

# ゲームでのボール投げシミュレーション Ball Throw Simulation in Game

立花康夫, 河合敏勝

Yasuo TACHIBANA, Toshikatsu KAWAI

神奈川工科大学情報メディア学科

In this paper, we propose a simulation method of a ball throwing in baseball. It is considered that a ball is thrown with arbitrary initial velocity and angular velocity. The velocity and angular velocity are damped by air viscosity. The lifting power of a ball is expressed by the vector product between its velocity and angular velocity. A simulation program is constructed by C++ compiler. Several simulation results are presented. The proposed method is applied to a ball throwing game.

## 1 はじめに

ボール投げ運動はアニメーションやCGの中のいろいろな局面で出現する。この問題は元々砲弾の軌道計算に端を発し計算機の発達と共に多くの検討が加えられてきた。この論文では投げられたボールの軌跡を描く方法について論ずる。ゲーム等では初期条件で軌跡が定まってしまう確定的な議論でなく予測不可能な要因により軌跡が乱される確率的な扱いが必要となる。この論文では、ボールが受ける空気抵抗と回転を考慮して、野球ピッチャーのカーブやドロップ等の投球が表現できること、確率微分方程式として定式化することで予測不可能な状況が加味できることを示す。また、プログラム上ではC++を使用し演算子オーバーロードによりベクトル積等のベクトル計算が容易にできる工夫をしてある。提案法の適用例として野球ピッチャーの投球ゲームを示す。

## 2 ボール投げ運動

ボール投げ運動で可能な限り実際の状況を表すために、この論文では以下のような考慮をする。投球に際しては初期速度だけではなくボールの初期回転も与える。ボールの進行に伴い空気抵抗を受ける。ボール回転はボール速度の影響は受けないが減衰により回転が遅くなると仮定する。回転により速度と角速度のベクトル積に比例する力が働くとして仮定する。以下、これらの点を考慮してボール投げ運動の定式化を行う。ボール投げ運動を論じるために  $x-y$  面は地表、 $z$  軸は鉛

直上方を向く  $x-y-z$  直交座標の中でボールの重心（端的に言ってボールの中心）を点  $P(x, y, z)$  で表す。各座標軸に図1のように単位ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  を設定すると点  $P$  はベクトル  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  で表される。点  $P$  の速度  $\mathbf{v}$  の  $x, y, z$  成分を  $v_x, v_y, v_z$  とすると  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$  と表される。先に述べた考えを基に Newton の運動方程式により、位置  $\mathbf{r}[\text{m}]$ 、速度  $\mathbf{v}[\text{m/s}]$  および角速度  $\omega[\text{rad/s}]$  の時間的な変化はベクトルを使えば

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (1)$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\rho\mathbf{v} - mg\mathbf{k} - \mu\mathbf{v} \times \omega \quad (2)$$

$$I\dot{\omega} = -\nu\omega \quad (3)$$

と表される [1],[2],[3]。式 (1)-(3) において、 $m[\text{kg}]$  はボールの質量、 $\rho[\text{kg/s}]$  は粘性減衰係数、 $g[\text{m/s}^2]$  は重力加速度、 $\mu[\text{kg/rad}]$  は回転揚力係数（便宜上こう称す）。 $I[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$  は慣性モーメント、そして  $\nu[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$  は回転減衰係数である。位置、速度、および角速度の初期条件として

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_I, \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_I, \omega(0) = \omega_I \quad (4)$$

とする。式 (1) は速度の定義を示している。先に式 (3) について述べる。実際の環境で角速度は速度の影響を受けると考えられるが、この論文では、回転が空気の抵抗で角速度に比例して次第に減衰する過程のみを定式化する。式 (2) の第1項は空気による粘性抵抗を示し速度に比例すると仮定している。第2項は重力を表し  $z$  軸下方に働くとする。第3項は回転による揚力を示している。回転による揚力は正確には流体力学的な検討を要するが、この論文では比較的簡単なモデルを採

