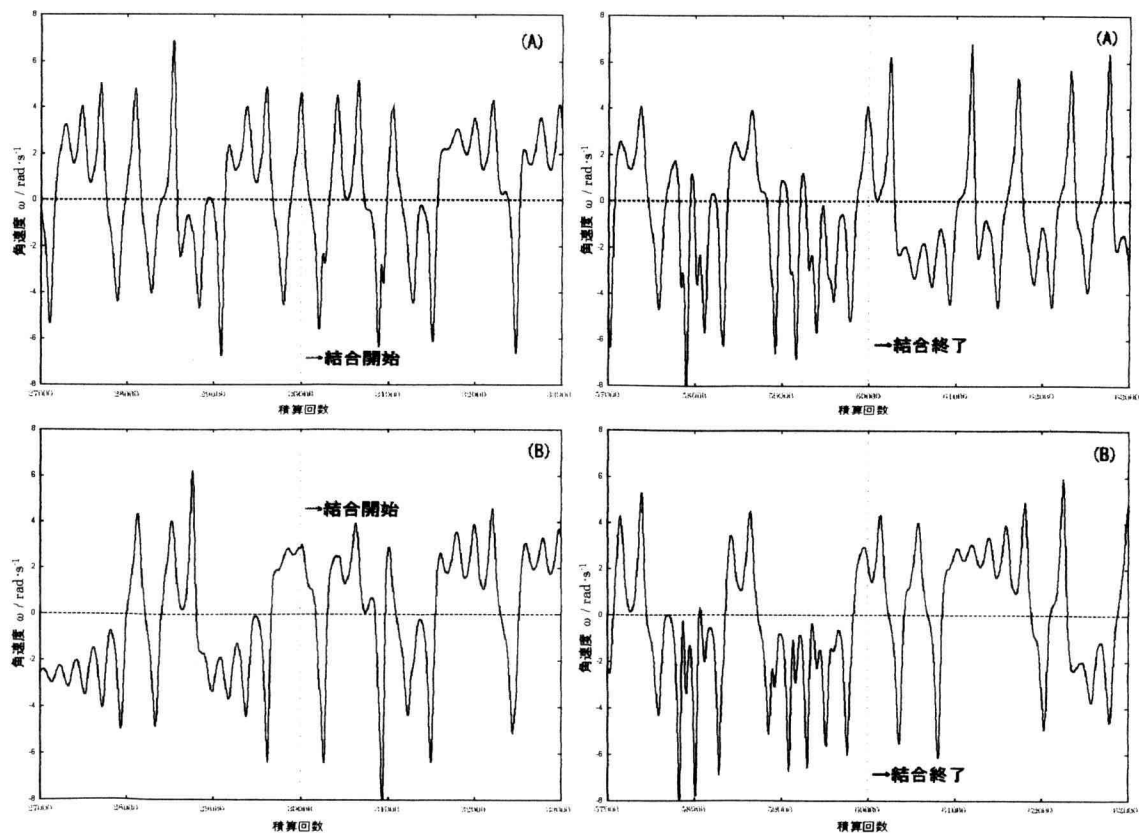
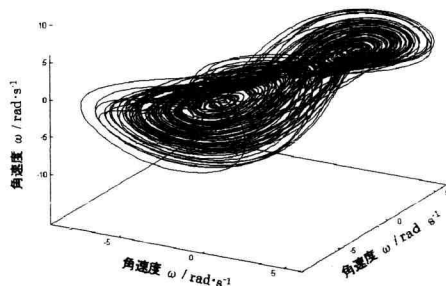


図 3-5 カオス水車の角速度の時間変化 ($\lambda=3.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\kappa=10 \text{ rad}^{-1}$) (左側上下は、結合開始付近(積算 27000-33000) 右側上下は、結合終了付近(積算 57000-63000))

