

時間遅れを考慮した Lotka-Volterra 振動系の検討

鈴木航祐¹・本田数博²

¹ 大学院工学研究科応用化学専攻博士前期課程 2 年(s033809@cce.kanagawa-it.ac.jp)

² 応用化学科 (honda@chem.kanagawa-it.ac.jp)

The Examination of Lotka–Volterra Oscillation System Considering the Time Delay

Kosuke SUZUKI¹⁾, Kazuhiro HONDA²⁾

Abstract

Adding effects of time delays for Lotka-Volterra non-linear oscillation system, we examined dynamic behaviour of these systems. The delay of exponential smoothing of time was introduced. The effects of these time delays on the dependent variables X and Y in Lotka–Volterra oscillation systems showed divergent or convergent behaviour according to applications of time delays to X and/or Y.

Key Words : Delay, Lotka–Volterra oscillation system

1. はじめに

制御工学をはじめとした物理や生態系、社会工学における分野では線形代数学による予測や検討がなされてきた。しかしながら、非線形システムにおいては解析的手法により解を求めることが困難なことから線型近似に基づいた制御が議論されている。複雑にネットワークしている系を取り扱う場合には連立した常微分方程式を考慮する必要があり、変数間における応答時間の遅れは系の動的挙動に対して、局所的あるいは大局的に変化を及ぼすと考えられる。系の挙動を予測・制御するうえで『時間遅れ』の効果は無視することができない問題であると考えられる。

平衡からそれほど離れていない系における『時間遅れ』は、ある時刻における値を平均化した遅れを考慮することにより、指数平滑化した応答時間をとると考えられる。本質的に振動する系における、時間遅れの効果は系の動的挙動に対して変化を及ぼすと考えられる。

我々は簡易な非線形数理モデルである Lotka-Volterra 振動系に注目し数値計算を行った。系における変化量に対して指数平滑化した時間遅れの効果を考慮したモデルを立て、動的挙動に対する検討を行った。

2. 計算

(1)-(3) 式は Lotka-Volterra 振動系モデルを示す。

$$A + X \rightarrow 2X \quad (1)$$

$$X + Y \rightarrow 2Y \quad (2)$$

$$Y \rightarrow B \quad (3)$$

モデルは生態系システムにおける捕食者、Y と被食者、X との関係を示す。また A および B はそれぞれ被食者の食料および総排出を示す。被食者 X は外部から供給される食料 A により 2 倍に増加する((1)式)。また捕食者 Y は被食者 X を食料として 2 倍の Y へと増加する((2)式)。捕食者 Y が Y の数に比例した速度で死滅する((3)式)。

総括すると A が 2 段階の自己触媒的過程を経て B へと変化する。A の量は一定であり、B は(2)および(3)式の過程には影響をおよぼさない。(1)-(3)式に表される変数 X および Y の微分型速度式は次の(4)-(5)式によって表される。

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -k_1 AX + 2k_1 AX - k_2 XY \\ &= (k_1 A - k_2 Y)X \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= -k_2 XY + 2k_2 XY - k_3 Y \\ &= (k_2 X - k_3)Y \end{aligned} \quad (5)$$

計算は 4 段 4 次のルンゲクッタ法により計算を行った。計算条件は初期値および各パラメータを $[A]_0 = 1.00$, $[X]_0 = [Y]_0 = 0.0100$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1.00$, Time step = 0.004 とし 0~120 の間で計算を行った。また時間遅れの Lotka-Volterra 振動系モデルを構築し、同一条件

のもとで計算した。時間遅れの効果は指数化平均遅れの形式で変数 X および Y に対して与え、 0.004 の時間遅れ (指数化平均時間: τ) すなわち時刻 t における変数に対して $t + \tau$ の遅れが生じるものとした。時間遅れ (4) および (5) 式中の右辺の変数 X または Y に対して、 $t + \tau$ の遅れが生じるものとした。

$$X = X e^{-k(t+\tau)} \quad (6)$$

$$Y = Y e^{-k(t+\tau)} \quad (7)$$

振動系モデルを構築し、同一条件のもとで計算した。時間遅れの効果は指数化平均遅れの形式で変数 X および Y に対して与え、 0.004 の時間遅れ (指数化平均時間) が生じるものとした。時間遅れ (4) および (5) 式中の右辺の変数 X および Y に対して (6) 式のように指数関数的な平滑化された遅れをもって作用する。