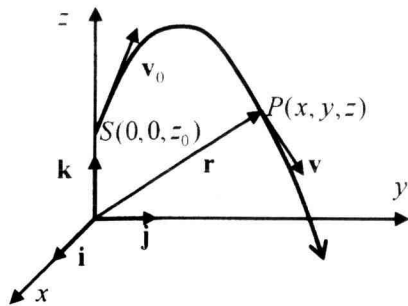


図1 ボールの運動座標

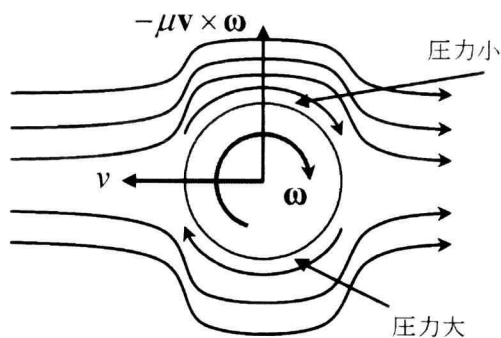


図2 回転による揚力の発生

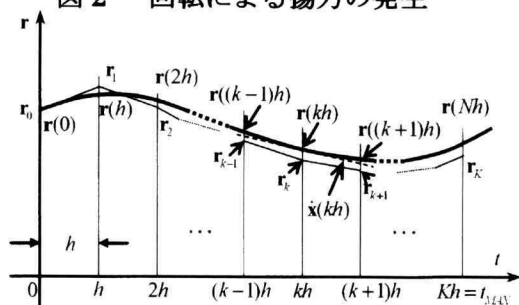


図3 数値解法 (rを模式的に描いたもの)

用する。図2は空気中を回転しながら進むボール（わかりやすいようにボールの進行方向と直角に回転しているとする）の周辺の空気の流れを描いたものである[3]。図2でボールは紙面に垂直に右回りで回転しているとする。従って $\omega$ は紙面に垂直で紙面に突き刺さる向きをしている。速度 $\mathbf{v}$ は左向きである。この際、ボール上方の気流はボールの回転でより速められる。一方下方は緩められる。これによりボールの上方の圧力は低く、下方は高くなるからボールには上方への揚力が働く。これをベクトルで表すとベクトル積 $-\mu \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ となる。我々は式(1)-(3)を初期条件(4)により数値的に解く。

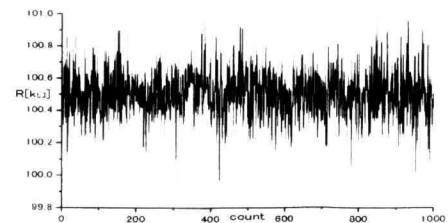


図4 電気抵抗の測定結果

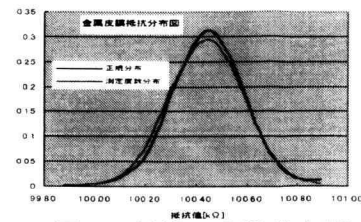


図5 抵抗の度数分布図

### 3 確率微分方程式としての定式化

前節で考えた問題は複雑ではあるが、初期条件を与えればその後の運動は全て定まってしまう。野球でピッチャーがボールを投げた瞬間に高速計算してバッターにその到達位置を知らせことができると、良い球ならば必ずホームランを打たれてしまう。このような系は確定系であり理想的なボールの運動を示している。しかし、実際のボール投げではこのような完全に予測できる投球はありえない。風等の外界の影響や、投げるときの微妙な速度や回転のばらつきで予測できない軌跡が生ずる。これが実は野球の試合運びを面白くしている由縁である。もちろん、これはどのようなゲームでも同じである。この不確実性がギャンブルとしての特性を生み、無上の面白さを人に与えるわけである。このような様子を再現するには確率的な現象としてボール投げを扱う必要がある。

式(2)の右辺の力の項にさらに不規則な風等の影響による外力を表す $\gamma \mathbf{W}$ を加えて、確率微分方程式として定式化する[4]。

$$m \dot{\mathbf{v}} = -\rho \mathbf{v} - mg \mathbf{k} - \mu \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \gamma \mathbf{W} \quad (5)$$

