クリーネ・ファジィ測度上のショケ積分

The Choquet Integral with respect to Kleenean Fuzzy Measure

荒木智行・山本富士男

Tomoyuki ARAKI , Fujio YAMAMOTO

情報工学科

1．はじめに

従来のファジィ測度，ファジィ積分は，その測定対象として2値論理に基づく集合論における対象を扱ってきた．それらの研究の中で，高萩，荒木により，菅野積分が正単調な定数係数をもったファジィ論理関数で表現可能であるという事実が明きらかにされた[4]．定数係数をもったファジィ論理関数は，クリーネ代数のモデルであることから，その後，著者らは，その研究の延長としてクリーネ代数のモデルとなる集合（L.A.Zadehによって定義されたファジィ集合は，その特殊な場合である．）における測度，積分としてクリーネ・ファジィ測度，クリーネ菅野積分を，工学的に意味のある解釈を持つ拡張として提案し，その基本的な性質を明らかにした[7]．この研究で明らかにされた事実は，ファジィ集合に対して，そのまま適用できる．クリーネ・ファジィ測度上のクリーネ菅野積分の特徴は，個々の測定対象を否定的にも評価できる点である．従来の菅野積分では，部分集合間の非加法的な相互作用を評価することは可能であったが，個々の対象を否定的（マイナス評価）にも肯定的（プラス評価）にも評価しそれらの評価を統合することは不可能であった．

本報告では，菅野積分と同様に，非加法的な測度上での最も基本的な積分の一つであるショケ積分をクリーネ・ファジィ測度上に拡張することを試みる．

2．諸準備

以下，本報告では，特に断らない限り，全体集合は，2値論理に基づく有限集合とし，測度としては離散的な測度を扱うものとする．

2．1　従来のファジィ測度とショケ積分

［定義1］（ファジィ測度）

Rを実数全体の集合とし，R^*をRに∞と$-\infty$を加えたものとする．また，対象の全体集合をXとする．$F \subseteq R^*$とするとき，ファジィ測度は，$g: 2^X \to F$なる関数であり，以下の条件を満たす．

(1) $g(\phi) = 0$　　（境界条件）

(2) $A, B \subseteq X, A \subseteq B$ならば$g(A) \leq g(B)$　　（単調性）

実際の問題にファジィが適用される場合には，定義1の(1)の境界条件には，別の条件が付加されることがある．例えば，菅野積分をファジィ測度上で考える場合には，条件$g(X) = 1$が付加される．また，gの値域Fに関しても，菅野積分では，実数の実閉区間$F = [0,1]$が採用されることが多く，ショケ積分では，$F = [0, \infty]$が採用されることが多い．

［定義2］[5]（ショケ積分）

fを被積分関数，gをファジィ測度とする．このとき，ショケ積分は次式で定義される．

$$(C)\int f(x)dg = \int_0^{\infty} g(\{x \mid f(x) > r\})dr + \int_{-\infty}^{0} [g(\{x \mid f(x) > r\}) - g(X)]dr$$

2．2　クリーネ・ファジィ測度

以下では，文献[7]にしたがいクリーネ・ファジィ測度の定義を行う．また，クリーネ代数に基づく集合は，本質的に3値論理に基づく集合であることから，本報告では集合のメンバーシップ関数の値域を$[0,1]$ではなく$\{0, 0.5, 1\}$として議論をする．

［定義3］（3値集合）

Xを全体集合，AをXの3値部分集合とする．このときAの特性関数を以下のように定義する．

$$\tau_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{(if x is in A)} \\ 0.5 & \text{(if x is unknown whether in A or not)} \\ 0 & \text{(if x must not be in A)} \end{cases}$$

通常の2値の集合を考える．全体集合を$X = \{a, b\}$とし，その部分集合$A = \{a\}$を考える．このとき，通常の2値の集合では，$b \notin A$と解釈される．しかしながら，定義3の3値の立場では，$\tau_A(b) = 0.5$と考えるのが妥当と考えられる．即ち，定義3の立場で考えると，要素bは部分集合Aに属するのか属さないのか不明（unknown）であると解釈できる．この解釈に基づき，2値論理に基づく集合の特性関数を再定義すると以下のχのようになる．

（2値集合の特性関数）

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0.5 & (x\notin A)\end{cases}$$

定義3のτ_Aの取る値でχ_Aの取らない値に0がある．クリーネ・ファジィ測度では，0が重要な役割を果たす．0は禁止（must not）の意味を表し，否定の概念の導入を可能とする．

［定義4］（包含関係）

Xを全体集合とし，A，BをXの3値の部分集合とする．このとき$A\subseteq B$であるとは，AがBに包含されることを表し，$\forall x\in X(\tau_A(x)\le\tau_B(x))$が成立することである．