でを結合させた。60000 回以降は再び二つの水車の結合は切ってそれぞれの回転運動は独立させた。図中の (A) および (B) はそれぞれ二つの水車の角速度の時間変化を示している。結合前には独立したカオス回転運動をしていたそれぞれの水車は結合開始から約 200 回の試行回数後から位相が揃い始め、二つのカオス水車はやはり結合により同期した回転運動した。しかし、1 次の結合係数のみを考慮した場合との違いも見出すことができた。すなわち、2 次の結合まで考慮した場合、二つのカオス水車の運動は、位相のみが同期しており、振幅(角速度の大きさ)は必ずしも一致しなかった。2 次の結合係数の符号をマイナスにしても基本的に同じ傾向の結果が得られた。結合を切ると 1 次のみの線形結合と同様に、二つの水車の運動はまったく異なった運動に瞬間的に変化した。

(A)



(B)

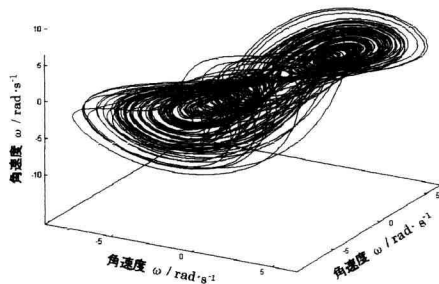


図 3-6 カオス水車のタケンスの理論によるアトラクター($k=30\text{rad}^{-1}\text{s}^{-1}$, $k_s=10\text{rad}^{-1}$)
結合時

図 3-6 は、結合中の試行区間における角速度の時間変化に対するタケンスの理論により描いたアトラクターを示す。1 次結合係数のみを考慮した結合の場合に確認されたアトラクターは平面的な広がりを持つ軌道であるのに対して、1 次および 2 次の結合係数を考慮して結合させた場合の図 3-6 に示されるアトラクターの軌道は 2 次元的な広がりを持つ軌道から 3 次元的な広がりを持ったより高次に乱れを生じた軌道が形成された。この軌道が高次のカオスアトラクターであるかの考察は現在検討中である。

4. 結言

並列計算機中の二つのプロセッサによる異なる初期条件により計算されるカオス水車の運動を 1 次および 1 次と 2 次の結合係数を考慮した二種類の線形結合したときのそれぞれのカオス水車の回転運動について調べた。1 次のみの線形結合を行った場合、結合が強くなるほど二つの水車の位相および振幅は同期し結合前とは異なる新たなカオス回転運動を行い、結合を切ると瞬時に二つの水車はそれぞれ別のカオス状態へと変化した。1 次および 2 次を考慮した結合の場合、二つの水車は同期することが認められたが、1 次のみのそれと比べて回転した同期運動はかなり複雑でありアトラクターの軌道はより高次なものとなった。2 次の結合係数は二つの水車間の摩擦による抑制効果に寄与していることから結合により水車の回転運動は散逸系となりより非線形性が増したことが複雑さの増大の原因と考えられる。

文献

- 1) 本論文は、International Symposium on Chaos and Order in Chemistry 2000 (Nara, Japan)において発表した内容の一部から構成されている。
- 2) A.Stefanski and T.Kapitaniak, Phys.Lett. A., 210, 279 (1996).
- 3) I.B.Schwartz and I.T.Georgiou, Phys.Lett. A., 242, 307 (1998).
- 4) J.Gleick, CHAOS, PENGUIN BOOK, p.27 (1987).
- 5) 科学シュミュレーション研究会著, パソコンでみる複雑系・カオス・量子, 講談社, p.13 (1997).
- 6) T.Shinbrot, W.Ditto, C.Grebogi, E.Ott, M.Spano and J.A.Yoke, Phys.Rev.Lett., 68, 2863 (1992).
- 7) 小畑正貴著, PC-9800 シリーズではしるつくる並列処理コンピュータ, p.48 (1995).
- 8) 吉川敏則著, C 言語実用数値処理プログラミング: PC-98 シリーズ, p.151 (1993).