ベクトル $\mathbf{W}$ は $\mathbf{W} = W_x(\sigma_x)\mathbf{i} + W_y(\sigma_y)\mathbf{j} + W_z(\sigma_z)\mathbf{k}$ である。確率変数 $W_*(\sigma)$  ( $*$  =  $x, y, z$ ) は、成分ごとに独立で、平均0、標準偏差1の正規性白色雑音を表す。全体にかかる雑音係数 $\gamma[\text{kg} \cdot \text{m/s}^2]$ により各座標成分として平均0、標準偏差 $\gamma$ の不規則な力がボールに作用する。さらに初期条件 $\mathbf{r}_I, \mathbf{v}_I, \boldsymbol{\omega}_I$ を確率変数にすれ

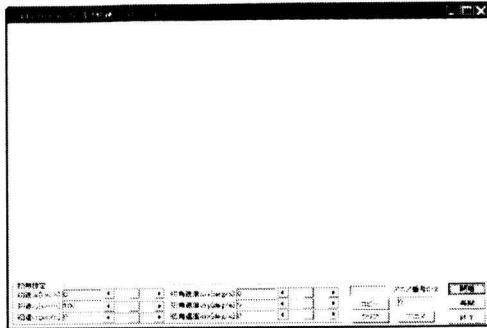


図6 BallThrowの実行初期画面



図7 [開始]ボタンで現れるダイアログ

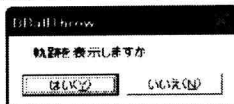


図8 軌跡表示ダイアログ

ば、投球の際の不確実性が表現できるが、この論文ではこれらは確定値としてある。

## 4 差分方程式

方程式(1),(3),(5)を初期条件(4)で解析的に解くのは事実上不可能である。この論文では時間0から始めて $t_{\max}[s]$ までの時間の $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \omega$ を数値計算する。 $t_{\max}$ を $K$ 等分して( $K$ は1よりはるかに大きな整数)

$$h = t_{\max}/K \quad (6)$$

とする。 $h[s]$ は刻み幅である。 $h$ 毎の値がわかれば方程式は数値的に解けたことになる。すなわち、時刻 $kh$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ )での $\mathbf{r}(kh), \mathbf{v}(kh), \omega(kh)$ の近似値 $\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \omega_k$ を求める。時刻 $kh$ での速度 $\dot{\mathbf{r}}(kh) = \mathbf{v}(kh)$ は

$$\dot{\mathbf{r}}(kh) = \mathbf{v}(kh) \approx \frac{\mathbf{r}((k+1)h) - \mathbf{r}(kh)}{h} \approx \frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{h} \quad (7)$$

と近似できるので、Euler法によれば、 $\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, \omega_k$ を以下のように定める。

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \frac{h}{m}(-\rho \mathbf{v}_k - m \mathbf{g} \mathbf{k}_k - \mu \mathbf{v}_k \times \omega_k) + \frac{\gamma}{m} \Delta \mathbf{B}_k \quad (8)$$

```
// & vector のベクトル積
vector operator & (vector& u)
{
    vector w;
    w.x=y*u.z-z*u.y;
    w.y=z*u.x-x*u.z;
    w.z=x*u.y-y*u.x;
    return w;
}
```

リスト1 ベクトル積用&amp;のオーバーロード

```
// funcv 速度対応関数
vector BThrow::funcv(long double t, vector v, vector omg)
{
    vector f;
    vector mgk;
    mgk=vector(0, 0, m*g);
    if (fabs(m)<eps) m=eps;
    f=(-rho*v-mgk-mue*(v & omg))/m;
    return f;
}
```

リスト2 ベクトル積演算子&amp;の利用例

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + h \mathbf{v}_k \quad (9)$$

$$\omega_{k+1} = \omega_k - \frac{\nu h}{I} \omega_k \quad (k=0, 1, \dots, K-1) \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_I \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_I \quad \omega_0 = \omega_I \quad (11)$$

