

低密度パリティ検査符号とターボ符号を用いた 誤り訂正に関する研究

野村宏¹・奈倉理一²

¹ 大学院工学研究科電気電子工学専攻 (nvillage@ele.kanagawa-it.ac.jp)

² 電気電子工学科 (nagura@ele.kanagawa-it.ac.jp)

Study on the error correction using Low Density Parity Check Codes and Turbo Codes.

Hiroshi Nomura, Riichi NAGURA

Abstract

Eb/No(Bit Energy per Noise power density) becomes very small value and decoding becomes difficult by the signal level decreases to very small in the Wireless Communication. The error correcting codes becomes very important in the picture transmission. Recently, Turbo Codes and LDPC (Low Density Parity Check) Codes have been researched as a very strong error correcting codes. The occurrence of the error can be suppressed by using error correcting codes of Turbo Codes and LDPC Codes. This paper analyzes the effect of error correcting codes and shows error rate every S/N (Signal per Noise rate) ratio.

Key Words: Turbo Codes, Low Density Parity Check Codes, error correction, error rate, S/N ratio

1. まえがき

近年、衛星及び移動体通信の急速な発展に伴い、データ伝送の大容量化、高速化とともに高信頼性が求められている。また高速化に伴い、無線通信分野においては bit energy の減少により搬送波電力対雑音比(C/N 値)が小さくなり、正しい復号判定が困難となる場合がある。この解決策として誤り訂正符号が提案されたがシャノンの通信路符号化定理に届くことは難しい状況であった。さらに伝送効率を向上させるためにはデータ圧縮が有効であるが、エラーの影響が大きくなり、誤りが増加するため信頼性に欠ける。このような環境下では、従来の誤り訂正方式では対応が困難となる。しかし、近年のターボ符号の提案と低密度パリティ検査符号の再発見により状況は一変し、通信路符号化定理に近づく理論として注目を浴びるようになり、様々な方面で実用化への研究が進められている。

本稿では、Shannon 限界に近づく符号化として提案され、上記の課題を解決する方式であるターボ符号と低密度パリティ検査符号の効果を明らかにする。具体的には誤り率解析プログラムを用いてターボ符号では繰り返し数を、低密度パリティ検査符号では符号長をパラメータとして、それぞれ Eb/No (ビットエネルギー対雑音電力)

値を変化させたときの誤り率特性を算出し、両方式の検討を行う。

2. ターボ符号

ターボ符号は 1993 年にフランスの Berrou らによって提案された符号化方式である。

図 1 に符号化/復号の手順を示す。入力情報は符号器 1 とインタリーバによって並び替えられた後に符号器 2 によって、符号語 1 及び符号語 2 が作られる。これらは入力情報と多重化された後に変調器によって変調され、通信路へ送信される。符号器全体の特徴として、小さい拘束長を持つ二つの符号器の間にインタリーバを置くことによって、状態数を増加させる点である。通信路を通じてきた符号語は復号器 1 で受信された情報を用いて復号処理を行い、復号器 2 では復号器 1 で処理された情報を用いて復号処理を行う。この情報を再び復号器 1 へ送り返し、数回の繰り返しを行った後に結果として出力情報を出力する。しかし高い S/N 比で誤り率特性にエラーフロアが生じる現象や、インタリーバサイズの増加によって伴う復号遅延の問題があるため、インタリーバサイズを増加させずにエラーフロアを解決することが必要である。

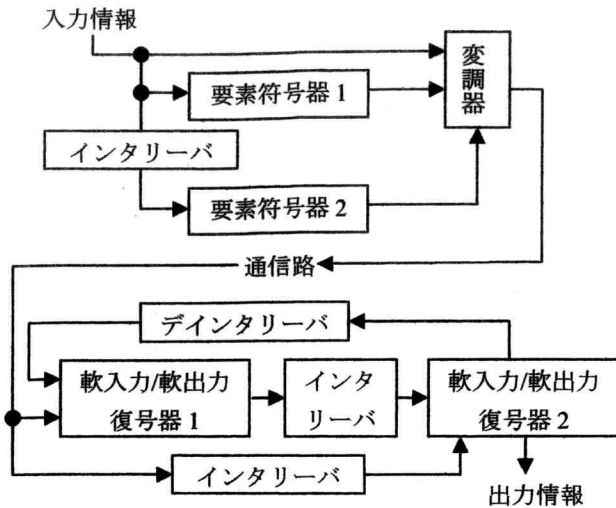


図1 ターボ符号化/復号系統図

3. 低密度パリティ検査符号

低密度パリティ検査符号は1960年代にGallagerによって提案された符号化方式であるが、当時は計算機資源等が高価であったため用いられることはなかった。しかし1990年代後半にMackeyによって再発見された。低密度パリティ検査符号は二元符号で非常に低密度な検査行列Hによって定義される符号である。各行及び各列の1の数がそれぞれ制限され、優れた復号特性を保證するランダム性を保ち、復号に適した疎なグラフ構造を兼ね備えている。