［定義5］（ambiguityに関する半順序関係$\prec_A$）

定義3のτの取る値0, 0.5, 1に図1のような半順序関係を定義し，ambiguityに関する半順序関係と呼ぶ．

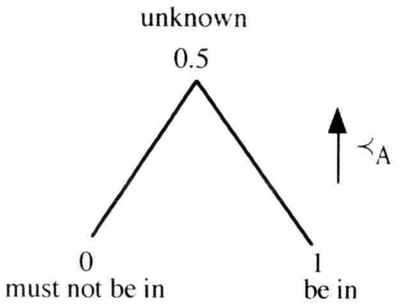

図1 Partial ordering relation with respect to ambiguity

定義3の特性関数τの三つの値に関して，その意味を考察する．τの値0,0.5,1において0.5（unknown）は，最もあいまい（ambiguous）な状態であると考えることは自然な解釈である．そのことから0.5と1（be in）も比較できることは自然である．同様に0.5と0（must not be in）も比較できると考えることは自然である．しかしながら，0と1は，それぞれあいまいな状態ではなく，概念としては相反するものである．したがって0と1はあいまいさに関しては比較不能と考えるのが妥当である．これらのことから図1のような半順序関係が，τの値の間に考えることは自然と言える．

［定義6］（半順序関係$\prec_A$の部分集合族への拡張）

Xを全体集合とし，C，DをXの部分集合とする．このとき$C\prec_A D$とは，$\forall x\in X(\tau_C(x)\prec_A\tau_D(x))$が成立することである．

全体集合をX，その部分集合をAとする．このとき3値の集合の表記法は以下のように定める．

	表記
・要素aについて$\tau_A(a)=1$	a
・要素aについて$\tau_A(a)=0.5$	何も書かない
・要素aについて$\tau_A(a)=0$	$\bar{a}$

・$\forall x\in X(\tau_A(a)=0.5)$なる部分集合（空集合）	ϕ_K
・$\forall x\in X$に対して$\tau_A(a)=0$または$\tau_A(a)=1$なる部分集合	M_i
・$\forall x\in X(\tau_A(a)=0)$なる部分集合	$\underline{M}$
・$\forall x\in X(\tau_A(a)=1)$なる部分集合	$\overline{M}$

［例1］全体集合を$X=\{a_1,a_2,a_3\}$とする．このとき，部分集合$A=\{a_1,\overline{a_3}\}$において，それぞれの要素は以下のような事実を表している．

(1) a_1はa_1に含まれている．

(2) a_2はAに含まれるかどうか不明である．

(3) a_3はAに含まれてはいけない．

［例2］$X=\{a_1,a_2\}$を全体集合とする．このとき，$\{a_1,a_2\}\prec_A\{a_1\}$，$\{a_1,\overline{a_2}\}\prec_A\{a_1\}$，$\{a_1\}\prec_A\phi_K$が成立する．$\{a_1,a_2\}$と$\{a_1,\overline{a_2}\}$は比較不能である．

［例3］全体集合を$X=\{a_1,a_2\}$とする．このとき，半順序集合$<X,\prec_A>$は上半束をなし，そのハッセ図は図2のようになる．

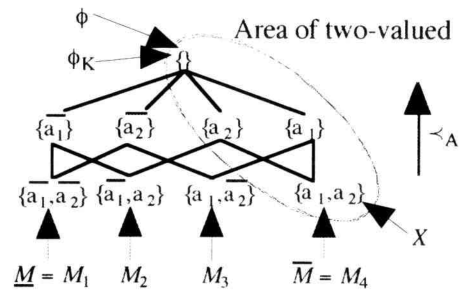

図2 Hasse diagram of $<X,\prec_A>$.

以上の定義からクリーネ・ファジィ測度は以下のように定義される．

［定義7］（クリーネ・ファジィ測度）

n個の要素からなる2値の集合Xを全体集合とする．このとき，クリーネ・ファジィ測度とは，$p:3^X\to[0,1]$なる写像であり，以下の条件を満たす．（ただし，3^XはXの3値の巾集合を表す．）

(B1) $p(\phi_K)=0.5$, $p(\overline{M})=1$ （境界条件1）

(B2) $p(\underline{M})=0$ （境界条件2）

(M1) $A,B\in 3^X, A\prec_A B$ならば$p(A)\prec_A p(B)$ （単調条件1）

(M2) $M_i(i=0,\cdots,2^n)$に対して$M_i\subseteq M_j$ならば$p(M_i)\le p(M_j)$ （単調条件2）

定義1の通常のファジィ測度と定義7のクリーネ・ファジィ測度を比較すると，以下の点がそれぞれ特徴的である．

(1) 定義1の測度関数gの値域は$F(\subseteq R^*)$である

が，クリーネ・ファジィ測度pでは必ず[0,1]に規格化されている．しかしながら，Fと[0,1]の濃度は等しい．

（2）2値の集合の3値的解釈である2値の集合の特性関数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0.5 & (x\notin A)\end{cases}$$