3. 計算結果

図 1(a) は Lotka-Volterra 振動系モデルの時系列グラフされた。振動は次のようなプロセスにより説明できる。 X の増加に伴い Y が増加する。一方で X の増加は Y の増

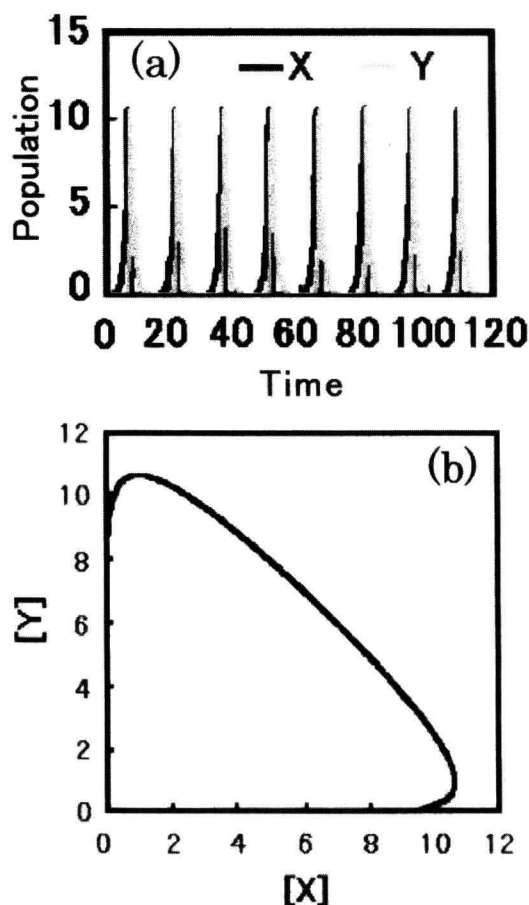


図1 Lotka-Volterra振動系における時間変化(a) およびX-Y位相図(b)

加に伴い頭打ちになり減少する。しかし X および Y は 0 にはならず再び増加するため振動が持続される。この振幅は X および Y の初期値に依存している。図 1(b) の位相図からも振動がある周期軌道上を変化していることが示されている。図 2 は X に対して時間遅れの効果を加えた Lotka-Volterra 振動系における X および Y の時間変化である。

過渡的な減衰振動が示され、 X および Y はある一定値になることが示された。

図 3 は Y に対して時間遅れの効果を加えた Lotka-Volterra 振動系における X および Y の時間変化である。 Y の増加による X の減少が抑制される為 X の減少および Y の増加を待たずして解が発散してしまうという結果が示された。図 3(a) および (b) から、 Y は 10^2 のオーダーであり、一度の振動が起きた後に減少している。

図 4(a) は X および Y に対して時間遅れの効果を加えた Lotka-Volterra 振動系における X および Y の時間変化である。過渡的な減衰振動が示され、 X および Y はある s 周期軌道に収束していく過程が示された。しかしながら X もしくは Y のみに時間遅れを考慮した場合とは異なり、減衰の過程が長くなることが示されている。