ここで $\mathbf{B}_k$ はWiener過程である。式(5),(8)から考えれば $\Delta \mathbf{B}_k \triangleq \mathbf{B}_k - \mathbf{B}_{k-1}$ として

$$\Delta \mathbf{B}_k = h\{W_x(\sigma_x)\mathbf{i} + W_y(\sigma_y)\mathbf{j} + W_z(\sigma_z)\mathbf{k}\} \quad (12)$$

となる。すなわち、 $\Delta \mathbf{B}_k$ の各成分は平均0、標準偏差 $h$ の独立な( $k$ と各成分について)正規分布する雑音である。式(8)-(12)の差分方程式は初期値から逐次 $k$ を進めて解くことができる。これにより、運動方程式は解けたことになる。ここで $\mathbf{r}(kh)$ と $\mathbf{r}_k$ は直接図示できないが図3は模式的に表したものである。実際の計算では、もっと精度良く計算できるRunge-Kutta法を用いる。

## 5 不規則信号

式(9)におけるWiener過程の差分 $\Delta \mathbf{B}_k$ の与え方について示す。ある製造ロットでの100kΩの金属皮膜抵抗1,000個の測定値を図4に示す。また、その頻度分布図を図5に示す。このように卑近な実例を見ても不規則現象の多くが正規分布に従っていることがわかる。このような実際の不規則現象の値を使って数値計

算を実施することはできないので、実際には乱数を用いる。相乘法などにより一様分布する乱数は容易に得られる。また、中心極限定理に基づく平均と分散が有界な確率変数の一定数の平均は正規分布に近づく。この性質を利用して発生した一様乱数をいくつか (12 個の場合が多い) 加えて正規分布乱数を生成する。これに所定の係数をかけて  $\Delta \mathbf{B}_k$  を近似する。

## 6 プログラム上での工夫

本論文で与えた計算例は C++ (Borland 社の C++ Builder V6) で作成した [5]。数値計算上で面倒なのはベクトルの計算である。特に、式 (9) にはベクトル積が含まれているので、通常であればかなり注意深くコーディングを実施する必要がある。ベクトルクラス `vector` を作り、その中に演算子のオーバーロード関数を作ることで、見通しよくプログラム化できる。リスト 1 にはクラス `vector` の中に作成した演算子 (本来は論理演算子) のオーバーロード関数である。これにより記号でベクトル積の演算ができる。リスト 2 には式 (2) 右边をコード化した場合の利用例を示す。式通りの記述でプログラムが可能となる便利な機能が得られる。

## 7 プログラム BallThrow

前節までの検討結果に基づいて作成したボールの軌跡シミュレーションプログラム `BallThrow` を示す。プログラムを起動すると図 6 の実行初期画面 (主画面) が現われる。初期値  $\mathbf{v}_I, \mathbf{r}_I, \omega_I$  を設定して [開始] ボタンを押すと図 7 のダイアログが現われる。運動パラメータ、シミュレーションパラメータ、そしてグラフ作図パラメータを設定して [OK] ボタンを押す。主画面上に  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{v}$  の各成分の時間軸上での変化のグラフが図 9 のように表示される。表示後現われる図 8 のダイアログで [はい] ボタンを押すと図 10 のように  $y-x, y-z, x-z$  平面に投影した軌跡が表示される。アニメ番号に 1 を設定して [アニメ] ボタンを押すと図 11 のように軌跡付アニメーション (動画) が表示される。アニメ番号に 2 を設定して [アニメ] ボタンを押すと図 12 のようにアニメーション (動画) が表示される。図 11 はアニメーション終了時画像、図 12 は途中のサンプル画像である。初期値の設定のみを変えて再計算したい場合は主

画面の初期値の設定をスクロールバーで変更して [再開] ボタンを押せばよい。運動パラメータ等を変更して再実行したい場合は [クリア] ボタンを押した後に [開始] ボタンを押す。作図結果をコピーして利用したいときは [コピー] ボタンを押す。図 13-16 はこのようにしてコピーしたものである。