を用いると，クリーネ・ファジィ測度を考える上での対象となる集合は，2値の集合を特殊な場合として含んでいる．例えば，全体集合$X=\{a_1,a_2\}$とするとき，図2において破線で囲まれた部分がすべての2値の集合2^Xの要素に対応する．また，定義7の(B1)は，定義1の(1)に，(M1)は定義1の(2)に対応している．

以上の特徴のうち，（2）より以下の定理1，定理2が導かれる．

［定理1］[7] n個の要素を持つ集合Xを全体集合とする．このとき$<3^X,\prec_A>$の内部には$<2^X,\prec_A>$と順序同型な部分集合が2^n個存在する．

（証明）$<2^X,\prec_A>$はϕ_Kを最大元，$\overline{M}$を最小限をする束である．この束を最大元，最小限を明示して$<2^X,\prec_A,\phi_K,\overline{M}>$と表記することにする．このとき，最大元を$\phi_K$，最小限を$M_i$とする束を考えると，明らかにそれらは$<2^X,\prec_A,\phi_K,\overline{M}>$と順序同型かつ束同型である．したがって$M_i$は$2^n$個あるので，定理は成立する．（証明終）

［定義8］$<3^X,\prec_A>$において，$<2^X,\prec_A,\phi_K,\overline{M}>$と同型な部分集合を，その最小元$M_i$と対応させて$B_i$と定義する．そして$B=\{B_i\mid I=1,\cdots,2^n\}$と定義する．更にBにおける半順序関係$B_i\leq_B B_j$を$M_i\subseteq M_j$として定義する．

［定理2］[7] $<B,\leq_B>$は，最大限がB_{2^n}，最小限がB_0であるブール代数を成す（証明略）

以上の定理1，定理2によりクリーネ・ファジィ測度を考察する上での対象となる集合$<3^X,\prec_A>$の構造と従来のファジィ測度の対象となる集合$<2^X,\prec_A>$の構造との間の関連が明らかになった．

従来のファジィ集合の定義される集合は，集合の包含関係および半順序関係$\prec_A$に対してブール代数を成している．そして従来のファジィ測度の定義される集合と同型な集合B_iが，定理2の意味でブール代数を成している．ブール代数の元には，必ず補元が存在するので，$<3^X,\prec_A>$は，互いに補元を持つ2^n個の通常のファジィ測度の定義される集合が，補元となる集合以外と重なりあい互いに干渉する形態で，ブール代数として統合された集合を成している．

また特徴（1）については，以下の定義9ようなアフィン変換ℓを考えれば，R^*と[0,1]には一対一の対応をつけることが可能あるので，測度関数gとpの値域は，間隔尺度を保つという意味では同じものと見なしても良い．

［定義9］

(1) ℓは$\ell:R^*\rightarrow[0,1]$なる写像．

(2) $\ell(x)=a\cdot x+0.5\quad(a>0)$

3．クリーネ・ファジィ測度上のショケ積分

まず最初にクリーネ・ファジィ測度上に定義するショケ積分に求められる要件について以下に列挙する．

（要件1）通常の2値の場合のショケ積分を特殊な場合として含むこと．

（要件2）ルベーグ積分の自然な拡張となっていること．

2．でクリーネ・ファジィ測度の定義される集合の構造が明らかにされた．その結果によると，クリーネ・ファジィ測度の対象となる3値集合には，2^n個の通常のファジィ測度の対象となるブール代数を成す集合B_iがあり，それらの集合がさらにブール代数となっている．また，定義2の通常のショケ積分は，ルベーグ積分の自然な拡張である．これらのことから，クリーネ・ファジィ測度上のショケ積分は以下の2段階で定義する．

(STEP 1) 各B_i上に，通常のショケ積分と同様な積分を導入する．

(STEP 2) 各B_i上の積分の結果を統合するための積分を定義する．そして，その結果をクリーネ・ファジィ測度上の積分値とする．

以下にSTEP 1について述べる．

［定義10］Xを全体集合とする．このとき$f:X\rightarrow R^*$なる関数である被積分関数を以下の規則により拡大する．

規則：$\forall x\in X$に対して$f(\bar{x})=x$

定義10により拡大された関数をf'とすると，f'は$f':\cup\{A\mid A\in 3^X\}\rightarrow R^*$なる関数となる．

［定義11］（B_i上の積分）

定義9のアフィン変換ℓの逆変換をℓ^{-1}とする．また被積分関数fを定義10に従い拡大した関数をf'とする．このとき，B_i上の積分を以下のように定義する．

$$(C_{B_i})\int f'(x)dp=\int_0^{\infty}\ell^{-1}(p(\{x\mid f'(x)>r\}))dr+\int_{-\infty}^{0}\ell^{-1}((p(\{x\mid f'(x)>r\})-p(B_i))dr$$