図2に符号化/復号の手順を示す。符号化を行う前段階として、検査行列Hから $GH^T=0$ を用いて生成行列Gを求める。符号器で生成行列Gと入力情報を掛け合わせ $(m_1, m_2, \dots, m_k)G = (C_1, C_2, \dots, C_k)$ から符号語を得て、変調器を通し通信路へ送信される。受信信号は復調された後に復号され、受信された推定語 \hat{c} が $\hat{c}H=0$ を満たすならば誤りがないと判断し、入力情報の推定値を出力する。

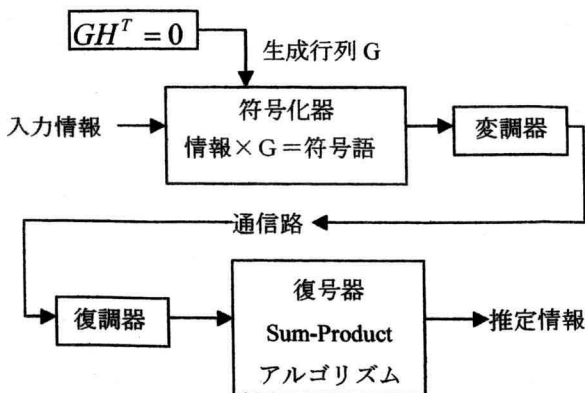


図2 低密度パリティ検査符号化/復号系統図

4. Sum-Product アルゴリズム^[3]

低密度パリティ検査符号の復号には、反復復号を基本とするSum-Productアルゴリズムを用いる。

$M \times N$ の2元行列を復号する検査行列Hと仮定する。また、検査行列のm行n列目の要素を H_{mn} と表記する。集合 $[1, N]$ の部分集合 $A(m)$ 、 $B(n)$ を次式に定義する。

$$\begin{aligned} A(m) &= \{n : H_{mn} = 1\} \\ B(n) &= \{m : H_{mn} = 1\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

ゆえに、 $A(m)$ は検査行列Hのm行目での1が立っている列インデックスの集合を意味しており、同様に $B(n)$ も検査行列Hのn列目で1が立っている行インデックスの集合を意味している。

受信語 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ を受信したと仮定し、また、通信路を条件付確率 $P(x|y) (y \in Y, x \in F_2)$ で記述される無記憶通信路を仮定する。ここでYは受信アルファベットである。sum-product復号法は次の過程を踏む。

- (1) 初期化
- (2) 行処理
- (3) 列処理
- (4) 一時推定語の計算
- (5) パリティ検査
- (6) 反復回数のカウント

(1)では、 H_{mn} を満たす全ての組 (m, n) に対して、初期設定として $q_{mn}(0) = 1/2, q_{mn}(1) = 1/2$ とする。ここで q_{mn} を事前値と呼ぶ。また、反復回数のカウンタとする変数を $l = 1$ とし、最大反復回数を変数 l_{\max} とする。

(2)では、 $m = 1, 2, \dots, M$ の順に $H_{mn} = 1$ を満たす全ての組 (m, n) に対して、 $r_{mn}(0)$ と $r_{mn}(1)$ を次の更新式を利用して更新する。

$$\begin{aligned} r_{mn}(0) &= K \sum_{\substack{c_i \in F_2 \\ i \in A(m), n \sum_{c_i=0}}} \prod_{n' \in A(m), n} q_{mn'}(c_{n'}) P(y_{n'} | c_{n'}) \\ r_{mn}(1) &= K \sum_{\substack{c_i \in F_2 \\ i \in A(m), n \sum_{c_i=1}}} \prod_{n' \in A(m), n} q_{mn'}(c_{n'}) P(y_{n'} | c_{n'}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで、定数Kは $r_{mn}(0) + r_{mn}(1) = 1$ が成り立つように定められたものとする。これらの r_{mn} は外部値と呼ばれる。