## 8 シミュレーション結果

シミュレーション例として、運動パラメータとシミュレーションパラメータを  $g = 980[\text{cm/s}^2], m = 100[\text{g}], \rho = 0[\text{g/s}], \mu = 2[\text{g/rad}], I = 100[\text{g} \cdot \text{cm}], \nu = 2[\text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}], t_{\max} = 10[\text{s}], K = 100, h = 100[\text{ms}]$  と設定する。このケースで  $t_{\max}$  を一定にすると  $K \geq 20$  では結果に変化が無いことを確認している。データ入力と出力表示は実用的単位であるが、シミュレーションは SI 単位で行っている。図 13 は  $\gamma = 0[\text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}]$  として雑音を加えずに初期条件  $\mathbf{r}_I = (0, 0, 0)[\text{cm}], \mathbf{v}_I = (0, 150, 10)[\text{km/h}], \omega_I = (20, 0, 0)[\text{rad/s}]$  で実施した例で、ボールの時間的な変動の様子を示している。ボールは原点から  $y$  軸方向に  $150[\text{km/h}]$  で幾分上方 ( $z$  軸方向へ  $10[\text{km/h}]$  で) に、 $x$  軸方向の角速度  $20[\text{rad/s}]$  で投球されている。これで  $x-y$  平面すなわち地面に対して横方向にボールは移動 (カーブ) している。図 14 は同じく  $\gamma = 0[\text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}]$  として雑音を加えずに初期条件  $\mathbf{r}_I = (0, 0, 0)[\text{cm}], \mathbf{v}_I = (0, 150, 10)[\text{km/h}], \omega_I = (0, 20, 100)[\text{rad/s}]$  で実施した場合の運動軌跡の表示例である。初速は図 13 の例と同じであるが、非常に大きな角速度で投球されている。この非現実的な設定では、ボールは投げた方向と逆に飛んでゆく。図 15 は  $\gamma = 3,000[\text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}]$  として雑音を加えて初期条件  $\mathbf{r}_I = (0, 0, 0)[\text{cm}], \mathbf{v}_I = (0, 150, 10)[\text{km/h}], \omega_I = (20, 0, 0)[\text{rad/s}]$  で実施した例で、ボールの時間的な変動の様子を示している。雑音がなければ図 13 の例となる。雑音のためボールの速度はかなり変動しているが位置はあまり変動していない。同じく図 16 は  $\gamma = 10,000[\text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}]$  として雑音を加えて初期条件  $\mathbf{r}_I = (0, 0, 0)[\text{cm}], \mathbf{v}_I = (0, 150, 10)[\text{km/h}], \omega_I = (20, 0, 0)[\text{rad/s}]$  で実施した場合である。大きな雑音の影響で軌道が激しく乱れる。また、 $\gamma$  の値を増加させると雑音の影響は徐々に増加する。

## 9 ピッチャー投球ゲーム

この論文で提案した投球モデルを用いた野球ピッチャーの投球ゲームを示す。図 17-20 はピッチャーの投球速度と回転数を与えて、投球結果を評価するゲームの実行画面である。図 17 の開始画面で速度と回転数を与えて開始する。この際、実際の連続撮影した写真[6]を等間隔表示して、ピッチャーの投球の様子をアニメーションで表示する。また、実行中には MIDI ファイルの音楽が聴けるように、メディアプレイヤー・コンポーネントを使用している。キャッチャーの位置で  $x-z$  平面に設定した評価ボードの範囲に球が入るとストライクとする。投球数とストライクの統計によりプレイヤーに点を付ける。極めて単純なゲームであるが、やってみると結構楽しめるものである。