定義11で定義された積分は，B_iを通常の2値の集合とみなしてB_i上でfをショケ積分したものである．したがって，$i=1,\cdots,2^n$のすべての$(C_{B_i})\int f'(x)dp$は，要件1，要件2をともに満たしている．

次にSTEP 2についであるが，STEP 1で定義された積分$(C_{B_i})\int f'(x)dp$はR^*上の値を取ることは明らかである．したがって，これらの値のアグリゲーションを取った値を積分値として求める．通常のショケ

積分は，アグリゲーションを行う際にも有効であることが示されているので，STEP 1で得られたすべての $(C_{B_i})\int f'(x)dp$ を適当な関数によりショケ積分すれば，要件１，要件２を満たしたクリーネ・ファジィ測度上のショケ積分を定義できる．以下の定義１２で定義された積分をクリーネ．ショケ積分と呼ぶことにする．

［定義１２］全体集合をX，クリーネ・ファジィ測度をp，アフィン変換をℓ，STEP 2のショケ積分を行う際の被積分関数をeとする．このときクリーネ・ファジィ測度上のショケ積分は以下のように定義される．

$$KC(X,p,\ell,e)=(C)\int e((C_{B_1})\int f'(x)dp,\cdots,(C_{B_{2^n}})\int f'(x)dp)$$

４．むすび

菅野積分をファジィ集合上に定義するために導入されたクリーネ・ファジィ測度上に，非加法的な測度上での最も基本的な積分であるショケ積分を拡張したクリーネ・ショケ積分を定義した．このことにより，クリーネ菅野積分と同様に，従来のファジィ積分の概念に無かった否定の概念を取り扱うことが可能となった．

本論文では，クリーネ代数のモデルである３値の集合上にクリーネ・ショケ積分を定義したが，高木，菊池，中嶋，向殿[9]らによる数値真理値から３値に量子化する手法および３値の真理値から数値真理値を決定するための拡大の手法を用いることにより，ファジィ集合上にクリーネ・ショケ積分を定義することが可能である．

本論文で示したショケ積分は，２値の集合上のショケ積分の３値集合上への一般化であるが，厳密には，シュマイドラー[5]により定義されたショケ積分の一般化であり，シュポ[6]がショケとは独立に定義し，被積分関数が非負関数のときにショケ積分と一致する積分であるシュポ積分の一般化にはなっていない．これは，測度関数の値域の変換にアフィン変換を用いたことにより，尺度として比例尺度が扱えないためである．

今後の課題としては，Type-2ファジィ集合上の測度であるファジィインターバル測度[8]上にショケ積分を拡張することが挙げられる．

謝辞 日頃からご指導ご鞭撻頂きます明治大学向殿政男先生に深謝致します．

参考文献

[1] Grabisch, M., Murofushi, T. and Sugeno, M. (eds), Fuzzy measures and integrals, Springer-Verlag (2000).

[2] 菅野，室伏，講座ファジィ３：ファジィ測度，日刊工業新聞社，(1993).

[3] 向殿，講座ファジィ４：ファジィ論理，日刊工業新聞社，(1993).

[4] Takahagi, E and Araki, T., On fuzzy integral representation in fuzzy switching functions with constants, Proc. Vietnam-Japan Bilateral Symposium on Fuzzy Systems and Applications,VJFUZZY'98,pp.240-245 (1998).

[5] Schmeidler, D., Subjective probability and expectedunity without additivity, Econometrica, 57, pp.571-587(1989).

[6] Sipos, J., integral with respect to a pre-measue, Math. Slovaca, 29, pp.141-155 (1979).

[7] Araki, T., Mukaidono,M.,and Yamamoto,F., On a Kleenean extension of fuzzy measure, Proc. 31th IEEE International Symposium on Multiple-valued Logic, ISMVL2001, pp.324-329(2001).

[8] 荒木，向殿，山本，ファジィインターバル論理に基づく２種類のAmbiguityを扱える測度と積分，第１７回ファジィシステムシンポジウム論文集(2001).

[9] Takagi, N., Kikuchi, H., Nakashima, K. and Mukaidono, M., Identification of Incompletely specified multiple-valued Kleenean functions, IEEE Trans. on system, man, and cybernetics Part A, vol.28., no. 5, pp.637-647(1998).