(3)では、 $n = 1, 2, \dots, N$ の順に $H_{mn} = 1$ を満たす全ての組 (m, n) に対して、 $q_{mn}(0)$ と $q_{mn}(1)$ を次の更新式を利用して更新する。

$$q_{mn}(0) = K' \prod_{\substack{m' \in \\ B(n) \setminus m}} r_{m'n}(0) \quad (4.3)$$

$$q_{mn}(1) = K' \prod_{\substack{m' \in \\ B(n) \setminus m}} r_{m'n}(1)$$

ここで K' は $q_{mn}(0) + q_{mn}(1) = 1$ が成り立つように定められたものとする。

(4)では $n=1, 2, \dots, N$ について

$$Q_n(0) = K'' P(y_n | x_n = 0) \prod_{m' \in B(n)} r_{m'n}(0) \quad (4.4)$$

$$Q_n(1) = K'' P(y_n | x_n = 1) \prod_{m' \in B(n)} r_{m'n}(1)$$

$$\hat{c}_n = \begin{cases} 0, & \text{if } Q_n(0) \geq Q_n(1) \\ 1, & \text{if } Q_n(0) < Q_n(1) \end{cases} \quad (4.5)$$

を計算する。ここで得られる $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_N)$ を一時推定語と呼ぶ。定数 K'' は $Q_n(0) + Q_n(1) = 1$ となるように定められた規格化定数である。

(5)では、一時推定語が符号語になっているかを判断する。ここで一時推定語 $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_N)$ が

$$(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_N) H^T = 0 \quad (4.6)$$

を満たせば、 $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_N)$ を推定語として出力し、アルゴリズムを終了する。

(6)では、 $l < l_{\max}$ であるならば l をインクリメントとして(2)へ戻り、 $l = l_{\max}$ であるならば $(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_N)$ を推定語として出力し、アルゴリズムを終了する。

復号の対象である符号のタナグラフにループが含まれていない場合、反復計算後に $Q_n(b) (b \in \{0, 1\}, n \in [1, N])$ は周辺分布 $P(x_n = b | y)$ に収束する。sum-product 復号法の(4)では、この周辺分布に基づき一定推定語を計算している。

検査行列の各行は偶重み符号とみなすことができ、行処理ではそれぞれの偶重み符号について外部値を計算しているとみなすことができる。列処理はこのようにして得られた外部値を用いて、事前値を更新する処理を行っている。各反復処理において一時推定語を計算するが、この一時推定語を検査行列にかけシンドロームがゼロベクトルになるかを検査することにより、一時推定語が符号語となっているかを計算する。正しい場合は、無駄となる反復計算を省くことができる。

5. 解析結果及び考察

5.1. シミュレーション結果

図3にシミュレーションに用いた原画像を、図4に符号化を用いたときの画像を示す。図5にはターボ符号、図6には低密度パリティ検査符号の誤り率特性を示す。

図4の(a)はターボ符号の繰り返し1回の復元画像、同じく(b)は繰り返し5回の復元画像である。画像を用いることによって視覚での効果確認も可能となる。Eb/No 値が 2[dB] の時、誤り訂正を使用しない場合の誤り率は 1.92×10^{-1} となった。繰り返し1回では 3.20×10^{-3} となり誤りが発生し、繰り返し5回では誤りの発生を抑えることが可能となった。



図3 原画像



(a) 繰り返し1回 (b) 繰り返し5回

図4 復元画像

図5及び図6はターボ符号と低密度パリティ検査符号の誤り率特性となる。ターボ符号では繰り返しを1回、2回、5回と変化させた。低密度パリティ検査符号では行重みを3、列重みを6とした(981,500)の行列と(9974,5000)の行列を用いた。行重み、列重みは各行及び各列に含まれる1の数を指す。この結果からターボ符号は繰り返しを増やすことにより、低密度パリティ検査符号では符号長を大きくすることによって特性が良くなることが確認できた。ターボ符号の繰り返し2回と低密度パリティ検査符号の符号長 9974 の特性はほぼ同等となったが、特性の伸びがなくなるエラーフロアが繰り返し2回では起こり、符号長 9974 では起こらなかった。また参考として、両グラフに誤り訂正符号を行わなかった場合の特性を示す。