## 10 まとめ

ボール投げの運動を、空気抵抗、回転による抵抗と揚力、そして外界の不規則な変動を考慮した確率微分方程式として定式化した。これを数値解法により解くことで投球のより現実的な軌跡が得られることを示した。応用として野球ピッチャーの投球ゲームを示した。同様にサッカーペナルティキックゲーム等も作成したが、さらに多くのゲームへの応用が期待される。これは平成 15 年度の電気電子工学科卒業研究として実施したものであり、ゲームプログラムを制作した中沢雅君、大森康芳君の努力をたたえたい。

## 参考文献

- [1] 阿部龍蔵「力学・解析力学」岩波書店
- [2] David M.Bourg「ゲーム開発のための物理シミュレーション」オーム社
- [3] R.G. ワッツ、A.T. ペイヒル「ベースボールの科学」サイエンス社、1993
- [4] ベアレント・エクセンドール「確率微分方程式」シュプリンガー・フェアラーク東京
- [5] Borland「開発者ガイド C++ Builder 6」, vol.E82-A, pp.1900-1910, no.9, Sept. 1999
- [6] 「月間メジャーリーグ」ベースボールマガジン社、Vol.6, No.3, March, 2002

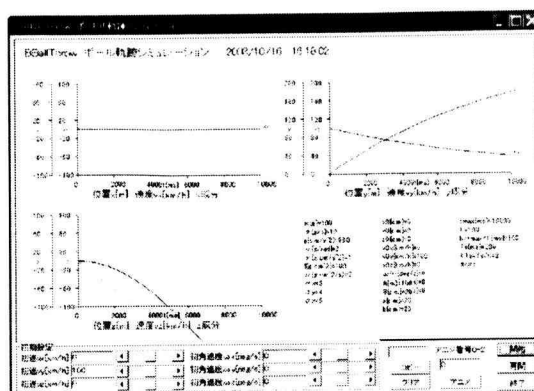


図 9 時間曲線の描画

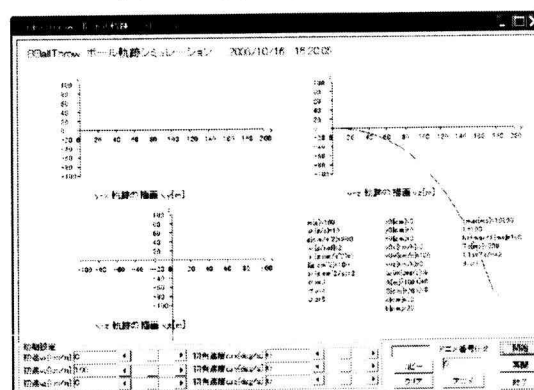


図 10 軌跡曲線の描画

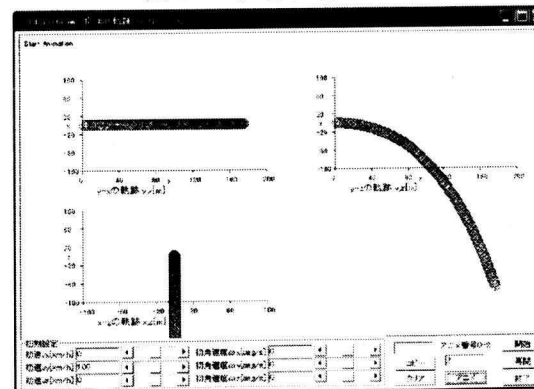


図 11 軌跡つきアニメーション (終了時)

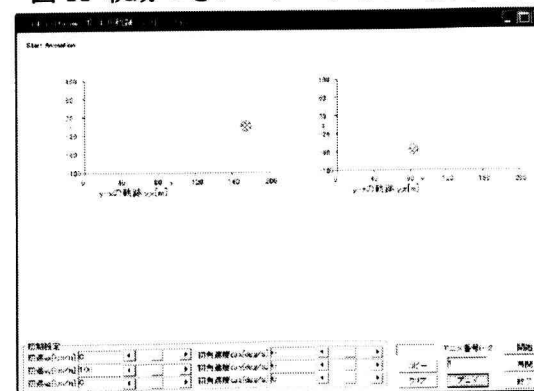


図 12 軌跡なしアニメーション (動作中時)