X および Y に対しての時間遅れが一意的に決められているために振動を維持すると考えられる。図 4(b) にお

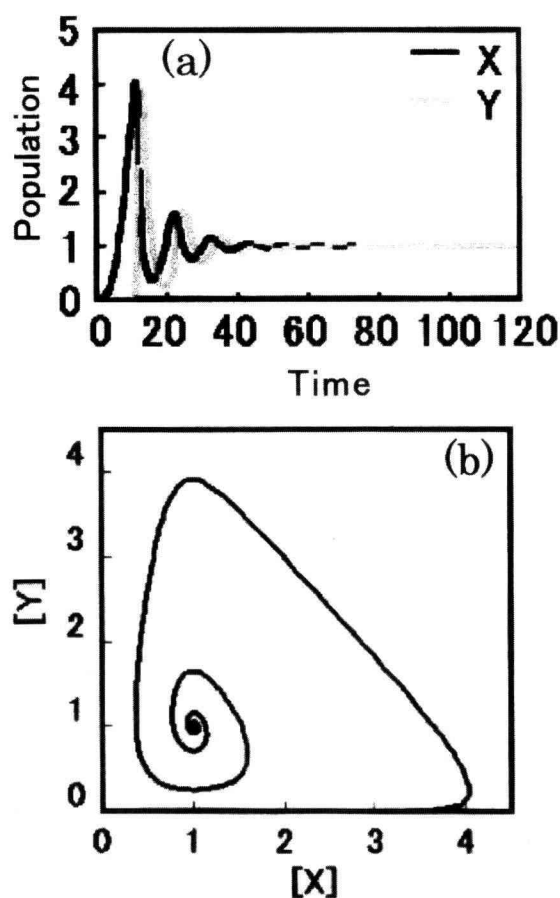


図2 Xに対して時間遅れを考慮したLotka-Volterra振動系における時間変化(a)およびX-Y位相図(b)

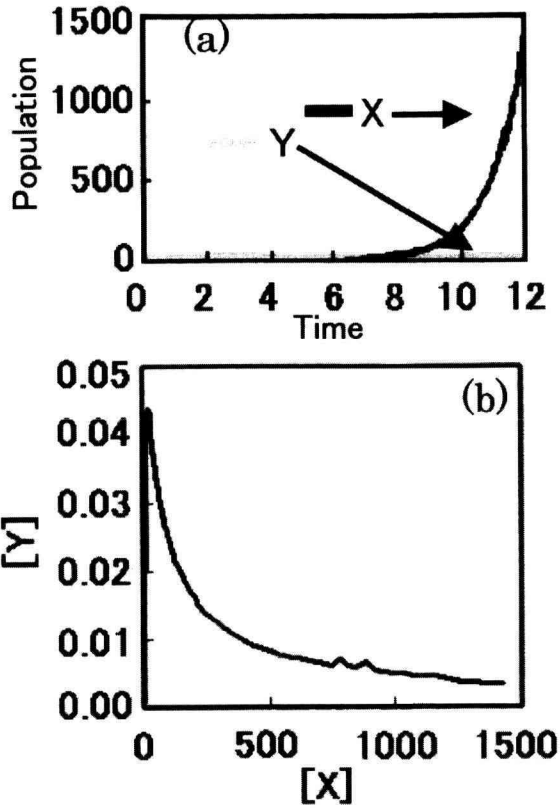


図3 Yに対して時間遅れを考慮したLotka-Volterra 振動系における時間変化(a)およびX-Y位相図(b)

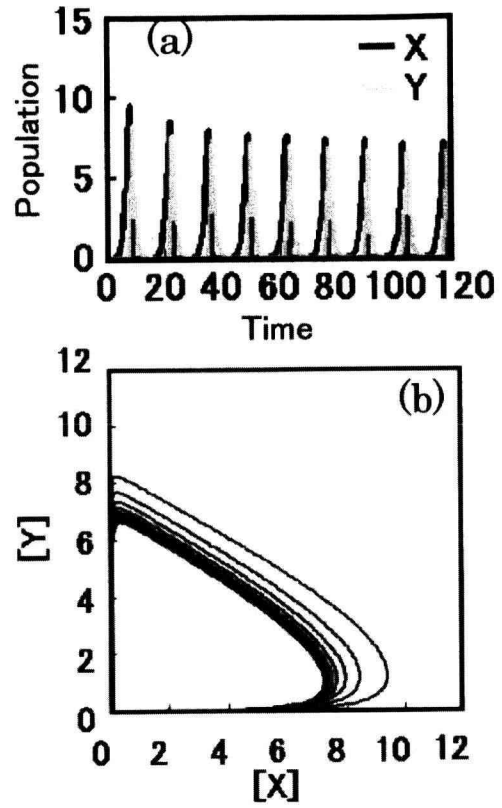


図4 XおよびYに対して時間遅れを考慮したLotka-Volterra振動系における時間変化(a)およびX-Y位相図

る位相図からはこの振動がリミットサイクル的にある軌道に収束していることが示される。

4. おわりに

2 変数からなる単純なシステムであっても時間遅れの効果により系の振動に対して、影響を及ぼすことが示された。周期解がリミットサイクル的な解へと変化

するという結果から、カオス解に到る複雑な動的挙動の変化が期待される。本研究において定義および検討した時間遅れは指数平滑化によりある時間における変数の値の平均化を行ったものである。ある時間における変数の値をダイレクトに反映した離散化された時間遅れについて検討を行うことでより現実に近いモデルへの適応化が可能であると考えられる。