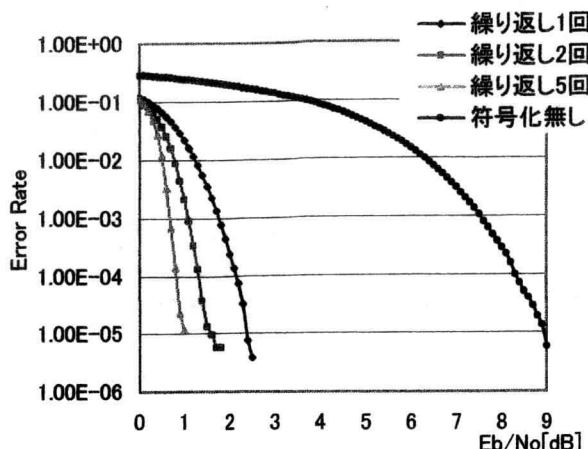


図5 ターボ符号の誤り率特性

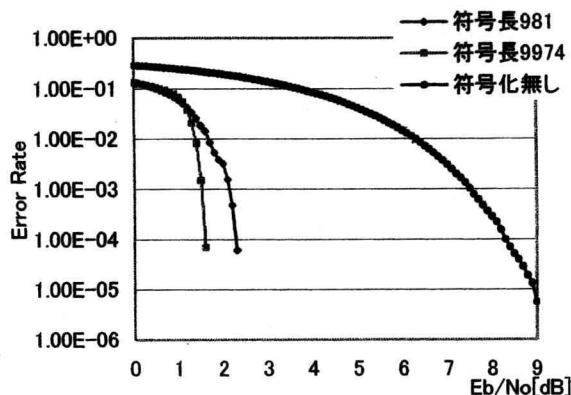


図6 低密度パリティ検査符号の誤り率特性

5.2. 考察

誤り訂正符号であるターボ符号は復号した結果を受信信号として用いることによって、復号を繰り返す。したがって、繰り返し数を増やすことにより誤りを抑えることができる。同じく低密度パリティ検査符号は符号長を長くすることによって、より疎な行列となるため誤りを抑えることができる。

数値的な比較としては、誤り率が $1.00\text{E-}4$ となるのは繰り返し2回では $1.3[\text{dB}]$ 、符号長9974では $1.4[\text{dB}]$ となりほぼ同一となったが、符号化を行わない場合は $8.2[\text{dB}]$ となり、大きな差となった。この結果、誤り率 $1.00\text{E-}4$ となる通信路での伝送では、符号化を用いると約 $7[\text{dB}]$ も小さな電力で伝送が可能となる。表1にそれぞれの同誤り率での比較を示す。

表1 誤り率比較

	繰り返し2回	符号長9974	符号化無し
$1.00\text{E-}02$	$0.7[\text{dB}]$	$0.6[\text{dB}]$	$6.2[\text{dB}]$
$1.00\text{E-}03$	$1.0[\text{dB}]$	$1.3[\text{dB}]$	$7.5[\text{dB}]$
$1.00\text{E-}04$	$1.3[\text{dB}]$	$1.5[\text{dB}]$	$8.2[\text{dB}]$
誤り無し	$1.9[\text{dB}]$	$1.7[\text{dB}]$	$9.1[\text{dB}]$

6. 結論

ターボ符号や低密度パリティ検査符号を用いることにより、誤りの発生を抑えること確認できた。しかし、繰り返し数や符号長の増加に伴い、解析時間も増加したため、復号遅延が発生していると考えられる。通信を行う場合はハード面や通信路を考慮し、最適化を行う必要があると考える。

今後の課題として、入力情報や各パラメータを自由に変更できる解析プログラムが必要である。そして、低密度パリティ検査符号の実用化検討を行うにあたり、C++プログラム化が必須であるため、解析プログラムの製作を行う。

文献

- [1] Riichi Nagura, "The Accurate Height Detection using the Multi-Directional Imaging and High Quality Data Compression", Proceedings of the Remote Sensing and Photogrammetry Society(RSPSoc2004)No48, pp6-9, Sept.2004.
- [2] 小林昌彦, 野村宏, 奈倉理一, "誤り訂正符号による圧縮画像データにおける誤り発生防止" 神奈川工科大学研究報告 B 理工学編第 28 項別冊, pp24, Mar.2004.
- [3] 和田山正, "低密度パリティ検査符号とその復号法" トリケップス, pp76-78, Jun.2002.
- [4] 松島敏泰 "ターボ符号・LDPC 符号とその復号法の概要," 電子情報通信学会, vo88, no4, pp244, 2005.